DMA Domácí úkol č. 9A

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 10.

1. Uvažujte funkci zadanou $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ a $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1)$ pro $n \in \mathbb{N}$.
a) Spočítejte několik prvních hodnot této funkce a odhadněte obecný vzorec pro $f(n)$
b) Dokažte indukcí, že váš odhadnutý vzorec je správně.

2. Uvažujte funkci zadanou $f(1) = 0$ a $f(n+1) = f(n) + n$ pro $n \in \mathbb{N}$.
Dokažte indukcí, že takto zadaná funkce splňuje nerovnost $f(n) \le n^2$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Bonus:
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na A. Dokažte:
Je-li $\mathcal{R}$ antisymetrická, tak je i $\mathcal{R}^{-1}$ antisymetrická.
Použijte strukturu důkazu, kdy je závěr brán jako cesta.

Řešení:

1. a) $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = f(1) + 2f(0) = 4$, $f(3) = f(2) + 2f(1) = 8$, tipujeme $f(n) = 2^n$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.
b) Správnost tohoto vzorce dokážeme indukcí.
Rozbor: V kroku (1) musíme zjistit, kolik je $f(n+1)$. Jediný známý vzorec je ten z definice $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1)$. Abychom je mohli využít, musíme znát $f(n)$ a $f(n-1)$, takže tyto dva vzorce musí přijít do IP.
Když jsou v IP dva vzorce, pak musí být také dva v (0), abychom ukázali, že IP lze někdy splnit. Jdeme na to.
(0) Pro $n = 0$ a $n = 1$ to platí: $f(0) = 1 = 2^0$, $f(1) = 2 = 2^1$.
Poznámka: V obou zápisech pro f je první rovnítko dané v zadání, druhým ověříme shodu s uhodnutým vzorcem.
(1) Nechť $n \in \mathbb{N}$ libovolné. Předpokládejme, že $f(n) = 2^n$ a $f(n-1) = 2^{n-1}$.
Pak podle definice f a pak předpokladu máme

$$f(n+1) = f(n) + 2f(n-1) \overset{\text{IP}}{=\!=} 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}.$$

Důkaz je hotov.

Poznámka: IP $f(n) = 2^n$ se dělá pro konkrétní zvolené n, proto tento vzorec nelze v kroku (1) použít pro $f(n-1)$ ani $f(n+1)$, protože $n \pm 1$ jsou už jiná čísla než n. Slabá indukce tedy neprojde.
Když v kroku (1) zvolíme nejmenší možné $n = 1$, tak se v IP mluví o $f(1)$ a o $f(0)$ a přesně tyto dvě hodnoty jsme potvrdili v (0), takže tento IP byl naplněn.

FAQ: Jak můžu do f dosazovat nulu, když je v zadání uvedeno „pro $n \in \mathbb{N}$“?
A: Ta specifikace se týká jen té induktivní rovnice, říká nám, pro jaká n ji máme k dispozici. Navazuje to správně, protože nejmenší možné n v této specifikaci vede na rovnici

$$f(2) = f(1) + 2f(0)$$

a vidíme, že se tím pádem existence $f(0)$ očekává. Pokud bychom u té rovnice dali specifikaci „pro $n \ge 0$”, tak by také mohla vzniknout rovnice $f(1) = f(0) + 2f(-1)$ a máme problém.

2. (0): Pro $n = 1$: $f(1) = 0 \le 1^2$.
(1) Nechť $n \in \mathbb{N}$, IP: $f(n) \le n^2$.
Pak $f(n+1) = f(n) + n \overset{\text{IP}}{\le} n^2 + n \underset{[n+1>0]}{\le} n^2 + n + (n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.
Poznámky:
- To, co se v důkazu indukcí dělá, se vždy odvíjí od toho, co dokazujeme, takže žádanou nerovnost $f(n) \le n^2$ musí být vidět v kroku (0), v indukčním předpokladu a v hlavním výpočtu. Naopak tam nesmí být něco odjinud, třeba $f(n+1) = f(n) + n$ není indukční předpoklad, ale fakt, který nám byl sdělen a je k volnému použití kdekoliv a kdykoliv v našem řešení, tedy i v indukci.

• Někteří se snažili najít pro f vzorec. Dá se to, třeba $f(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$, ale je to zbytečné. Konec konců, stačí malá změna v zadání a vzorec vůbec najít nepůjde, ale pořád je možnost, že i tak budeme umět dokázat nějaké vlastnosti indukcí, aniž bychom vlastně ten vzorec znali.

