

DMA Domáci úkol č. 1A

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 2.

1. Uvažujte následující výrok: Každé reálné číslo je menší než svůj dvojnásobek.

a) Zapište tento výrok formálním jazykem.

b) Rozhodněte, zda je pravdivý.

c) Dokažte správnost své odpovědi.

d) Pokud pravdivý není, zkuste změnit jeden znak ve formálním vyjádření výroku tak, aby už pravdivý byl.

Kdo chce, může to pak jako bonus zkusit dokázat.

2. Dokažte následující výrok: $\forall n \in \mathbb{Z}: n > 5 \implies 2n > 10$.

Řešení: 1. a) $\forall x \in \mathbb{R}: x < 2x$.

b) Nepravdivý.

c) Pro $x = -1$ neplatí $-1 < 2 \cdot (-1)$ neboli $-1 < -2$.

d1) Úprava: $\forall x \in \mathbb{N}: x < 2x$.

Bonus: Důkaz: $x \in \mathbb{N}$ libovolné, pak $x > 0$. Přičteme x : $x + x > x$ neboli $x < 2x$.

Alternativa: $x \in \mathbb{N}$ libovolné. Víme $2 > 1$. Vynásobíme číslem $x > 0$ a máme $2x > x$.

d2) Úprava: $\exists x \in \mathbb{R}: x < 2x$.

Bonus: Důkaz: $x = 13$.

d3) Úprava: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: x < 2|x|$.

Bonus: Důkaz: Dva případy. Pro $x > 0$ viz důkaz pro \mathbb{N} . Pro $x < 0$: pak $2|x| > 0$, máme $x < 0 < 2|x|$ neboli $x < 2|x|$.

d3) Úprava: $\forall x \in \mathbb{R}: x \leq 2|x|$.

Bonus: Důkaz: Pro $x \neq 0$ viz výše, pro $x = 0$ je $0 \leq 2 \cdot 0$ tedy platí.

2. Nechť je n libovolné celé číslo. Předpokládejme, že $n > 5$. Aplikujeme ekvivalentní úpravu “vynásob dvěma” (dvojka je kladná) a dostáváme $2n > 10$. Důkaz hotov.