DMA Domácí úkol č. 9B

Tento úkol vypracujte po přednášce a před cvičením, na druhé straně je řešení.
Pokud vám něco není jasné, zeptejte se na cvičení nebo na konzultaci.

1. Pro následující zobrazení T odhadněte, zda jsou prostá, na, popřípadě bijekce. Nemusíte to dokazovat.
a) T: {nějaká množina lidí z ČR} $\mapsto \mathbb{N}$, T(člověk) = jeho rodné číslo.

b) T: {nenulové polynomy} $\mapsto \mathbb{N}_0$, $T(p) = \deg(p)$.

c) T: $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $T(a,b) = (b,a)$.

2. Uvažujte zobrazení T: $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}_0$ dané $T(n) = n^2$.
Rozhodněte, zda je toto zobrazení prosté a na. Své odpovědi dokažte.

Řešení:

1. a) T je doufejme prosté (v 90. letech se ukázalo, že není, byl to docela průšvih, ale snad už to spravili).
Protože jsou rodná čísla desetimístná, tak nikdo nemá rodné číslo 13. Takže T není na.
Není to bijekce.

b) T není prosté (a proto ani bijekce), protože třeba $T(x^2+1) = 2 = T(x^2)$.
T je na: Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ najdeme polynom, který pak T pošle na toto n, jmenovitě nějaký polynom stupně n. Například $T(x^n) = n$.

c) Tohle by měla být bijekce (prosté i na). Když ve dvou různých vektorech prohodím složky, tak budou zase různé. A ke každému vektoru $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ se umím dostat pomocí T, stačí začít s prohozeným vektorem (d, c).

2. Toto zobrazení není prosté, protože například $T(-1) = 1 = T(1)$, ale $-1 \neq$ v $\mathbb{Z}$.
Surjektivita: Toto zobrazení není na. Důkaz: Neexistuje $n \in \mathbb{Z}$ aby platilo $T(n) = 2$ neboli $n^2 = 2$.