

## DMA Domáci úkol č. 8A

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 9.

1. Nechť  $A$  je množina předmětů vyučovaných katedrou matematiky. Definujeme relaci  $\mathcal{R}$  na  $A$  takto: Předměty  $X, Y$  jsou v relaci, pokud se shodují první písmena jejich oficiálních třípísmenných zkratk.

a) Dokažte, že  $\mathcal{R}$  je ekvivalence.

b) Najděte  $[\text{DMA}]_{\mathcal{R}}$  neboli třídu ekvivalence příslušnou předmětu Diskrétní matematika.

Tip: V důkazu se může hodit zavést si pro předmět  $p$  (reprezentovaný jako třípísmenná zkratka) značení  $p[0]$  pro první písmeno.

2. Dokažte indukcí, že pro  $n \in \mathbb{N}$  je  $\sum_{k=1}^n 0 = 0$ .

Poznámka: Může pro vás být jednodušší to vidět jako  $\underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{n \text{ krát}} = 0$ .

Zkouškový speciál výpočetní (doporučeno):

a) Dokažte indukcí, že pro  $n \in \mathbb{N}$  je  $\sum_{k=1}^n 1 = n$ .

Poznámka: Může pro vás být jednodušší to vidět jako  $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ krát}} = n$ .

Zkouškový speciál důkazový (pokročilejší mohou zkusit teď nebo před zkouškou):

a) Nechť  $\mathcal{R}, \mathcal{S}$  jsou relace na  $A$ . Dokažte: Je-li  $\mathcal{R}$  reflexivní, tak je i  $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$  reflexivní.

Další viz písemkový speciál v DÚ10A, tvrzení s průnikem a sjednocením.

### Řešení:

1. a) Reflexivita: Pro každé  $p \in A$  platí  $p[0] = p[0]$ , proto  $p\mathcal{R}p$ .

Symetrie: Pro  $p, q \in A$  nechť  $p\mathcal{R}q$ . Pak  $p[0] = q[0]$ , ze symetrie rovnosti  $q[0] = p[0]$  a tedy  $q\mathcal{R}p$ .

Tranzitivita:  $p_1, p_2, p_3 \in A$ ,

$[p_1\mathcal{R}p_2 \wedge p_2\mathcal{R}p_3] \longrightarrow [p_1[0] = p_2[0] \wedge p_2[0] = p_3[0]] \longrightarrow p_1[0] = p_3[0] \longrightarrow p_1\mathcal{R}p_3$ .

b) Dle definice:  $[\text{DMA}]_{\mathcal{R}} = \{p \in A : p[0] = \text{D}\}$ .

V této chvíli je  $[\text{DMA}]_{\mathcal{R}} = \{\text{DEN, DMA, DMG, DRN}\}$ , zítra to může být jinak.

2. Použije se definice sumy: (0)  $\sum_{k=1}^1 a_k = a_1$ ; (1)  $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1}$

Důkaz: (0)  $n = 1$ : určitě  $0 = 0$ .

(1)  $n \in \mathbb{N}$  libovolné, předpoklad:  $\sum_{k=1}^n 0 = 0$ .

Pak  $\sum_{k=1}^{n+1} 0 = \sum_{k=1}^n 0 + 0 \stackrel{\text{IP}}{=} 0 + 0 = 0$ .

Je také možné psát v indukčním kroku

$$\underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{n+1 \text{ krát}} = \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{n \text{ krát}} + 0 \stackrel{\text{IP}}{=} 0 + 0 = 0.$$

Zkouškový speciál výpočetní:

a) Použije se definice sumy: (0)  $\sum_{k=1}^1 a_k = a_1$ ; (1)  $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_1 + \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1}$

Důkaz: (0) Jestliže  $n = 1$ , tak určitě  $1 = 1$ .

(1)  $n \in \mathbb{N}$  libovolné, předpoklad:  $\sum_{k=1}^n 1 = n$ . Pak  $\sum_{k=1}^{n+1} 1 = \sum_{k=1}^n 1 + 1 \stackrel{\text{IP}}{=} n + 1$ .

Je také možné psát v indukčním kroku

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1 \text{ krát}} = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ krát}} + 1 \stackrel{\text{IP}}{=} n + 1.$$

Zkouškový speciál důkazový:

a) Používají se množinové operace, proto je lepší jazyk množin.

Předpoklad (P):  $\forall a \in A: (a, a) \in \mathcal{R}$ .

Ukážeme reflexivitu pro  $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ :

Nechť  $a \in A$ . Podle (P) pak  $(a, a) \in \mathcal{R}$ , tudíž také  $(a, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ .

Hotovo.

Vlastně se použilo to, že  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ . Stejný postup by tedy dokázal následující:

Je-li  $\mathcal{R}$  reflexivní a  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ , pak je  $\mathcal{S}$  reflexivní.