

DMA Domáci úkol č. 5A

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 6.

1.

a) Vyřešte lineární kongruenci $35x \equiv 14 \pmod{77}$.

b) Vyřešte rovnici $35x = 14$ v \mathbb{Z}_{77} .

2. Vyřešte soustavu $x \equiv 3 \pmod{5}$, $x \equiv 4 \pmod{4}$ a $x \equiv 5 \pmod{3}$.

Zkouškový speciál důkazový [náročnější]

(pokročilejší mohou zkusit teď nebo před zkouškou):

a) Nechť $a, b, n \in \mathbb{N}$, nechť $x_p \in \mathbb{N}$ je nějaké řešení rovnice $ax \equiv b \pmod{n}$. Dokažte, že jestliže je $x_0 \in \mathbb{N}$ také řešení $ax \equiv b \pmod{n}$, pak $x_0 = x_p + x_h$, kde x_h je nějaké řešení rovnice $ax \equiv 0 \pmod{n}$.

b) Nechť $a, b, n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že rovnice $ax \equiv b \pmod{n}$ má řešení v \mathbb{Z} právě tehdy, když $\gcd(a, n)$ dělí b .

Řešení:

1. Převod na diofantickou rovnici: $35x + 77y = 14$.

Tabulka dá $7 = 1 \cdot 77 + (-2) \cdot 35$. Vynásobíme dvěma, $14 = 2 \cdot 77 + (-4) \cdot 35$.

Proto $x_p = -4$.

Homogenní rovnice po zkrácení sedmičkou: $5x + 11y = 0$.

Máme $x_h = 11k$. Nebo to vykougáme z tabulky.

Závěr:

a) Obecné řešení je $x = -4 + 11k$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

b) Řešení je $x = 7, 18, 29, 40, 51, 62, 73$.

2. Nejprve $x_h = 5 \cdot 4 \cdot 3k = 60k$.

Rovnice si zjednodušíme:

$x \equiv 3 \pmod{5}$	$x \equiv 0 \pmod{4}$	$x \equiv 2 \pmod{3}$
$4 \cdot 3 \cdot x_1 \cdot 3$	$5 \cdot 3 \cdot x_2 \cdot 0$	$5 \cdot 4 \cdot x_3 \cdot 2$
$12x_1 \equiv 1 \pmod{5}$		$20x_3 \equiv 1 \pmod{3}$
$2x_1 \equiv 1 \pmod{5}$		$-x_3 \equiv 1 \pmod{3}$
$x_1 = -2$		$x_3 = -1$
$x_p = 3 \cdot 12 \cdot (-2)$	$+0$	$+2 \cdot 20 \cdot (-1) = -112$

Množina všech řešení je tedy $x = 60k - 112$ pro $k \in \mathbb{Z}$ neboli $x = 8 + 60k$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Kdyby se vzalo $x_3 = 2$, dostaneme $x = -72 + 80 = 8$ rovnou.

Zkouškový speciál důkazový:

Viz přednáška, popřípadě skriptum.