DMA Domácí úkol č. 8B

Tento úkol vypracujte po přednášce a před cvičením, na druhé straně je řešení.
Pokud vám něco není jasné, zeptejte se na cvičení nebo na konzultaci.

1. Uvažujte funkci zadanou induktivně těmito pravidly:
(0) $f(1) = 1$, $f(2) = 2$.
(1) $f(n+1) = 2f(n) - f(n-1)$ pro $n \geq 2$.
Spočítejte několik prvních hodnot této funkce, tedy $f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots$ a to tolik, abyste uměli tipnout explicitní vzorec pro $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. No a pak si tipněte.

2. Napište induktivní definici množiny všech kladných lichých čísel.

Bonus: Který z následujících důkazů nerovnosti $2^n > 1$ pro $n \in I\!N$ je správným důkazem silnou indukcí?

a) (0) $n = 1$: $2^1 = 2 > 1$ OK. $n = 2$: $2^2 = 4 > 1$
(1) $n \geq 5$, IP: $2^n > 1$, $2^{n-1} > 1$. Pak $2^{n+1} = 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} \overset{\text{IP}}{>} 1 + 2 \cdot 1 = 3 > 1$.

b) (0) $n = 1$: $2^1 = 2 > 1$ OK. $n = 2$: $2^2 = 4 > 1$ OK.
(1) $n \geq 2$, IP: $2^n > 1$, $2^{n-1} > 1$. Pak $2^{n+1} = 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} \overset{\text{IP}}{>} 1 + 2 \cdot 1 = 3 > 1$.

c) (0) $n = 1$: $2^1 = 2 > 1$ OK. $n = 2$: $2^2 = 4 > 1$ OK.
(1) $n \geq 2$, IP: $2^n > 1$. Pak $2^{n+1} = 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} \overset{\text{IP}}{>} 1 + 2 \cdot 1 = 3 > 1$.

d) (0) $n = 1$: $2^1 = 2 > 1$ OK.
(1) $n \geq 2$, IP: $2^n > 1$, $2^{n-1} > 1$. Pak $2^{n+1} = 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} \overset{\text{IP}}{>} 1 + 2 \cdot 1 = 3 > 1$.

Řešení:
1. Máme:
$f(1) = 1$
$f(2) = 2$
$f(3) = 2f(2) - f(1) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$
$f(4) = 2f(3) - f(2) = 2 \cdot 3 - 2 = 4$
$f(5) = 2f(4) - f(3) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$
Clověk by skoro řekl, že $f(n) = n$.

2. Nejjednodušší je toto:
(0) $1 \in M$.
(1) $n \in M \implies n + 2 \in M$.

Bonus: Správná odpověď je b).
a) Indukční krok začíná až od $n = 5$, jehož IP nemáme ověřen.
c) V kroku $n + 1$ se použil vzorec pro $n - 1$, který ale chybí v IP.
d) V základním kroku je jen jeden údaj, ale v IP jsou potřeba dva.