DMA Domácí koronaúkol č. 6A

Tento úkol se neodevzdává.
Toto jsou příklady vhodné obtížnosti pro semestrální písemku (no dobrá, u trojky je tranzitivita trochu triková, ale jinak je to standard). Nejprve vždy příklad vyřešte samostatně a snažte se o pěkný zápis důkazů, pak se podívejte na další strany na řešení.

Pro následující relace $\mathcal{R}$ vyšetřete, zda splňují základní čtyři vlastnosti
(reflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita).
Poznámka: Vyšetřit znamená rozhodnout zda platí či neplatí a odpověď dokázat.

1. $\mathcal{R}$ na $\mathbb{Z}$; $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $a^2 \leq b^2$.

2. $\mathcal{R}$ na $\mathbb{R}$; $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $|a - b| = 2$.

3. $\mathcal{R}$ na $\mathbb{Z}$; $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $a \cdot b \geq 0$.

Řešení jsou na dalších stranách.

Řešení:

1.

Reflex: platí. Dk: $a \in \mathbb{Z}$ lib. Víme, že $a^2 = a^2$, proto $a^2 \leq a^2$ a tedy $\underline{a\mathcal{R}a}$.

Poznámky: a) Každý důkaz musí vést od známého k tomu, co chceme dokázat. Nelze napsat něco jako: $a\mathcal{R}a$ proto $a^2 \leq a^2$.

b) Každý důkaz někde začne. Obvykle začínáme předpokladem, ale to platí jen pro důkazy implikace. Implikaci vidíme u symetrie, antisymetrie a tranzitivity, ale ne u reflexivity. Kde tedy začneme u ní? Něčím, co je známo, nějakým obecně platným faktem.

Sym: neplatí. Pp: Platí $13\mathcal{R}14$ (neboť $13^2 \leq 14^2$), ale neplatí $14\mathcal{R}13$ (neboť neplatí $14^2 \leq 13^2$).

Poznámky: a) To v těch závorkách je u takto zjevné věci možno vynechat, ale pro jistotu jsem to napsal, abych si šplhnul u zkoušejícího.

b) Protipříklad musí splnit předpoklad, ale nesplnit závěr. Takže třeba dvojice $a = 3$, $b = 2$ není protipříkladem proti symetrii, protože nesplňuje předpoklad.

c) Poznámka k zápisu: Protipříklad jsou ty objekty (zde čísla), která zlobí. Proto je potřeba psát protipříklady tak, aby bylo jasné, kdo to je. Nejlepší je natvrdo $a = 13$, $b = 14$. Tady jsem napsal text, který je na hranici, ale když vidím na začátku to $13\mathcal{R}14$, tak mi dojde, že protipříkladem jsou ta čísla 13 a 14. Není vhodné napsat jen

„pp: platí $13^2 \leq 14^2$, ale neplatí $14^2 \leq 13^2$“

protože tím nutíme čtenáře, aby si rozšifroval, co to vlastně ten náš protipříklad je.

Antisym: neplatí. Když to necítíme intuitivně, zkusíme napsat důkaz a uvidí se.

Takže vezmeme $a, b \in \mathbb{Z}$ splňující $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$. Pak $a^2 \leq b^2$ a $b^2 \leq a^2$. Odtud $a^2 = b^2$. Umíme z toho odvodit, že $a = b$? Asi ne, protože ve hře jsou i záporná čásla, to nás inspiruje k vytvoření protipříkladu.

Závěr: Antisym neplatí. Pp: $a = 13$, $b = -13$. Pak $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$ (tedy splněn předpoklad), ale $a \neq b$ (neplatí závěr).

Poznámka: Je vidět, že pokud bychom tuto relaci uvažovali třeba na $\mathbb{N}$, tak už by antisymetrie platila. Důkaz by pak vypadal takto:

$a, b \in \mathbb{N}$. Předp. $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$. Pak $a^2 \leq b^2$ a $b^2 \leq a^2$. Odtud $a^2 = b^2$ neboli $|a| = |b|$. Protože $a, b \geq 0$, znamená to $a = b$.

Všimněte si, jak se zase držíme formátu pro důkaz implikace (z jejího předpokladu nějakými skoky dojdeme k jejímu závěru).

U důkazů vlastností netrvám na tom, že je třeba psát slovo „předpoklad“, považuje se to za samozřejmé.

Tranz: platí. Dk: $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Předp.: $\underline{a\mathcal{R}b}$ a $\underline{b\mathcal{R}c}$. Pak $a^2 \leq b^2$ a $b^2 \leq c^2$. Odtud $a^2 \leq c^2$ a tedy $\underline{a\mathcal{R}c}$.

Poznámka: Eliminace b z daných rovnic je tradiční postup.

Opět si všimněte tradiční formy důkazu implikace: Začneme předpokladem, trocha hraní a skončíme závěrem. Začátek i konec jsou v řeči relace, nezačali jsme rovnou skokem do $a^2 \leq b^2$ a podobně.

2. Tato relace nám umožňuje skákat po reálné ose skoky o velikosti 2.

Reflex: neplatí. Pp: Zvolíme $a = 7$ (překvapení!). Pak $|a - a| = 0 \neq 2$, tedy neplatí $a\mathcal{R}a$.

Poznámka: Myslím, že by u zkoušky stačilo napsat

Pp: Neplatí $7\mathcal{R}7$.

Ale když budete mít čas, raději napište víc.

Poznámka: Nestačí napsat, že „reflexivita neplatí, protože $|a - a| \neq 2$“. Vždy je nutno ukázat konkrétní protipříklad. Tím se dokáže, že skutečně existuje případ, kdy dojde k selhání.

