

Cvičení 9

Definice. Bijektivní zobrazení $\pi: M \rightarrow M$, kde M je konečná množina, nazýváme **permutace** množiny M . Množinu všech permutací množiny $\{1, \dots, n\}$ značíme S_n .

Značení. Permutace lze zapisovat rozličnými způsoby. Pro ilustraci uvažme následující permutaci šesti prvků

$$\pi: 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 2, \quad 4 \mapsto 5, \quad 5 \mapsto 4, \quad 6 \mapsto 6.$$

Působení permutace se často zapisuje do tabulky následujícím způsobem

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Permutaci můžeme rovněž zapsat diagramaticky $\pi = \times \times \times \times |$.

Cvičení 9.1. Zapište pomocí tabulky a pomocí diagramu permutaci $\sigma \in S_6$ zobrazující

$$1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 6, \quad 4 \mapsto 4, \quad 5 \mapsto 1, \quad 6 \mapsto 5$$

Cvičení 9.2. Nalezněte inverzi obou permutací π a σ a jejich složení $\pi \circ \sigma$ a $\sigma \circ \pi$.

Definice. Pro $\pi \in S_n$ říkáme, že dvojice čísel (i, j) , $1 \leq i < j \leq n$ tvoří **inverzi**, jestliže $\pi(i) > \pi(j)$. Říkáme, že permutace π je **sudá**, jestliže má sudý počet inverzí, naopak je **lichá**, jestliže má lichý počet inverzí. Definujeme **znaménko permutace**

$$\operatorname{sgn} \pi = \begin{cases} +1 & \pi \text{ je sudá,} \\ -1 & \pi \text{ je lichá.} \end{cases}$$

Cvičení 9.3. Určete znaménka permutací π , σ , $\pi \circ \sigma$, $\sigma \circ \pi$.

Definice. Pro čtvercovou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ definujeme její **determinant** jako

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \mathbf{A}_{1\pi(1)} \cdots \mathbf{A}_{n\pi(n)}.$$

Tvrzení. Čtvercová matice $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ představuje izomorfismus právě tehdy, když $\det \mathbf{A} \neq 0$. Matici jenž představuje izomorfismus se říká **regulární**. V opačném případě se nazývá **singulární**.

Cvičení 9.4. Spočítejte determinant následujících matic. Rozhodněte, která z nich je regulární.

a) $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Tvrzení. (Rozvoj determinantu podle řádku/sloupce) Uvažujme čtvercovou $n \times n$ matici $\mathbf{A}$. Zvolíme-li řádek $k \in \{1, \dots, n\}$, lze determinant A vyjádřit jako

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{kj} D_{kj},$$

kde D_{kj} jsou tzv. *algebraické doplňky* matice $\mathbf{A}$. Podobně můžeme rozvinout determinant podle l -tého sloupce, $l \in \{1, \dots, n\}$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{il} D_{il}.$$

Cvičení 9.5. Spočítejte determinant metodou rozvoje podle řádku/sloupce

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tvrzení. (Vlastnosti determinantu)

- Determinant není lineární: $\det(A+B)$ se nemusí rovnat $\det A + \det B$. Stejně tak $\det(\alpha A)$ se nemusí rovnat $\alpha \det A$.
- Determinant je multiplikativní: $\det(AB) = \det A \det B$.
- Determinant je multilineární ve sloupcích a řádcích. Speciálně platí $\alpha \det \mathbf{A} = \det \tilde{\mathbf{A}}$, jestliže $\tilde{\mathbf{A}}$ vznikla z $\mathbf{A}$ vynásobením jednoho řádku/sloupce číslem α .
- Determinant se nemění přičtením násobku řádku (resp. sloupce) k jinému řádku (resp. sloupci), tj. platí $\det \mathbf{A} = \det \tilde{\mathbf{A}}$, kde $\tilde{\mathbf{A}}$ vznikla z $\mathbf{A}$ přičtením α -násobku jednoho řádku (sloupce) k jinému.
- Při prohazování řádků/sloupců determinant mění pouze znaménko, tj. $\det \mathbf{A} = -\det \tilde{\mathbf{A}}$, kde $\tilde{\mathbf{A}}$ vznikla z $\mathbf{A}$ prohozením dvou řádků (sloupců).
- Determinant horní (dolní) trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále.

V důsledku lze determinanty počítat pomocí Gaussovy eliminace.

Cvičení 9.6. Spočítejte determinant pomocí Gaussovy eliminace

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 9.7. Spočítejte determinant. (Libovolným způsobem, šikovná je kombinace různých metod.)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení

$$\begin{aligned} 1. \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \text{diagram}, \\ 2. \pi^{-1} &= \text{diagram}, \sigma^{-1} = \text{diagram}, \\ \pi \circ \sigma &= \text{diagram} = \text{diagram}, \\ \sigma \circ \pi &= \text{diagram} = \text{diagram} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \operatorname{sgn} \pi &= \operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma \circ \pi) = -1, & 7. -2 \\ \operatorname{sgn} \sigma &= 1 \\ 4. 1 \text{ (reg.)}, 0 \text{ (sing.)}, -22 \text{ (reg.)} \\ 5. 160 \\ 6. 160 \end{aligned}$$