

DMA Domáci úkol č. 10A

Tento domácí úkol se neodevzdává.

1. U následujících zobrazení rozhodněte, zda jsou prostá a zda jsou na. Svě odpovědi dokažte.

a) $T: \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, T(n) = 2n;$

b) $T: \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0, T(n) = n^2;$

c) $T: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, T(m, n) = m \cdot n;$

d) $T: \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathcal{P}, T(a, b) = ax^2 + b.$

Poznámka: \mathcal{P} značí množinu všech polynomů.

Písemkový speciál: Následují příklady vhodné k nácviku na semestrální písemku.

Nejprve vždy příklad vyřešte samostatně a snažte se o pěkný zápis důkazů, pak se podívejte na další stranu na řešení.

2. Dokažte indukci, že pro $n \in \mathbb{N}$ je

a) $\frac{12}{13} + \frac{12}{13^2} + \frac{12}{13^3} + \dots + \frac{12}{13^n} = 1 - \frac{1}{13^n}$ neboli $\sum_{k=1}^n \frac{12}{13^k} = 1 - \frac{1}{13^n}.$

b) $7 + 13 + 19 + \dots + (6n + 1) = n(3n + 4)$ neboli $\sum_{k=1}^n (6k + 1) = n(3n + 4).$

c) $\sum_{k=1}^n (\sin(k) - \sin(k - 1)) = \sin(n).$

Poznámka: Zkuste si tu sumu rozepsat dlouhým zápisem, pak uvidíte, co se tam vlastně děje.

3. Dokažte indukci, že pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ je

$$\sum_{k=2}^n k \cdot 2^k = (n - 1)2^{n+1}.$$

4. U následujících tvrzení rozhodněte, zda jsou pravdivá.

Pokud je nějaké tvrzení pravdivé, napište důkaz.

Pokud nějaké tvrzení pravdivé není, tak:

—napište důkaz (nebo spíš jeho korektní počátek), jak by se psal, kdyby pravdivé bylo, a ukažte, v kterém kroku tento pokus ztroskotá a proč;

—ukažte protipříklad (ztroskotaný důkaz by měl napovědět).

A) Necht' \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou relace na množině A . Jestliže jsou \mathcal{R}, \mathcal{S} reflexivní, tak je i $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ reflexivní.

B) Necht' \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou relace na množině A . Jestliže jsou \mathcal{R}, \mathcal{S} symetrické, tak je i $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ symetrická.

C) Necht' \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou relace na množině A . Jestliže je \mathcal{R} antisymetrická, tak je i $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ antisymetrická.

D) Necht' \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou relace na množině A . Jestliže jsou \mathcal{R}, \mathcal{S} antisymetrické, tak je i $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ antisymetrická.

E) Necht' \mathcal{R} je relace na množině A . Jestliže je \mathcal{R}^{-1} reflexivní, tak je i \mathcal{R} reflexivní.

F) Necht' \mathcal{R} je relace na množině A . Jestliže je \mathcal{R} symetrická, tak je i \mathcal{R}^{-1} symetrická.

G) Necht' \mathcal{R} je relace na množině A . Jestliže je \mathcal{R}^{-1} symetrická, tak je i \mathcal{R} symetrická.

H) Necht' \mathcal{R} je relace na množině A . Jestliže je \mathcal{R}^{-1} antisymetrická, tak je i \mathcal{R} antisymetrická.

I) Necht' \mathcal{R} je relace na množině A . Jestliže je \mathcal{R}^{-1} tranzitivní, tak je i \mathcal{R} tranzitivní.

J) Necht' \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou relace na množině A a $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$. Jestliže je \mathcal{R} symetrická, tak je i \mathcal{S} symetrická.

K) Necht' \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou relace na množině A a $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$. Jestliže je \mathcal{S} symetrická, tak je i \mathcal{R} symetrická.

L) Necht' \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou relace na množině A a $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$. Jestliže je \mathcal{S} antisymetrická, tak je i \mathcal{R} antisymetrická.

M) Necht' \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou relace na množině A . Jestliže jsou \mathcal{R}, \mathcal{S} symetrické, tak je i $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ symetrická.

Řešení:

1a. Toto zobrazení je prosté. Dk: $m, n \in \mathbb{N}$ takové, že $T(m) = T(n)$. Pak $2m = 2n$, odtud $m = n$.
 T není na. Dk: p-p: Zvolme $z = 13 \in \mathbb{Z}$. Pak nelze najít $n \in \mathbb{N}$ splňující $T(n) = 13$, protože pro takové n by muselo platit $2n = 13$, nelze.

Pomůže udělat si náčrtek, jak toto T posílá čísla.

