DMA Domácí úkol č. 7B

Tento úkol vypracujte po přednášce a před cvičením, na druhé straně je řešení.
Pokud vám něco není jasné, zeptejte se na cvičení nebo na konzultaci.

1. Pro řetězec písmen w definujeme jeho délku $l(w)$ jako počet znaků.
Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na množině A konečných řetězců (třeba latinské abecedy, ale klidně si zkuste i jinou) danou předpisem

$$w_1 \mathcal{R} w_2 \iff l(w_1) = l(w_2),$$

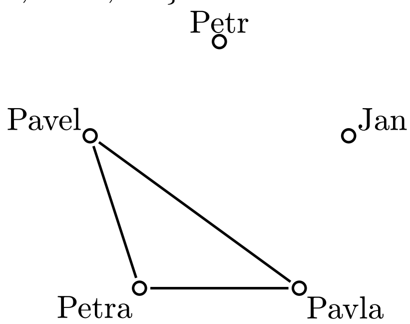
tedy porovnáváme řetězce podle jejich délky.
a) Dokažte, že tato relace je ekvivalence.
b) Vyberte si z kalendáře pět jmen (náhodně či řízeně). Pro tuto množinu řetězců nakreslete graf relace $\mathcal{R}$ a vypište komponenty. Napište rozklad množiny odpovídající této relaci.

Poznámka: Když kreslíme graf ekvivalence, tak pro zjednodušení nekreslíme smyčky a namísto obousměrných šipek tam a zpět prostě kreslíme spojnice.

2. Dokažte indukcí, že pro $n \in \mathbb{N}$ je $\sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$.
Poznámka: Může pro vás být jednodušší to vidět jako $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ krát}} = n$.

Řešení:

1. a) Dokážeme reflexivitu, symetrii a tranzitivitu, rovnou pro relaci na celých čísel, je to stejná práce, pak to platí i pro všechny podmnožiny.
R: Nechť $w \in \mathbb{Z}$. $l(w) = l(w)$ a tedy $w\mathcal{R}w$.
S: Nechť $w_1, w_1 \in \mathbb{Z}$. Jestliže $w_1\mathcal{R}w_2$, pak $l(w_1) = l(w_2)$, proto i $l(w_2) = l(w_1)$ a tedy $w_2\mathcal{R}w_1$.
T: Nechť $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{Z}$. Jestliže $w_1\mathcal{R}w_2$ a $w_2\mathcal{R}w_3$, pak $l(w_1) = l(w_2)$ a $l(w_2) = l(w_3)$. Proto i $l(w_1) = l(w_3)$ a tedy $w_1\mathcal{R}w_2$.
b) Vybral jsem $A = \{$Petr,Pavel,Petra,Pavla,Jan$\}$.



Komponenty:
$[\text{Petr}]_\mathcal{R} = \{\text{Petr}\}$,
$[\text{Pavel}]_\mathcal{R} = [\text{Petra}]_\mathcal{R} = [\text{Pavla}]_\mathcal{R} = \{\text{Pavel,Petra,Pavla}\}$,
$[\text{Jan}]_\mathcal{R} = \{\text{Jan}\}$.
Rozklad:

$$\{\text{Petr,Pavel,Petra,Pavla,Jan}\} = \{\text{Petr}\} \cup \{\text{Pavel,Petra,Pavla}\} \cup \{\text{Jan}\}.$$

2. Použije se definice sumy: (0) $\sum\limits_{k=1}^{1} a_k = a_1$; (1) $\sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k = a_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$
Důkaz: (0) Jestliže $n = 1$, tak určitě $1 = 1$.
(1) $n \in \mathbb{N}$ libovolné, předpoklad: $\sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$. Pak $\sum\limits_{k=1}^{n+1} 1 = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 + 1 \overset{\text{IP}}{=} n + 1$.
Je také možné psát v indukčním kroku

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ krát}} = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ krát}} + 1 \overset{\text{IP}}{=} n + 1.$$