DMA Domácí úkol č. 10A

Tento domácí úkol se neodevzdává.

1. U následujících zobrazení rozhodněte, zda jsou prostá a zda jsou na. Své odpovědi dokažte.

a) $T\colon \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $T(n) = 2n$;

b) $T\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, $T(m,n) = m \cdot n$;

c) $T\colon \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathcal{P}$, $T(a,b) = ax^2 + b$.
Poznámka: $\mathcal{P}$ značí množinu všech polynomů.

Písemkový speciál: Následují příklady vhodné k nácviku na semestrální písemku.
Nejprve vždy příklad vyřešte samostatně a snažte se o pěkný zápis důkazů, pak se podívejte na další stranu na řešení.

2. Dokažte indukcí, že pro $n \in \mathbb{N}$ je

a) $\dfrac{12}{13} + \dfrac{12}{13^2} + \dfrac{12}{13^3} + \dots + \dfrac{12}{13^n} = 1 - \dfrac{1}{13^n}$ neboli $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{12}{13^k} = 1 - \dfrac{1}{13^n}$.

b) $7 + 13 + 19 + \dots + (6n+1) = n(3n+4)$ neboli $\sum\limits_{k=1}^{n} (6k+1) = n(3n+4)$.

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} (\sin(k) - \sin(k-1)) = \sin(n)$.
Poznámka: Zkuste si tu sumu rozepsat dlouhým zápisem, pak uvidíte, co se tam vlastně děje.

3. Dokažte indukcí, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je

$$\sum_{k=2}^{n} k \cdot 2^k = (n-1)2^{n+1}.$$

4. U následujících tvrzení rozhodněte, zda jsou pravdivá.
Pokud je nějaké tvrzení pravdivé, napište důkaz.
Pokud nějaké tvrzení pravdivé není, tak:
—napište důkaz (nebo spíš jeho korektní počátek), jak by se psal, kdyby pravdivé bylo, a ukažte, v kterém kroku tento pokus ztroskotá a proč;
—ukažte protipříklad (ztroskotaný důkaz by měl napovědět).

A) Nechť $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ jsou relace na množině A. Jestliže jsou $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ reflexivní, tak je i $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$.

B) Nechť $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ jsou relace na množině A. Jestliže jsou $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ symetrické, tak je i $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

C) Nechť $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ jsou relace na množině A. Jestliže je $\mathcal{R}$ antisymetrická, tak je i $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$.

D) Nechť $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ jsou relace na množině A. Jestliže jsou $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ antisymetrické, tak je i $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

E) Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A. Jestliže je $\mathcal{R}^{-1}$ reflexivní, tak je i $\mathcal{R}$.

F) Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A. Jestliže je $\mathcal{R}$ symetrická, tak je i $\mathcal{R}^{-1}$.

G) Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A. Jestliže je $\mathcal{R}^{-1}$ symetrická, tak je i $\mathcal{R}$.

H) Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A. Jestliže je $\mathcal{R}^{-1}$ antisymetrická, tak je i $\mathcal{R}$.

I) Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A. Jestliže je $\mathcal{R}^{-1}$ tranzitivní, tak je i $\mathcal{R}$.

J) Nechť $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ jsou relace na množině A a $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$. Jestliže je $\mathcal{R}$ symetrická, tak je i $\mathcal{S}$.

K) Nechť $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ jsou relace na množině A a $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$. Jestliže je $\mathcal{S}$ symetrická, tak je i $\mathcal{R}$.

L) Nechť $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ jsou relace na množině A a $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$. Jestliže je $\mathcal{S}$ antisymetrická, tak je i $\mathcal{R}$.

M) Nechť $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ jsou relace na množině A. Jestliže jsou $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ symetrické, tak je i $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Řešení:

1a. Toto zobrazení je prosté. Dk: $m, n \in \mathbb{N}$ takové, že $\underline{T(m) = T(n)}$. Pak $2m = 2n$, odtud $\underline{m = n}$.
T není na. Dk: p–p: Zvolme $z = 13 \in \mathbb{Z}$. Pak nelze najít $n \in \mathbb{N}$ splňující $T(n) = 13$, protože pro takové n by muselo platit $2n = 13$, nelze.
Pomůže udělat si náčrtek, jak toto T posílá čísla.

1b. Toto zobrazení není prosté, protože například $T(3,2) = 6 = T(2,3)$, ale $(3,2) \neq (2,3)$ v $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Surjektivita: Toto zobrazení je na. Důkaz: Pro dané $y \in \mathbb{N}$ zvolíme $n = 1$, $m = y$, pak $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $T(m,n) = T(y,1) = y \cdot 1 = y$.
Rada: Než začnete s matematikou, je dobré si předložený objekt „osahat“, v tomto příkladě bych tedy začal tím, že bych si nejprve zkusil dosazovat do T nějaké dvojice čísel a koukal, co to dělá.

