

Cvičení 8

Frobeniova věta

Věta. (Frobenius) Necht $\mathbb{F}$ je těleso. Dále buď $\mathbf{A}: \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ matice a $\vec{b} \in \mathbb{F}^r$ vektor. Soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ má řešení právě tehdy, když $\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank}(\mathbf{A} \mid \vec{b})$. Množinu řešení $S = \{\vec{x} \mid \mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}\}$ lze napsat jako $S = \vec{x}_p + S_0$, kde $S_0 = \{\vec{x}_0 \mid \mathbf{A}\vec{x}_0 = \vec{0}\} = \ker \mathbf{A}$ je množina všech řešení bez pravé strany a $\vec{x}_p$ je jakékoliv (konkrétní, tzv. *partikulární*) řešení.

Cvičení 8.1. Uvažujme soustavu rovnic $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Rozhodněte, zda má soustava řešení.
- Jaká je dimenze množiny řešení jakožto afinního prostoru. Jinými slovy: kolik potřebujeme nejméně parametrů pro popis množiny řešení?
- Najděte nějaké jedno řešení dané soustavy.
- Najděte nějaké jedno řešení soustavy bez pravé strany $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$. Najděte ještě druhé řešení, které bude lineárně nezávislé na prvním.
- Určete množinu všech řešení soustavy bez pravé strany, tj. určete jádro $\ker \mathbf{A}$.
- Určete množinu všech řešení původní soustavy pomocí Frobeniovy věty.

Cvičení 8.2. Vyřešte podobným způsobem soustavu s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Cvičení 8.3. Najděte řešení následující soustavy rovnic v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= \lambda^3 \end{aligned}$$

Řešení

1. ano; 2; např. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

např. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$

$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

2. $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

3. $\lambda \neq 1, -2: \left\{ \frac{1}{\lambda+2} \begin{pmatrix} -\lambda^2+\lambda+1 \\ 1-\lambda^2 \\ \lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+1 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda = 1: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda = -2: \text{nemá řešení}$