

## DMA Domáci úkol č. 9A

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 10.

1. Uvažujte funkci zadanou  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$  a  $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1)$  pro  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Spočítejte několik prvních hodnot této funkce a odhadněte obecný vzorec pro  $f(n)$

b) Dokažte indukci, že váš odhadnutý vzorec je správně.

2. Uvažujte funkci zadanou  $f(1) = 0$  a  $f(n+1) = f(n) + n$  pro  $n \in \mathbb{N}$ .

Dokažte indukci, že takto zadaná funkce splňuje nerovnost  $f(n) \leq n^2$  pro  $n \in \mathbb{N}$ .

Zkouškový speciál důkazový (pokročilejší mohou zkusit teď nebo před zkouškou):

a) Nechť  $\mathcal{R}$  je relace na  $A$ . Dokažte:

Je-li  $\mathcal{R}$  antisymetrická, tak je i  $\mathcal{R}^{-1}$  antisymetrická.

Použijte strukturu důkazu, kdy je závěr brán jako cesta.

Další viz písemkový speciál v DÚ10A, tvrzení s podmnožinou a inverzní relací.

### Řešení:

1. a)  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = f(1) + 2f(0) = 4$ ,  $f(3) = f(2) + 2f(1) = 8$ , tipujeme  $f(n) = 2^n$  pro  $n \in \mathbb{N}_0$ .

b) Správnost tohoto vzorce dokážeme indukci.

Rozbor: V kroku (1) musíme zjistit, kolik je  $f(n+1)$ . Jediný známý vzorec je ten z definice  $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1)$ . Abychom je mohli využít, musíme znát  $f(n)$  a  $f(n-1)$ , takže tyto dva vzorce musí přijít do IP.

Když jsou v IP dva vzorce, pak musí být také dva v (0), abychom ukázali, že IP lze někdy splnit. Jdeme na to.

(0) Pro  $n = 0$  a  $n = 1$  to platí:  $f(0) = 1 = 2^0$ ,  $f(1) = 2 = 2^1$ .

Poznámka: V obou zápisech pro  $f$  je první rovnítko dané v zadání, druhým ověříme shodu s uhodnutým vzorcem.

(1) Nechť  $n \in \mathbb{N}$  libovolné. Předpokládejme, že  $f(n) = 2^n$  a  $f(n-1) = 2^{n-1}$ .

Pak podle definice  $f$  a pak předpokladu máme

$$f(n+1) = f(n) + 2f(n-1) \stackrel{\text{IP}}{=} 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}.$$

Důkaz je hotov.

Poznámka: IP  $f(n) = 2^n$  se dělá pro konkrétní zvolené  $n$ , proto tento vzorec nelze v kroku (1) použít pro  $f(n-1)$  ani  $f(n+1)$ , protože  $n \pm 1$  jsou už jiná čísla než  $n$ . Slabá indukce tedy neprojde.

Když v kroku (1) zvolíme nejmenší možné  $n = 1$ , tak se v IP mluví o  $f(1)$  a o  $f(0)$  a přesně tyto dvě hodnoty jsme potvrdili v (0), takže tento IP byl naplněn.

FAQ: Jak můžu do  $f$  dosazovat nulu, když je v zadání uvedeno „pro  $n \in \mathbb{N}$ “?

A: Ta specifikace se týká jen té indukční rovnice, říká nám, pro jaká  $n$  ji máme k dispozici. Navazuje to správně, protože nejmenší možné  $n$  v této specifikaci vede na rovnici

$$f(2) = f(1) + 2f(0)$$

a vidíme, že se tím pádem existence  $f(0)$  očekává. Pokud bychom u té rovnice dali specifikaci „pro  $n \geq 0$ “, tak by také mohla vzniknout rovnice  $f(1) = f(0) + 2f(-1)$  a máme problém.

2. (0): Pro  $n = 1$ :  $f(1) = 0 \leq 1^2$ .

(1) Nechť  $n \in \mathbb{N}$ , IP:  $f(n) \leq n^2$ .

Pak  $f(n+1) = f(n) + n \stackrel{\text{IP}}{\leq} n^2 + n \underset{[n+1>0]}{\leq} n^2 + n + (n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ .

Poznámky:

• To, co se v důkazu indukci dělá, se vždy odvíjí od toho, co dokazujeme, takže žádanou nerovnost  $f(n) \leq n^2$  musí být vidět v kroku (0), v indukčním předpokladu a v hlavním výpočtu. Naopak tam

nesmí být něco odjinud, třeba  $f(n+1) = f(n) + n$  není indukční předpoklad, ale fakt, který nám byl sdělen a je k volnému použití kdekoliv a kdykoliv v našem řešení, tedy i v indukci.