1c. $T\colon \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathcal{P}$, $T(a,b) = ax^2 + b$.
prosté: ano. Dk: Nechť $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z}^2$ takové, že $T(a,b) = T(c,d)$. Pak $ax^2 + b = cx^2 + d$. Polynomy se rovnají pouze tehdy, pokud mají stejné koeficienty, takže $a = c$ a $b = d$ neboli $(a,b) = (c,d)$.
na: ne. Protipříklad: polynom $p(x) = x$. Neexistuje $a, b \in \mathbb{Z}$ takové, že $x = ax^2 + b$, tedy nejde udělat $p(x) = T(a,b)$.

2a. (0) $n = 1$: $\dfrac{12}{13} = 1 - \dfrac{1}{13}$ platí.
(1) $n \in \mathbb{N}$ libovolné, předpoklad: platí $\frac{12}{13} = 1 - \frac{1}{13^1}$.
Pak $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{12}{13^k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{12}{13^k} + \frac{12}{13^{n+1}} \overset{\text{IP}}{=\!=} 1 - \frac{1}{13^n} + \frac{12}{13^{n+1}} = 1 - \left(\frac{1}{13^n} - \frac{12}{13^{n+1}}\right) = 1 - \frac{13-12}{13^{n+1}} = 1 - \frac{1}{13^{n+1}}$.

2b. (0) $n = 1$: $7 = 1 \cdot (3 \cdot 1 + 4)$ platí.
(1) $n \in \mathbb{N}$ libovolné, IP: $\sum\limits_{k=1}^{n} (6k+1) = n(3n+4)$.
Pak $\sum\limits_{k=1}^{n+1} (6k+1) = \sum\limits_{k=1}^{n} (6k+1) + (6(n+1)+1) \overset{\text{IP}}{=\!=} n(3n+4) + (6n+7) = 3n^2 + 10n + 7 = (n+1)(3(n+1)+4)$.

2c. (0) $n = 1$: $(\sin(1) - \sin(0)) = \sin(1)$ platí.
(1) $n \in \mathbb{N}$ libovolné, IP: $\sum\limits_{k=1}^{n} (\sin(k) - \sin(k-1)) = \sin(n)$.
Pak $\sum\limits_{k=1}^{n+1} (\sin(k) - \sin(k-1)) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\sin(k) - \sin(k-1)) + (\sin(n+1) - \sin(n))$
$\overset{\text{IP}}{=\!=} \sin(n) + (\sin(n+1) - \sin(n)) = \sin(n+1)$.
Poznámka: Vzorec říká, že

$$\begin{aligned}(\sin(1) - \sin(0)) + (\sin(2) - \sin(1)) + (\sin(3) - \sin(2)) + \cdots \\ + (\sin(n-1) - \sin(n-2)) + (\sin(n) - \sin(n-1)) = \sin(n) - \sin(0).\end{aligned}$$

Celý vnitřek součtu se pokrátí navzájem a zůstane jen začátek a konec. Takovým sumám se někdy říká „teleskopická”.

3. (0) $n = 2$: $\sum\limits_{k=2}^{2} k \cdot 2^k = 2 \cdot 2^2 = 8 = (2-1) \cdot 2^3$ platí.
(1) $n \geq 2$ libovolné, IP: $\sum\limits_{k=2}^{n} k \cdot 2^k = (n-1)2^{n+1}$.
Pak $\sum\limits_{k=2}^{n+1} k \cdot 2^k = \sum\limits_{k=2}^{n} k \cdot 2^k + (n+1)2^{n+1} \overset{\text{IP}}{=\!=} (n-1)2^{n+1} + (n+1)2^{n+1} = (n-1+n+1)2^{n+1}$
$= 2n2^{n+1} = n2^{n+2} = ((n+1)-1)2^{(n+1)+1}$.

4A. Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ jsou reflexivní.
Krok stranou: Chceme: $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ je reflexivní.
Potřebujeme ukázat: $\forall a \in A$: $(a,a) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$. Poznámka: Toto není implikace, proto není přirozený začátek důkazu (další předpoklad), musí se vymyslet.
Důkaz (pokračování): $\underline{a \in A}$ lib. $\mathcal{R}$ reflex. proto $(a,a) \in \mathcal{R}$. $\mathcal{S}$ reflex. proto $(a,a) \in \mathcal{S}$. Tedy $\underline{(a,a) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S}}$.
Platí.

