DMA Domácí úkol č. 7A

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 8.

1. Uvažujte následující relaci na $\mathbb{Z}$:
$a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $b-a$ je dělitelné dvěma nebo třemi.
Vyšetřete, zda splňuje základní čtyři vlastnosti (reflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita).
Je to částečné uspořádání?

Poznámka: Při přemýšlení může pomoci alternativní definice:
$a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $a \equiv b \pmod 2$ nebo $a \equiv b \pmod 3$.
Poznámka: Pro správnou práci s relací je třeba korektně interpretovat definici. Pro konkrétní dvojici a, b se otázka „jsou spolu v relaci¿' překládá do podoby: „je pravda, že $a \equiv b \pmod 2$ nebo $a \equiv b \pmod 3$¿'
Výběr mezi dvojkou a trojkou tedy není nějaký centrální jednou pro vždy, ale dělá se pro každou dvojici a, b znovu, volba je tedy individuální a ptáme se, zda to „nebo" lze zařídit, ne že si jedno z čísel 2,3 vybereme a chceme jej.

2. Na množině konečných řetězců písmen malé latinské abecedy (tedy „slov") zavedeme následující relaci: $\alpha\mathcal{R}\beta$ právě tehdy, když řetězec β vznikl tak, že se přidala písmena před řetězec nebo za řetězec α (přičemž připouštíme i možnost přidání žádných písmen).
Například „tema" je v relaci s „matematika", nebo „abc" je v relaci s „abcde".
a) Nakreslete Hasseův diagram pro množinu {au,auto,automobil,to,mobil} uspořádanou relací $\mathcal{R}$.
b) Určete největší prvek, maxima, nejmenší prvek a minima, pokud existují.
c) Najděte nějakou linearizaci.

3. Krátký bonusový příklad pro pilné:
Uvažujte množinu A uspořádaných trojic (r, t, s), kde
r je přirozené číslo $1, 2 \dots, 9$ (ročník);
t je velké písmeno $A, B, C, \dots$ (třída);
s je řetězec písmen (příjmení studenta).
V první souřadnici řadíme dle velikosti čísla, v druhé a třetí souřadnici řadíme dle abecedy. Podle teorie je lexikografické uspořádání lineární, a množinu A je tedy možné seřadit do jednoho řetízku.
Ukažte toto seřazení (tedy vlastně Hasseův diagram), pokud se množina A skládá z těchto trojic:
(5,A,Alda), (7,B,Cody), (6,C,Ego), (5,B,Fink), (7,A,Job), (5,A,Klen), (7,B,Mold), (5,A,Nub).

Řešení:

1. K úspěchu je zejména potřeba si ujasnit, že to, zda dělíme dvojkou či trojkou, si svobodně vybírá každá dvojice čísel, která se snaží být v relaci. Logicky vzato se musíme vypořádat s komplikací zvanou logická disjunkce (nebotítko).

Reflexivita: Rozbor: Chceme čtenáře přesvědčit, že $a\mathcal{R}a$, tedy že $2 \mid (a-a)$ nebo $3 \mid (a-a)$. To vypadá dost jasně, a zde dokonce disjunkce pomáhá, protože na to, abychom ji splnili, stačí potvrdit jednu ze dvou vlastností. Já si vyberu číslo bližší třináctce.

Při psaní důkazu si musíme dát pozor, aby vedl od něčeho známého (není tu předpoklad) k tomu, co chceme.

Závěr: Platí. Dk: Libovolné $a \in \mathbb{Z}$. Platí: $a - a = 0$ je dělitelné trojkou. Proto $a\mathcal{R}a$.

Symetrie: Platí. Dk: Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$ splňují $a\mathcal{R}b$. Pak jsou dvě možnosti.
1. 2 dělí $b - a$. Pak ovšem také 2 dělí $-(b-a) = a - b$ a tedy $b\mathcal{R}a$.
2. 3 dělí $b - a$. Pak ovšem také 3 dělí $-(b-a) = a - b$ a tedy $b\mathcal{R}a$.

Každopádně $b\mathcal{R}a$ a důkaz je hotov.

Poznámka: Na rozdíl od reflexitivy si teď variantu nevybíráme my, ale ta dvě čísla z našeho předpokladu. Proto musíme obě možnosti pokrýt.

Kdybych psal tužkou, nakreslím od $a\mathcal{R}b$ dvě šipky, kterými proud důkazu rozdvojím, a případy 2, 3 bych dělal paralelně ve dvou sloupečcích, abych je nakonec zase spojil do závěru $b\mathcal{R}a$.

Antisymetrie: Neplatí. Dk: Uvažujme $a = 13$, $b = 23$. Pak $b - a = 10$ je dělitelné dvěma, stejně jako $a - b = -10$, tedy $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$, ale neplatí $a = b$.

Tranzitivita: neplatí. Dk: Uvažujme $a = 2$, $b = 4$, $c = 13$. Pak $2\mathcal{R}4$ neboť 2 dělí $4 - 2 = 2$, také $4\mathcal{R}13$ neboť 3 dělí $13 - 4 = 9$, ale neplatí $2\mathcal{R}13$, neboť $13 - 2 = 11$ není dělitelné ani dvěma, ani třemi.

Poznámka: Asi mnozí jako já zkusili nejprve důkaz napsat. Začíná takto:

Předpoklad: $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}c$. Pak máme

$$[2 \mid (b-a) \vee 3 \mid (b-a)] \wedge [2 \mid (c-b) \vee 3 \mid (c-b)].$$

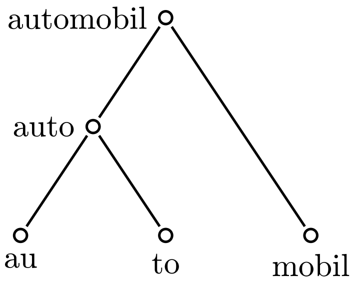
Všimněte si, že logické spojky teď nejsou stejné, a proto nemohu výraz přerovnávat! Jeho význam je, že dvojice (a, b) si svobodně vybírá, zda půjde cestou 2 či 3, a stejně tak si svobodně vybírá dvojice (b, c). Z toho vyplývá, že je třeba ošetřit v důkazu celkem čtyři možné varianty. Kdo má smůlu a začne variantou $2, 2$ a $3, 3$, tak zjistí, že pro ně tranzitivita funguje. Například takto pro dvojku:

$$[b - a = 2k \wedge c - b = 2l,\ k, l \in \mathbb{Z}] \implies c - a = 2(k + l) \implies a\mathcal{R}c.$$

Pak zkusí smíšený případ a zjistí, že tranzitivita nefunguje (vznikne nepříjemné $2k + 3l$). Pak už se snadno najde protipříklad.

Není to RAT, tedy to není částečné uspořádání.

2.



Největší prvek a maximum je „automobil“.

Nejmenší prvek neexistuje. Minima jsou „au“, „to“, „mobil“.

Linearizace: třeba au$\prec_L$to$\prec_L$auto$\prec_L$mobil$\prec_L$automobil

3. Princip lexikografického uspoádání: Porovnáváme dvě trojice. Pokud první souřadnice rozhodne, máme hotovo. Pokud je v první souřadnici remíza a rozhodne druhá, máme hotovo. Pokud je na prvních dvou souřadnicích remíza, rozhodne třetí.

(5,A,Alda)$\prec$(5,A,Klen)$\prec$(5,A,Nub)$\prec$(5,B,Fink)$\prec$(6,C,Ego)$\prec$(7,A,Job)$\prec$(7,B,Cody)$\prec$(7,B,Mold).