1b. Toto zobrazení není prosté, protože například $T(1) = 1 = T(-1)$, ale $1 \neq -1$.
 T není na. Dk: p-p: Zvolme $b = 13 \in \mathbb{Z}$. Pak nelze najít $n \in \mathbb{N}$ splňující $T(b) = 13$, protože pro takové n by muselo platit $b^2 = 13$, nelze pro $n \in \mathbb{Z}$.

Pomůže udělat si náčrtek, jak toto T posílá čísla.

1c. Toto zobrazení není prosté, protože například $T(3, 2) = 6 = T(2, 3)$, ale $(3, 2) \neq (2, 3)$ v $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Surjektivita: Toto zobrazení je na. Důkaz: Pro dané $y \in \mathbb{N}$ zvolíme $n = 1$, $m = y$, pak $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $T(m, n) = T(y, 1) = y \cdot 1 = y$.

Rada: Než začnete s matematikou, je dobré si předložený objekt „osahat“, v tomto příkladě bych tedy začal tím, že bych si nejprve zkusil dosazovat do T nějaké dvojice čísel a koukal, co to dělá.

1d. $T: \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathcal{P}$, $T(a, b) = ax^2 + b$.

prosté: ano. Dk: Necht' $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$ takové, že $T(a, b) = T(c, d)$. Pak $ax^2 + b = cx^2 + d$. Polynomy se rovnají pouze tehdy, pokud mají stejné koeficienty, takže $a = c$ a $b = d$ neboli $(a, b) = (c, d)$.

na: ne. Protipříklad: polynom $p(x) = x$. Neexistuje $a, b \in \mathbb{Z}$ takové, že $x = ax^2 + b$, tedy nejde udělat $p(x) = T(a, b)$.

2a. (0) $n = 1$: $\frac{12}{13} = 1 - \frac{1}{13}$ platí.

(1) $n \in \mathbb{N}$ libovolné, předpoklad: platí $\frac{12}{13} = 1 - \frac{1}{13^1}$.

Pak $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{12}{13^k} = \sum_{k=1}^n \frac{12}{13^k} + \frac{12}{13^{n+1}} \stackrel{\text{IP}}{=} 1 - \frac{1}{13^n} + \frac{12}{13^{n+1}} = 1 - \left(\frac{1}{13^n} - \frac{12}{13^{n+1}}\right) = 1 - \frac{13-12}{13^{n+1}} = 1 - \frac{1}{13^{n+1}}$.

2b. (0) $n = 1$: $7 = 1 \cdot (3 \cdot 1 + 4)$ platí.

(1) $n \in \mathbb{N}$ libovolné, IP: $\sum_{k=1}^n (6k + 1) = n(3n + 4)$.

Pak $\sum_{k=1}^{n+1} (6k+1) = \sum_{k=1}^n (6k+1) + (6(n+1)+1) \stackrel{\text{IP}}{=} n(3n+4) + (6n+7) = 3n^2 + 10n + 7 = (n+1)(3(n+1)+4)$.

2c. (0) $n = 1$: $(\sin(1) - \sin(0)) = \sin(1)$ platí.

(1) $n \in \mathbb{N}$ libovolné, IP: $\sum_{k=1}^n (\sin(k) - \sin(k-1)) = \sin(n)$.

Pak $\sum_{k=1}^{n+1} (\sin(k) - \sin(k-1)) = \sum_{k=1}^n (\sin(k) - \sin(k-1)) + (\sin(n+1) - \sin(n))$

$\stackrel{\text{IP}}{=} \sin(n) + (\sin(n+1) - \sin(n)) = \sin(n+1)$.

Poznámka: Vzorec říká, že

$$\begin{aligned} &(\sin(1) - \sin(0)) + (\sin(2) - \sin(1)) + (\sin(3) - \sin(2)) + \dots \\ &+ (\sin(n-1) - \sin(n-2)) + (\sin(n) - \sin(n-1)) = \sin(n) - \sin(0). \end{aligned}$$

Celý vnitřek součtu se pokrátí navzájem a zůstane jen začátek a konec. Takovým sumám se někdy říká „teleskopická“.

3. (0) $n = 2$: $\sum_{k=2}^2 k \cdot 2^k = 2 \cdot 2^2 = 8 = (2-1) \cdot 2^3$ platí.

(1) $n \geq 2$ libovolné, IP: $\sum_{k=2}^n k \cdot 2^k = (n-1)2^{n+1}$.

Pak $\sum_{k=2}^{n+1} k \cdot 2^k = \sum_{k=2}^n k \cdot 2^k + (n+1)2^{n+1} \stackrel{\text{IP}}{=} (n-1)2^{n+1} + (n+1)2^{n+1} = (n-1+n+1)2^{n+1}$
 $= 2n2^{n+1} = n2^{n+2} = ((n+1)-1)2^{(n+1)+1}$.

4A. Důkaz: Předpoklad: \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou reflexivní.