4B. Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ jsou symetrické.
Chceme $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ je symetrická.
Potřebujeme ukázat: $\forall a,b \in A$: $(a,b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \implies (b,a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.
Důkaz (pokračování): $\underline{a,b \in A}$ lib. $\underline{(a,b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$. Pak dvě možnosti.
1) možnost $(a,b) \in \mathcal{R}$, ze symetrie $\mathcal{R}$ pak $(b,a) \in \mathcal{R}$ a proto $(b,a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.
2) možnost $(a,b) \in \mathcal{S}$, ze symetrie $\mathcal{S}$ pak $(b,a) \in \mathcal{S}$ a proto $(b,a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.
Ve všech případech $\underline{(b,a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$.
Platí.

4C. Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R}$ je antisymetrické.
Krok stranou: Chceme: $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ je antisymetrická.
Potřebujeme ukázat: $\forall a,b \in A$: $[(a,b) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S} \wedge (b,a) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S}] \implies a = b$.
Předpoklad znamená $[(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (a,b) \in \mathcal{S}] \wedge [(b,a) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \in \mathcal{S}]$.
Tři konjunkce, závorky lze zrušit, prostě máme čtyři faktíky: $(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (a,b) \in \mathcal{S} \wedge (b,a) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \in \mathcal{S}$.
Ale o $\mathcal{S}$ nic nevíme, tak ty dva budeme ignorovat.
Důkaz (pokračování): $\underline{a,b \in A}$ lib. $\underline{(a,b) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S} \wedge (b,a) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S}}$. Pak tedy
$(a,b) \in \mathcal{R}$ a $(b,a) \in \mathcal{R}$, proto z antisymetrie $\mathcal{R}$ máme $\underline{a = b}$.
Platí.

4D. Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ jsou antisymetrické.
Krok stranou: Chceme: $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ je antisymetrická.
Potřebujeme ukázat: $\forall a,b \in A$: $[(a,b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \wedge (b,a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}] \implies a = b$.
Důkaz (pokračování): $\underline{a,b \in A}$ lib. $\underline{(a,b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \wedge (b,a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$. Pak čtyři možnosti.
1) možnost $(a,b) \in \mathcal{R}$ a $(b,a) \in \mathcal{R}$, pak z antisymetrie $\mathcal{R}$ máme $a = b$, zatím dobré.
2) možnost $(a,b) \in \mathcal{S}$ a $(b,a) \in \mathcal{S}$, pak z antisymetrie $\mathcal{S}$ máme $a = b$, zatím dobré.
3) možnost $(a,b) \in \mathcal{R}$ a $(b,a) \in \mathcal{S}$, pak máme problém.
Neplatí. Mimochodem, problém nastane i pro čtvrtou možnost $(a,b) \in \mathcal{S}$ a $(b,a) \in \mathcal{R}$.
Protipříklad: $A = \{1,2\}$, $\mathcal{R} = \{(1,2)\}$ antisymetrická, $\mathcal{S} = \{(2,1)\}$ antisymetrická,
$\mathcal{R} \cup \mathcal{S} = \{(1,2),(2,1)\}$ není antisymetrická,

4E. Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R}^{-1}$ je reflexivní.
Krok stranou: Chceme: $\mathcal{R}$ je reflexivní.
Potřebujeme ukázat: $\forall a \in A$: $(a,a) \in \mathcal{R}$. Poznámka: Toto není implikace, proto není přirozený začátek důkazu (další předpoklad), musí se vymyslet.
Důkaz (pokračování): $\underline{a \in A}$ lib. $\mathcal{R}^{-1}$ reflex. proto $(a,a) \in \mathcal{R}^{-1}$. Pak (prohozením těch dvou a navzájem) $\underline{(a,a) \in \mathcal{R}}$.
Platí.

4F. Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R}$ je symetrická.
Krok stranou: Chceme: $\mathcal{R}^{-1}$ je symetrická.
Potřebujeme ukázat: $\forall a \in A$: $(a,b) \in \mathcal{R}^{-1} \implies (b,a) \in \mathcal{R}^{-1}$.
Důkaz (pokračování): $\underline{a,b \in A}$ lib. $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}}$ pak $(b,a) \in \mathcal{R}$, dle předpokladu tedy $(a,b) \in \mathcal{R}$ a tudíž $\underline{(b,a) \in \mathcal{R}^{-1}}$.
Platí.

4G. Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R}^{-1}$ je symetrická.
Chceme: $\mathcal{R}$ je symetrická.
Potvrdíme: $\underline{a, b \in A}$ lib. $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}}$ pak $(b,a) \in \mathcal{R}^{-1}$, dle předpokladu tedy $(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}$ a tudíž $\underline{(b,a) \in \mathcal{R}}$.
Platí.

4H. Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R}^{-1}$ je antisymetrická.
Tvrdíme: $\mathcal{R}$ je antisymetrická.
Potvrzení: $\underline{a, b \in A}$ lib. $\underline{(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \in \mathcal{R}}$ pak $(b,a) \in \mathcal{R}^{-1} \wedge (a,b) \in \mathcal{R}^{-1}$, dle předpokladu tedy $b = a$ a tudíž $\underline{a = b}$.
Platí.

