

DMA Domáci úkol č. 7A

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 8.

1. Uvažujte následující relaci na \mathbb{Z} :

$a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $b - a$ je dělitelné dvěma nebo třemi.

Vyšetřete, zda splňuje základní čtyři vlastnosti (reflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita).

Je to částečné uspořádání?

Poznámka: Při přemýšlení může pomoci alternativní definice:

$a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $a \equiv b \pmod{2}$ nebo $a \equiv b \pmod{3}$.

Poznámka: Pro správnou práci s relací je třeba korektně interpretovat definici. Pro konkrétní dvojici a, b se otázka „jsou spolu v relaci?“ překládá do podoby:

„je pravda, že $a \equiv b \pmod{2}$ nebo $a \equiv b \pmod{3}$?“

Výběr mezi dvojkou a trojkou tedy není nějaký centrální jednou pro vždy, ale dělá se pro každou dvojici a, b znovu, volba je tedy individuální a ptáme se, zda to „nebo“ lze zařídit, ne že si jedno z čísel 2,3 vybereme a chceme jej.

2. Na množině konečných řetězců písmen malé latinské abecedy (tedy „slov“) zavedeme následující relaci: $\alpha\mathcal{R}\beta$ právě tehdy, když řetězec β vznikl tak, že se přidala písmena před řetězec nebo za řetězec α (přičemž připouštíme i možnost přidání žádných písmen).

Například „tema“ je v relaci s „matematika“, nebo „abc“ je v relaci s „abcde“.

a) Nakreslete Hasseův diagram pro množinu {au,auto,automobil,to,mobil} uspořádanou relací \mathcal{R} .

b) Určete největší prvek, maxima, nejmenší prvek a minima, pokud existují.

c) Najděte nějakou linearizaci.

3. Krátký bonusový příklad pro pilné:

Uvažujte množinu A uspořádaných trojic (r, t, s) , kde

r je přirozené číslo $1, 2, \dots, 9$ (ročník);

t je velké písmeno A, B, C, \dots (třída);

s je řetězec písmen (příjmení studenta).

V první souřadnici řadíme dle velikosti čísla, v druhé a třetí souřadnici řadíme dle abecedy. Podle teorie je lexikografické uspořádání lineární, a množinu A je tedy možné seřadit do jednoho řetězku.

Ukažte toto seřazení (tedy vlastně Hasseův diagram), pokud se množina A skládá z těchto trojic:

$(5, A, Alda), (7, B, Cody), (6, C, Ego), (5, B, Fink), (7, A, Job), (5, A, Klen), (7, B, Mold), (5, A, Nub)$.

Zkouškový speciál výpočetní (doporučeno):

a) Nakreslete Hasseův diagram pro množinu $A = \{2, 4, 6, 12, 24, 36\}$ uspořádanou relací dělitelnosti, tedy $a\mathcal{R}b$ jestliže a dělí b .

Najděte její maximum, minimum, největší a nejmenší prvek, pokud existují.

Najděte nějaké lineární rozšíření této uspořádané množiny.