Proč je to důležité? Představme si relaci danou $x\mathcal{S}y$ pokud $x = y^3$. Platí reflexivita? To by muselo vždy platit, že $x = x^3$, zjevný nesmysl. Pokud bychom teď zajásali, že je reflexivita špatně, tak je to předčasné, já jsem totiž tuto relaci vtipně definoval na množině $A = \{-1, 0, 1\}$. Tak, a teď hledejte protipříklad.

Sym: platí. Dk: $a, b \in \mathbb{R}$. Předpoklad: $\underline{a\mathcal{R}b}$, odtud $|a - b| = 2$. Pak také

$$|b - a| = |-(a - b)| = |a - b| = 2,$$

tedy $\underline{b\mathcal{R}a}$.

Poznámka: Umím si představit, že rovnost $|a-b| = |b-a|$ by studenti uměli odůvodnit i jinak.
Poznámka: Pokud napíšeme, že „Symetrie platí, protože $|b-a| = |a-b|$“, tak je to vlastně pravda, protože jsme tím vystihli klíčový krok, a v nějakém pojednání by to stačilo, ať si to čtenář doplní sám. Ale zde trénujeme psaní důkazů, takže to chceme mít pěkně, ať je vidět úplný důkaz implikace.

Antisym: neplatí. Když to necítíme intuitivně, zkusíme napsat důkaz a uvidí se.
Takže vezmeme $a, b \in \mathbb{R}$ splňující $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$. Pak $|a-b| = 2$ a $|b-a| = 2$. To je vlastně dvakrát zopakovaná stejná informace, že $|a-b| = 2$, z toho rovnost nevymlátíme.
Závěr: Antisym neplatí. Pp: $a = 12$, $b = 14$. Pak $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$, ale $a \neq b$.

Tranz: neplatí. Pp: Zvolíme $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$. Pak $1\mathcal{R}3$ a $3\mathcal{R}5$, ale neplatí $1\mathcal{R}5$.
Poznámka: Je dobré si uvědomit, že je také možné vzít jako protipříklad $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$.

3.
Reflex: platí. Dk: Všechna $a \in \mathbb{Z}$ splňují $a^2 \geq 0$ neboli $a \cdot a \geq 0$, proto $\underline{a\mathcal{R}a}$.

Sym: platí. Dk: $a, b \in \mathbb{Z}$. Předpoklad: $\underline{a\mathcal{R}b}$, odtud $a \cdot b \geq 0$. Díky komutativitě také $b \cdot a \geq 0$ a tedy $\underline{b\mathcal{R}a}$.
To byl důkaz vzorový. Nejstručnější ještě akceptovatelná verze vypadá takto:
$a, b \in \mathbb{Z}$: $a\mathcal{R}b \longrightarrow ab \geq 0 \longrightarrow ba \geq 0 \longrightarrow b\mathcal{R}a$.
Cokoliv ještě stručnějšího už znamená ztrátu bodů.

Antisym: neplatí. Když to necítíme intuitivně, zkusíme napsat důkaz a uvidí se.
Takže vezmeme $a, b \in \mathbb{Z}$ splňující $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$. Pak $ab \geq 0$ a $ba \geq 0$. To je dvakrát zopakovaná informace, že $ab \geq 0$, z toho asi $a = b$ neodvodíme.
Závěr: Antisym neplatí. Pp: $a = 1$, $b = 3$. Pak $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$, ale $a \neq b$.

Tranz: Tohle je ta lepší otázka. Aby tranzitivita platila, museli bychom být schopni z informace, že $ab \geq 0$ a $bc \geq 0$, nějak dostat, že $ac \geq 0$.
Člověka může napadnout, že $ab \geq 0$ typicky znamená, že obě čísla jsou kladná nebo obě záporná.
Verze obě kladná: $a, b > 0$, pak z $bc \geq 0$ máme i c kladné, proto je $ac \geq 0$.
Verze obě záporné: $a, b < 0$, pak z $bc \geq 0$ máme i c záporné, proto je $ac \geq 0$.
To vypadá nadějně, dokud člověka nenapadne (doufejme), že je i nula. Pak už není tak těžké najít protipříklad.
Závěr: Tranzitivita neplatí. Pp: $a = 13$, $b = 0$, $c = -13$. Pak $13\mathcal{R}0$ a $0\mathcal{R}(-13)$, ale neplatí $13\mathcal{R}(-13)$.

Alternativa: U relací daných vzorcem obvykle zkoušíme tranzitivitu dokázat eliminací „prostředníka“ algebrou. Zde máme nerovnosti, tedy není možné si z první vyjádřit b a dosadit do druhé. Můžeme ale nerovnice navzájem vydělit:

$$\frac{ab}{bc} \geq 0 \implies \frac{a}{c} \geq 0 \implies \frac{ac}{c^2} \geq 0 \implies ac \geq 0.$$

To vypadá slibně, ovšem (vždy ve střehu!) hned v prvním zlomku vidíme, že to funguje pouze pro $bc \neq 0$, což by nás mělo navést na správnou cestu k protipříkladu.
Alternativa: Označíme si $x = ab$, pak víme, že $x \geq 0$. Odtud $b = \frac{x}{a}$, dosadíme do druhé rovnice, máme $\frac{x}{a}c \geq 0$ neboli $\frac{x}{a^2} \cdot ac \geq 0$. Protože $x \geq 0$ a $a^2 \geq 0$, odvodíme, že $ac \geq 0$. I zde je ovšem problém s nulami.