Krok stranou: Chceme: $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ je reflexivní.

Potřebujeme ukázat: $\forall a \in A: (a, a) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$. Poznámka: Toto není implikace, proto není přirozený začátek důkazu (další předpoklad), musí se vymyslet.

Důkaz (pokračování): $a \in A$ lib. \mathcal{R} reflex. proto $(a, a) \in \mathcal{R}$. \mathcal{S} reflex. proto $(a, a) \in \mathcal{S}$. Tedy $(a, a) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$.

Platí.

4B. Důkaz: Předpoklad: \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou symetrické.

Chceme $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ je symetrická.

Potřebujeme ukázat: $\forall a, b \in A: (a, b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \implies (b, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

Důkaz (pokračování): $a, b \in A$ lib. $(a, b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$. Pak dvě možnosti.

1) možnost $(a, b) \in \mathcal{R}$, ze symetrie \mathcal{R} pak $(b, a) \in \mathcal{R}$ a proto $(b, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

2) možnost $(a, b) \in \mathcal{S}$, ze symetrie \mathcal{S} pak $(b, a) \in \mathcal{S}$ a proto $(b, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

Ve všech případech $(b, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

Platí.

4C. Důkaz: Předpoklad: \mathcal{R} je antisymetrické.

Krok stranou: Chceme: $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ je antisymetrická.

Potřebujeme ukázat: $\forall a, b \in A: [(a, b) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S} \wedge (b, a) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S}] \implies a = b$.

Předpoklad znamená $[(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (a, b) \in \mathcal{S}] \wedge [(b, a) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{S}]$.

Tři konjunkce, závorky lze zrušit, prostě máme čtyři faktíky: $(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (a, b) \in \mathcal{S} \wedge (b, a) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{S}$.

Ale o \mathcal{S} nic nevíme, tak ty dva budeme ignorovat.

Důkaz (pokračování): $a, b \in A$ lib. $(a, b) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S} \wedge (b, a) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$. Pak tedy $(a, b) \in \mathcal{R}$ a $(b, a) \in \mathcal{R}$, proto z antisymetrie \mathcal{R} máme $a = b$.

Platí.

4D. Důkaz: Předpoklad: \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou antisymetrické.

Krok stranou: Chceme: $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ je antisymetrická.

Potřebujeme ukázat: $\forall a, b \in A: [(a, b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \wedge (b, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}] \implies a = b$.

Důkaz (pokračování): $a, b \in A$ lib. $(a, b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \wedge (b, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$. Pak čtyři možnosti.

1) možnost $(a, b) \in \mathcal{R}$ a $(b, a) \in \mathcal{R}$, pak z antisymetrie \mathcal{R} máme $a = b$, zatím dobré.

2) možnost $(a, b) \in \mathcal{S}$ a $(b, a) \in \mathcal{S}$, pak z antisymetrie \mathcal{S} máme $a = b$, zatím dobré.

3) možnost $(a, b) \in \mathcal{R}$ a $(b, a) \in \mathcal{S}$, pak máme problém.

Neplatí. Mimochodem, problém nastane i pro čtvrtou možnost $(a, b) \in \mathcal{S}$ a $(b, a) \in \mathcal{R}$.

Protipříklad: $A = \{1, 2\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 2)\}$ antisymetrická, $\mathcal{S} = \{(2, 1)\}$ antisymetrická,

$\mathcal{R} \cup \mathcal{S} = \{(1, 2), (2, 1)\}$ není antisymetrická,

4E. Důkaz: Předpoklad: \mathcal{R}^{-1} je reflexivní.

Krok stranou: Chceme: \mathcal{R} je reflexivní.

Potřebujeme ukázat: $\forall a \in A: (a, a) \in \mathcal{R}$. Poznámka: Toto není implikace, proto není přirozený začátek důkazu (další předpoklad), musí se vymyslet.

Důkaz (pokračování): $a \in A$ lib. \mathcal{R}^{-1} reflex. proto $(a, a) \in \mathcal{R}^{-1}$. Pak (prohozením těch dvou a navzájem) $(a, a) \in \mathcal{R}$.

Platí.

4F. Důkaz: Předpoklad: \mathcal{R} je symetrická.

Krok stranou: Chceme: \mathcal{R}^{-1} je symetrická.

Potřebujeme ukázat: $\forall a \in A: (a, b) \in \mathcal{R}^{-1} \implies (b, a) \in \mathcal{R}^{-1}$.

Důkaz (pokračování): $a, b \in A$ lib. $(a, b) \in \mathcal{R}^{-1}$ pak $(b, a) \in \mathcal{R}$, dle předpokladu tedy $(a, b) \in \mathcal{R}$ a tudíž $(b, a) \in \mathcal{R}^{-1}$.

Platí.

4G. Důkaz: Předpoklad: \mathcal{R}^{-1} je symetrická.