• Někteří se snažili najít pro  $f$  vzorec. Dá se to, třeba  $f(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$ , ale je to zbytečné. Konec konců, stačí malá změna v zadání a vzorec vůbec najít nepůjde, ale pořád je možnost, že i tak budeme umět dokázat nějaké vlastnosti indukci, aniž bychom vlastně ten vzorec znali.

Zkouškový speciál výpočetní:

a) Předpoklad:  $\mathcal{R}^{-1}$  antisymetrická. Dokážeme:  $\mathcal{R}$  antisymetrická.

Rozbor: Aby byla relace  $\mathcal{R}$  antisymetrická, musí pro všechna  $a, b \in A$  splňovat podmínku

$[(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R}] \implies a = b$ , popřípadě  $[a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a] \implies a = b$  dle preferovaného značení.

My toto víme o relaci  $\mathcal{R}$ . Musíme ovšem čtenáře přesvědčit, že platí stejná podmínka aplikovaná na relaci  $\mathcal{R}^{-1}$ , tedy musíme ukázat, že platí

$[a\mathcal{R}^{-1}b \wedge b\mathcal{R}^{-1}a] \implies a = b$ .

Jdeme na to:

Dk: Předpoklad:  $\mathcal{R}$  antisymetrická. Dokážeme:  $\mathcal{R}^{-1}$  antisymetrická.

Vezmeme libovolné  $a, b \in A$  splňující  $(a, b) \in \mathcal{R}^{-1}$  a  $(b, a) \in \mathcal{R}^{-1}$ . Pak  $(b, a) \in \mathcal{R}$  a  $(a, b) \in \mathcal{R}$ , díky antisymetrii  $\mathcal{R}$  je tedy  $b = a$  neboli  $\underline{a = b}$ .

Poznámka: Je také možné udělat kroky

$[a\mathcal{R}^{-1}b \wedge b\mathcal{R}^{-1}a] \longrightarrow [b\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}b] \longrightarrow [a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a] \longrightarrow \underline{a = b}$ .

Všimněte si, že jsme v druhém kroku neměnili pořadí prvků v relacích, ale použili komutativitu logické konjunkce  $\wedge$ .

V důkazu jsem dával pozor na přesný zápis antisymetrie, tedy že v rovnosti je stejné pořadí prvků jako v první relaci předpokladu. Je to podstatné? Z hlediska logiky samozřejmě ano, ale z hlediska praktického matematického života by to lidé obvykle neřešili, protože stejně víme, že v rovnosti na pořadí nezáleží.

Takže bych to bral i takto:

$[a\mathcal{R}^{-1}b \wedge b\mathcal{R}^{-1}a] \longrightarrow [b\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}b] \longrightarrow a = b$ .

Poznámka: Je také možné použít náš tradiční jednodušší přímý postup od předpokladu k závěru:

Předpoklad:  $\mathcal{R}$  antisymetrická  $\longrightarrow (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \implies a = b$ .

Relace v předpokladu přepíšeme dle definice  $\mathcal{R}^{-1}$  a dostaneme

$(b\mathcal{R}^{-1}a \wedge a\mathcal{R}^{-1}b) \implies a = b$ . Díky komutativitě  $\wedge$  pak

$(a\mathcal{R}^{-1}b \wedge b\mathcal{R}^{-1}a) \implies a = b$  a tedy  $\mathcal{R}^{-1}$  je antisymetrická.

Tento typ důkazu má dvě nevýhody: Vyžaduje nějak logicky odůvodnit přechod od jednoho logického výroku v jiný, což vyžaduje určitou zkušenost. Zásadnější problém je, že selhává v komplikovanějších situacích, zejména v těch, kdy předpoklad a závěr nemají téměř stejnou logickou strukturu jako zde. Proto jsem v zadání chtěl, ať si procvičíte novou strukturu důkazu, která je výrazně flexibilnější.

Častá chyba: V DU a někdy i u zkoušky vidím toto:

P:  $\mathcal{R}$  antisymetrická.

$(a, b) \in \mathcal{R}^{-1} \longrightarrow (b, a) \in \mathcal{R} \xrightarrow{P} a = b$ . (\*)

Proto  $\mathcal{R}^{-1}$  antisymetrická.

Dva problémy. První je, že z (\*) nevyplývá antisymetrie, ta totiž nevypadá takto:

$(a, b) \in \mathcal{R}^{-1} \implies a = b$  ale jinak.

Druhý problém je, že samotná úvaha (\*) je chybná, jmenovitě krok  $(b, a) \in \mathcal{R} \xrightarrow{P} a = b$ . Antisymetrie  $\mathcal{R}$  se totiž neumí dostat k  $a = b$  za pomoci  $(b, a) \in \mathcal{R}$ , potřebuje k tomu dva kousky dat.