Bonus: Dk: Předpoklad: $\mathcal{R}^{-1}$ antisymetrická. Dokážeme: $\mathcal{R}$ antisymetrická.
Rozbor: Aby byla relace $\mathcal{R}$ antisymetrická, musí pro všechna $a, b \in A$ splňovat podmínku
$[(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \in \mathcal{R}] \implies a = b$, popřípadě $[a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a] \implies a = b$ dle preferovaného značení.
My toto víme o relaci $\mathcal{R}$. Musíme ovšem čtenáře přesvědčit, že platí stejná podmínka aplikovaná na relaci $\mathcal{R}^{-1}$, tedy musíme ukázat, že platí
$[a\mathcal{R}^{-1}b \wedge b\mathcal{R}^{-1}a] \implies a = b$.
Jdeme na to:
Dk: Předpoklad: $\mathcal{R}$ antisymetrická. Dokážeme: $\mathcal{R}^{-1}$ antisymetrická.
Vezměme libovolné $\underline{a, b \in A}$ splňující $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}}$ a $\underline{(b,a) \in \mathcal{R}^{-1}}$. Pak $(b,a) \in \mathcal{R}$ a $(a,b) \in \mathcal{R}$, díky antisymetrii $\mathcal{R}$ je tedy $b = a$ neboli $\underline{a = b}$.

Poznámka: Je také možné udělat kroky
$\underline{[a\mathcal{R}^{-1}b \wedge b\mathcal{R}^{-1}a]} \longrightarrow [b\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}b] \longrightarrow [a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a] \longrightarrow \underline{a = b}$.
Všimněte si, že jsme v druhém kroku neměnili pořadí prvků v relacích, ale použili komutativitu logické konjunkce $\wedge$.
V důkazu jsem dával pozor na přesný zápis antisymetrie, tedy že v rovnosti je stejné pořadí prvků jako v první relaci předpokladu. Je to podstatné? Z hlediska logiky samozřejmě ano, ale z hlediska praktického matematického života by to lidé obvykle neřešili, protože stejně víme, že v rovnosti na pořadí nezáleží. Takže bych to bral i takto:
$[a\mathcal{R}^{-1}b \wedge b\mathcal{R}^{-1}a] \longrightarrow [b\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}b] \longrightarrow a = b$.

Poznámka: Je také možné použít náš tradiční jednodušší přímý postup od předpokladu k závěru:
Předpoklad: $\mathcal{R}$ antisymetrická $\longrightarrow (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \implies a = b$.
Relace v předpokladu přepíšeme dle definice $\mathcal{R}^{-1}$ a dostaneme
$(b\mathcal{R}^{-1}a \wedge a\mathcal{R}^{-1}b) \implies a = b$. Díky komutativitě $\wedge$ pak
$(a\mathcal{R}^{-1}b \wedge b\mathcal{R}^{-1}a) \implies a = b$ a tedy $\mathcal{R}^{-1}$ je antisymetrická.
Tento typ důkazu má dvě nevýhody: Vyžaduje nějak logicky odůvodnit přechod od jednoho logického výroku v jiný, což vyžaduje určitou zkušenost. Zásadnější problém je, že selhává v komplikovanějších situacích, zejména v těch, kdy předpoklad a závěr nemají téměř stejnou logickou strukturu jako zde. Proto jsem v zadání chtěl, ať si procvičíte novou strukturu důkazu, která je výrazně flexibilnější.

Častá chyba: V DU a někdy i u zkoušky vidím toto:
P: $\mathcal{R}$ antisymetrická.
$(a,b) \in \mathcal{R}^{-1} \longrightarrow (b,a) \in \mathcal{R} \xrightarrow{\text{P}} a = b. \qquad (*)$
Proto $\mathcal{R}^{-1}$ antisymetrická.
Dva problémy. První je, že z $(*)$ nevyplývá antisymetrie, ta totiž nevypadá takto:
$(a,b) \in \mathcal{R}^{-1} \implies a = b$ ale jinak.

Druhý problém je, že samotná úvaha $(*)$ je chybná, jmenovitě krok $(b,a) \in \mathcal{R} \xrightarrow{\text{P}} a = b$. Antisymetrie $\mathcal{R}$ se totiž neumí dostat k $a = b$ za pomocí $(b,a) \in \mathcal{R}$, potřebuje k tomu dva kousky dat.