4I. Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R}^{-1}$ je tranzitivní.
Chceme: $\mathcal{R}$ je tranzitivní.
Potvrdíme: $\underline{a, b, c \in A}$ lib. $\underline{(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{R}}$ pak $(b,a) \in \mathcal{R}^{-1} \wedge (c,b) \in \mathcal{R}^{-1}$ neboli $(c,b) \in \mathcal{R}^{-1} \wedge (b,a) \in \mathcal{R}^{-1}$, dle předpokladu tedy $(c,a) \in \mathcal{R}^{-1}$ a tudíž $\underline{(a,c) \in \mathcal{R}}$.
Platí.

4J. Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ a $\mathcal{R}$ je symetrická.
Krok stranou: Chceme: $\mathcal{S}$ je symetrická.
Potřebujeme ukázat: $\forall a, b \in A$: $(a,b) \in \mathcal{S} \implies (b,a) \in \mathcal{S}$.
Důkaz (pokračování): $\underline{a, b \in A}$ lib. $\underline{(a,b) \in \mathcal{S}}$. Pak ale (a,b) nemusí být v $\mathcal{R}$ a my tak nemáme možnost využít předpoklad.
Neplatí.
Protipříklad: $A = \{1,2\}$, $\mathcal{R} = \{(1,1)\}$ symetrická, $\mathcal{S} = \{(1,1),(1,2)\}$ není symetrická.
Jiný p–p: $A = \{1,2,3\}$, $\mathcal{R} = \{(1,2),(2,1)\}$ symetrická, $\mathcal{S} = \{(1,2),(2,1),(1,3)\}$ není symetrická.

4K. Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ a $\mathcal{S}$ je symetrická.
Krok stranou: Chceme: $\mathcal{R}$ je symetrická.
Potřebujeme ukázat: $\forall a, b \in A$: $(a,b) \in \mathcal{R} \implies (b,a) \in \mathcal{R}$.
Důkaz (pokračování): $\underline{a, b \in A}$ lib. $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}}$. Podle $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ také $(a,b) \in \mathcal{S}$, ze symetrie $\mathcal{S}$ pak $(b,a) \in \mathcal{S}$ a máme problém, protože to (b,a) nemusí být zase v $\mathcal{R}$.
Neplatí.
Protipříklad: $A = \{1,2\}$, $\mathcal{S} = \{(1,2),(2,1)\}$ symetrická, $\mathcal{R} = \{(1,2)\}$ není symetrická.

4L. Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ a $\mathcal{S}$ je antisymetrická.
Krok stranou: Chceme: $\mathcal{R}$ je antisymetrická.
Potřebujeme ukázat: $\forall a, b \in A$: $[(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \in \mathcal{R}] \implies a = b$.
Důkaz (pokračování): $\underline{a, b \in A}$ lib. $\underline{(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \in \mathcal{R}}$. Podle $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ pak máme $(a,b) \in \mathcal{S} \wedge (b,a) \in \mathcal{S}$ a z antisymetrie $\mathcal{S}$ dostaneme $\underline{a = b}$.
Platí.

4M. Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ jsou symetrické.
Krok stranou: Chceme: $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ je symetrická.
Potřebujeme ukázat: $\forall a, b \in A$: $(a,b) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \implies (b,a) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.
Důkaz (pokračování): $\underline{a, b \in A}$ lib. $\underline{(a,b) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}}$. Pak musí existovat $x \in A$ takové, že $(a,x) \in \mathcal{R}$ a $(x,b) \in \mathcal{S}$.
Obě jsou symetrické, takže víme i $(x,a) \in \mathcal{R}$ a $(b,x) \in \mathcal{S}$. Prohodíme:
$(a,x) \in \mathcal{S}$ a $(x,b) \in \mathcal{R}$. Proto $(b,a) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, ale to je jiná relace než $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ a jsme v háji.
Neplatí.
Protipříklad: $A = \{1,2,3\}$, $\mathcal{R} = \{(1,2),(2,1)\}$ symetrická, $\mathcal{S} = \{(2,3),(3,2)\}$ symetrická.
Ale jediný navazující dvoukrok je $1\mathcal{R}2\mathcal{S}3$, proto $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1,3)\}$, tato relace není symetrická.
Poznámka: Protože zde nevyužíváme množinové operace, je stejně praktické psát důkaz alternativním značením: $a(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})b$ pak $\exists x$ aby $a\mathcal{R}x\mathcal{S}b$. Ze symetrie $x\mathcal{R}a$ a $b\mathcal{S}x$ neboli $b\mathcal{S}x\mathcal{R}a$ a proto ...