DMA Domácí úkol č. 4B

Tento úkol vypracujte po přednášce a před cvičením, na druhé straně je řešení.
Pokud vám něco není jasné, zeptejte se na cvičení nebo na konzultaci.

1.
a) Vyřešte lineární kongruenci $35x \equiv 14 \pmod{77}$.
b) Vyřešte rovnici $35x = 14$ v $\mathbb{Z}_{77}$.

2. Vyřešte soustavu $x \equiv 3 \pmod{5}$, $x \equiv 4 \pmod{4}$ a $x \equiv 5 \pmod{3}$.

Řešení:

1. Převod na diofantickou rovnici: $35x + 77y = 14$.

a/b	y	x
77	1	0
35	0	1
$7\bullet$	$1\bullet$	$-2\bullet$
0	-5	11

Tabulka dá $7 = 1 \cdot 77 + (-2) \cdot 35$. Vynásobíme dvěma, $14 = 2 \cdot 77 + (-4) \cdot 35$.
Proto $x_p = -4$.
Homogenní rovnice po zkrácení sedmičkou: $5x + 11y = 0$.
Máme $x_h = 11k$. Nebo to vykoukáme z tabulky.
Závěr:
a) Obecné řešení je $x = -4 + 11k$ pro $k \in \mathbb{Z}$.
b) Řeení je $x = 7, 18, 29, 40, 51, 62, 73$.

2. Nejprve $x_h = 5 \cdot 4 \cdot 3k = 60k$.
Rovnice si zjednodušíme:

	$x \equiv 3 \pmod 5$	$x \equiv 0 \pmod 4$	$x \equiv 2 \pmod 3$	
	$4 \cdot 3 \cdot x_1 \cdot 3$	$5 \cdot 3 \cdot x_2 \cdot 0$	$5 \cdot 4 \cdot x_3 \cdot 2$	
	$12x_1 \equiv 1 \pmod 5$		$20x_3 \equiv 1 \pmod 3$	
	$2x_1 \equiv 1 \pmod 5$		$-x_3 \equiv 1 \pmod 3$	
	$x_1 = -2$		$x_3 = -1$	
$x_p =$	$3 \cdot 12 \cdot (-2)$	$+0$	$+2 \cdot 20 \cdot (-1)$	$= -112$

Množina všech řešení je tedy $x = 60k - 112$ pro $k \in \mathbb{Z}$ neboli $x = 8 + 60k$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Kdyby se vzalo $x_3 = 2$, dostaneme $x = -72 + 80 = 8$ rovnou.
Diskuse: V prvním sloupci stačilo díky příhodné pravé straně pracovat se členem $4 \cdot x_1 \cdot 3$, kde $4x_1 \equiv 1 \pmod 5$. Podobně u třetího členu, kde potřebujeme nulovost modulo 4 a dvojku už máme, stačí dodat další, tedy tvar $5 \cdot 2x_3 \cdot 2$.