

DMA Domáci úkol č. 7B

Tento úkol vypracujte po přednášce a před cvičením, na druhé straně je řešení.
Pokud vám něco není jasné, zeptejte se na cvičení nebo na konzultaci.

1. Pro řetězec písmen w definujeme jeho délku $l(w)$ jako počet znaků.

Uvažujme relaci \mathcal{R} na množině A konečných řetězců (třeba latinské abecedy, ale klidně si zkuste i jinou) danou předpisem

$$w_1 \mathcal{R} w_2 \iff l(w_1) = l(w_2),$$

tedy porovnáváme řetězce podle jejich délky.

a) Dokažte, že tato relace je ekvivalence.

b) Vyberte si z kalendáře pět jmen (náhodně či řízeně). Pro tuto množinu řetězců nakreslete graf relace \mathcal{R} a vypište komponenty. Napište rozklad množiny odpovídající této relaci.

Poznámka: Když kreslíme graf ekvivalence, tak pro zjednodušení nekreslíme smyčky a namísto obousměrných šipek tam a zpět prostě kreslíme spojnice.

2. Který z následujících důkazů rovnosti $n - n = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$ je správným důkazem indukcí?

a) (0) $n = 1$: $1 - 1 = 0$ OK.

(1) $n \geq 1$, IP: $n - n = 0$. Pak $(n + 1) - (n + 1) = (n + 1) \cdot (1 - 1) = (n + 1) \cdot 0 = 0$.

b) (0) $n = 1$: $1 - 1 = 0$ OK.

(1) $n \geq 1$. Pak $(n + 1) - (n + 1) = n - n = 0$ dle IP.

c) (0) $n = 1$: $1 - 1 = 0$ OK.

(1) $n \geq 1$, IP: $n - n = 0$. Pak $(n + 1) - (n + 1) = n - n = 0$ dle IP.

d) (1) $n \geq 1$, IP: $n - n = 0$. Pak $(n + 1) - (n + 1) = n - n = 0$ dle IP.

Řešení:

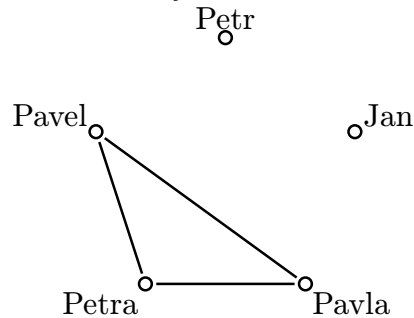
1. a) Dokážeme reflexivitu, symetrii a tranzitivitu, rovnou pro relaci na celých čísel, je to stejná práce, pak to platí i pro všechny podmnožiny.

R: Nechť $w \in \mathbb{Z}$. $l(w) = l(w)$ a tedy $w\mathcal{R}w$.

S: Nechť $w_1, w_2 \in \mathbb{Z}$. Jestliže $w_1\mathcal{R}w_2$, pak $l(w_1) = l(w_2)$, proto i $l(w_2) = l(w_1)$ a tedy $w_2\mathcal{R}w_1$.

T: Nechť $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{Z}$. Jestliže $w_1\mathcal{R}w_2$ a $w_2\mathcal{R}w_3$, pak $l(w_1) = l(w_2)$ a $l(w_2) = l(w_3)$. Proto i $l(w_1) = l(w_3)$ a tedy $w_1\mathcal{R}w_3$.

b) Vybral jsem $A = \{\text{Petr}, \text{Pavel}, \text{Petra}, \text{Pavla}, \text{Jan}\}$.



Komponenty:

$[\text{Petr}]_{\mathcal{R}} = \{\text{Petr}\}$,

$[\text{Pavel}]_{\mathcal{R}} = [\text{Petra}]_{\mathcal{R}} = [\text{Pavla}]_{\mathcal{R}} = \{\text{Pavel}, \text{Petra}, \text{Pavla}\}$,

$[\text{Jan}]_{\mathcal{R}} = \{\text{Jan}\}$.

Rozklad:

$$\{\text{Petr}, \text{Pavel}, \text{Petra}, \text{Pavla}, \text{Jan}\} = \{\text{Petr}\} \cup \{\text{Pavel}, \text{Petra}, \text{Pavla}\} \cup \{\text{Jan}\}.$$

2. Správná odpověď je c).

a) Nepoužil se IP, takže to není důkaz indukci.

b) Není napsáno, co je IP.

d) Chybí základní krok.