

Cvičení 7

Cvičení 7.1. Vzpomeňte si na operátor derivace $\mathbf{D}: \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, který zobrazuje

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \mapsto \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2$$

- Připomeňte si, jak vypadá matice tohoto operátoru v kanonické bázi $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$.
- Najděte matici tohoto operátoru $[\mathbf{D}]_{\mathcal{X}}$ v bázi $\mathcal{X} = (1, x-2, (x-2)^2, (x-2)^3)$ bez použití matic transformace souřadnic.
- Najděte matici transformace souřadnic $[\text{id}]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}}$ a $[\text{id}]_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}}$, kde $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$ je kanonická báze $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.
- Ověřte pomocí maticového násobení, že platí $[\mathbf{D}]_{\mathcal{X}} = [\text{id}]_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}} [\mathbf{D}]_{\mathcal{E}} [\text{id}]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}}$.
- Najděte souřadnice polynomu $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 3$ v bázi $\mathcal{X}$.

Mono-, epi-, izo-morfismy

Cvičení 7.2. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbf{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tj. najděte všechny vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ takové, že $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{v}$. Je řešení jednoznačné?

Definice. Lineární zobrazení $A: V \rightarrow W$ se nazývá

- monomorfismus**, jestliže je prosté, což platí právě tehdy když $\ker A = \{\vec{0}\}$, což platí právě tehdy, když $\text{def } \mathbf{f} = 0$
- epimorfismus**, jestliže je na, tj. $\text{im } A = W$, což platí právě tehdy, když $\text{rank } A = \dim W$.
- izomorfismus**, jestliže splňuje obě podmínky.

Cvičení 7.3. U následujících matic rozhodněte, zda představují monomorfismus, epimorfismus nebo izomorfismus.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Pozorování. Necht $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{r \times s}$ a $A: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ příslušné lineární zobrazení $A\vec{x} = \mathbf{A}\vec{x}$. Pak platí

- A je monomorfismus právě tehdy, když $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé sloupce (což může nastat jen tehdy, když $s \leq r$),
- A je epimorfismus právě tehdy, když sloupce $\mathbf{A}$ generují $\mathbb{R}^r$, (což může nastat jen tehdy, když $s \geq r$),
- A je izomorfismus právě tehdy, když sloupce $\mathbf{A}$ tvoří bázi $\mathbb{R}^r$ (což může nastat jen tehdy, když $r = s$, tj. $\mathbf{A}$ je čtvercová matice).

Pozorování. Čtvercová matice je monomorfismus právě tehdy, když je epimorfismus.

Inverzní matice

Definice/Tvrzení. Budte X, Y libovolné množiny, $f: X \rightarrow Y$ libovolné zobrazení. Zobrazení g se nazývá **inverzní** k f , jestliže $f \circ g = \text{id} = g \circ f$, tj. jestliže $f(g(y)) = y$ pro každé $y \in Y$ a $g(f(x)) = x$ pro každé $x \in X$. Inverzní zobrazení existuje právě tehdy, když f je bijekce. V tom případě je dané jednoznačně a značí se f^{-1} .

Tvrzení. Necht $A: V \rightarrow W$ je bijektivní lineární zobrazení. Potom $A^{-1}: W \rightarrow V$ je rovněž lineární.

Definice. Bud $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ regulární matice. Matice $\mathbf{A}^{-1}$ se nazývá maticí **inverzní** k $\mathbf{A}$, jestliže $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ nebo ekvivalentně $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Cvičení 7.4. Uvažujme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Najděte její inverzi $\mathbf{A}^{-1}$. Ověřte výsledek pomocí maticového násobení $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-1}\vec{v}$.

Řešení

1. $[\mathbf{D}]_{\mathcal{X}} = [\mathbf{D}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$	$[\text{id}]_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$	2. $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$, ano
$[\text{id}]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$	$[p(x)]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$	3. epi, mono, nic, izo
		4. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$