DMA Domácí úkol č. 9a

Tento úkol vypracujte po přednášce a před cvičením, na druhé straně je řešení.
Pokud vám něco není jasné, zeptejte se na cvičení nebo na konzultaci.

1. Dokažte indukcí, že pro $n \in \mathbb{N}$ je $\sum\limits_{k=1}^{n} 0 = 0$.

Poznámka: Může pro vás být jednodušší to vidět jako $\underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n \text{ krát}} = 0$.

2. Nechť $\mathcal{R}$ je relace na A. Dokažte: Je-li $\mathcal{R}^{-1}$ tranzitivní, tak je i $\mathcal{R}$ tranzitivní.
Použijte novou strukturu důkazu.

Řešení:

1. Použije se definice sumy: (0) $\sum\limits_{k=1}^{1} a_k = a_1$; $\quad$ (1) $\sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k = a_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$

Důkaz: (0) Jestliže $n = 1$, tak určitě $0 = 0$.

(1) $n \in \mathbb{N}$ libovolné, předpoklad: $\sum\limits_{k=1}^{n} 0 = 0$. Pak $\sum\limits_{k=1}^{n+1} 0 = \sum\limits_{k=1}^{n} 0 + 0 \overset{\text{IP}}{=\!=} 0 + 0 = 0$.

Je také možné psát v indukčním kroku

$$\underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n+1 \text{ krát}} = \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n \text{ krát}} + 0 \overset{\text{IP}}{=\!=} 0 + 0 = 0.$$

2. Předpoklad: $\mathcal{R}^{-1}$ tranzitivní.
Vezměme libovolné $\underline{a, b, c \in A}$ splňující $\underline{(a, b) \in \mathcal{R}}$ a $\underline{(b, c) \in \mathcal{R}}$. Dle definice $\mathcal{R}^{-1}$ pak máme $(b, a) \in \mathcal{R}^{-1}$ a $(c, b) \in \mathcal{R}^{-1}$, díky tranzitivitě $\mathcal{R}^{-1}$ je $(c, a) \in \mathcal{R}^{-1}$ a proto $\underline{(a, c) \in \mathcal{R}}$.
Ukázali jsme, že $\mathcal{R}$ je tranzitivní.