

DMA Domáci úkol č. 1b

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 2.

1. Dokažte následující výrok: $\forall x \in \mathbb{Z}: x > 5 \implies x + 13 > 10$.
2. Uvažujte následující výrok: Každé reálné číslo je menší než svůj dvojnásobek.
 - a) Zapište tento výrok formálním jazykem.
 - b) Rozhodněte, zda je pravdivý.
 - c) Pokud pravdivý není, dokažte to.
 - d) Pokud pravdivý není, zkuste změnit jeden znak ve formálním vyjádření výroku tak, aby už pravdivý byl.Kdo chce, může to pak jako bonus zkusit dokázat.

Řešení:

1. Nechť je x libovolné celé číslo. Předpokládejme, že $x > 5$. Aplikujeme ekvivalentní úpravu "přičtu 13" a dostáváme $x + 13 > 18$. Protože také $18 > 10$, máme $x + 13 > 18 > 10$ neboli $x + 13 > 10$.

Alternativa: $x \in \mathbb{Z}$ lib. Předp. $x > 5$. Také $5 > -3$, tedy $x > 5 > -3 \implies x > -3$. Přičtu 13 $\implies x + 13 > 10$.

Alternativa: $x \in \mathbb{Z}$ lib. Předp. $x > 5$. Také $13 > 5$. Sečteme nerovnosti $\implies x + 13 > 10$.

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}: x < 2x$.

b) Nepravdivý.

c) Pro $x = -1$ neplatí $-1 < 2 \cdot (-1)$ neboli $-1 < -2$.

d1) Úprava: $\forall x \in \mathbb{N}: x < 2x$.

Bonus: Důkaz: $x \in \mathbb{N}$ libovolné, pak $x > 0$. Přičteme x : $x + x > x$ neboli $x < 2x$.

Alternativa: $x \in \mathbb{N}$ libovolné. Víme $2 > 1$. Vynásobíme číslem $x > 0$ a máme $2x > x$.

d2) Úprava: $\exists x \in \mathbb{R}: x < 2x$.

Bonus: Důkaz: $x = 13$.

d3) Úprava: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: x < 2|x|$.

Bonus: Důkaz: Dva případy. Pro $x > 0$ viz důkaz pro \mathbb{N} . Pro $x < 0$: pak $2|x| > 0$, máme $x < 0 < 2|x|$ neboli $x < 2|x|$.

d3) Úprava: $\forall x \in \mathbb{R}: x \leq 2|x|$.

Bonus: Důkaz: Pro $x \neq 0$ viz výše, pro $x = 0$ je $0 \leq 2 \cdot 0$ tedy platí.