Chceme: \mathcal{R} je symetrická.

Potvrdíme: $a, b \in A$ lib. $(a, b) \in \mathcal{R}$ pak $(b, a) \in \mathcal{R}^{-1}$, dle předpokladu tedy $(a, b) \in \mathcal{R}^{-1}$ a tudíž $(b, a) \in \mathcal{R}$.

Platí.

4H. Důkaz: Předpoklad: \mathcal{R}^{-1} je antisymetrická.

Tvrdíme: \mathcal{R} je antisymetrická.

Potvrzení: $a, b \in A$ lib. $(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R}$ pak $(b, a) \in \mathcal{R}^{-1} \wedge (a, b) \in \mathcal{R}^{-1}$, dle předpokladu tedy $b = a$ a tudíž $a = b$.

Platí.

4I. Důkaz: Předpoklad: \mathcal{R}^{-1} je tranzitivní.

Chceme: \mathcal{R} je tranzitivní.

Potvrdíme: $a, b, c \in A$ lib. $(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R}$ pak $(b, a) \in \mathcal{R}^{-1} \wedge (c, b) \in \mathcal{R}^{-1}$ neboli $(c, b) \in \mathcal{R}^{-1} \wedge (b, a) \in \mathcal{R}^{-1}$, dle předpokladu tedy $(c, a) \in \mathcal{R}^{-1}$ a tudíž $(a, c) \in \mathcal{R}$.

Platí.

4J. Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ a \mathcal{R} je symetrická.

Krok stranou: Chceme: \mathcal{S} je symetrická.

Potřebujeme ukázat: $\forall a, b \in A: (a, b) \in \mathcal{S} \implies (b, a) \in \mathcal{S}$.

Důkaz (pokračování): $a, b \in A$ lib. $(a, b) \in \mathcal{S}$. Pak ale (a, b) nemusí být v \mathcal{R} a my tak nemáme možnost využít předpoklad.

Neplatí.

Protipříklad: $A = \{1, 2\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1)\}$ symetrická, $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, 2)\}$ není symetrická.

Jiný p-p: $A = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1)\}$ symetrická, $\mathcal{S} = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$ není symetrická.

4K. Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ a \mathcal{S} je symetrická.

Krok stranou: Chceme: \mathcal{R} je symetrická.

Potřebujeme ukázat: $\forall a, b \in A: (a, b) \in \mathcal{R} \implies (b, a) \in \mathcal{R}$.

Důkaz (pokračování): $a, b \in A$ lib. $(a, b) \in \mathcal{R}$. Podle $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ také $(a, b) \in \mathcal{S}$, ze symetrie \mathcal{S} pak $(b, a) \in \mathcal{S}$ a máme problém, protože to (b, a) nemusí být zase v \mathcal{R} .

Neplatí.

Protipříklad: $A = \{1, 2\}$, $\mathcal{S} = \{(1, 2), (2, 1)\}$ symetrická, $\mathcal{R} = \{(1, 2)\}$ není symetrická.

4L. Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ a \mathcal{S} je antisymetrická.

Krok stranou: Chceme: \mathcal{R} je antisymetrická.

Potřebujeme ukázat: $\forall a, b \in A: [(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R}] \implies a = b$.

Důkaz (pokračování): $a, b \in A$ lib. $(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R}$. Podle $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ pak máme $(a, b) \in \mathcal{S} \wedge (b, a) \in \mathcal{S}$ a z antisymetrie \mathcal{S} dostaneme $a = b$.

Platí.

4M. Důkaz: Předpoklad: \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou symetrické.

Krok stranou: Chceme: $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ je symetrická.

Potřebujeme ukázat: $\forall a, b \in A: (a, b) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \implies (b, a) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Důkaz (pokračování): $a, b \in A$ lib. $(a, b) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$. Pak musí existovat $x \in A$ takové, že $(a, x) \in \mathcal{R}$ a $(x, b) \in \mathcal{S}$.

Obě jsou symetrické, takže víme i $(x, a) \in \mathcal{R}$ a $(b, x) \in \mathcal{S}$. Prohodíme:

$(a, x) \in \mathcal{S}$ a $(x, b) \in \mathcal{R}$. Proto $(b, a) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, ale to je jiná relace než $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ a jsme v háji.

Neplatí.

Protipříklad: $A = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1)\}$ symetrická, $\mathcal{S} = \{(2, 3), (3, 2)\}$ symetrická.

Ale jediný navazující dvoukrok je $1\mathcal{R}2\mathcal{S}3$, proto $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1, 3)\}$, tato relace není symetrická.

Poznámka: Protože zde nevyužíváme množinové operace, je stejně praktické psát důkaz alternativním značením: $a(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})b$ pak $\exists x$ aby $a\mathcal{R}x\mathcal{S}b$. Ze symetrie $x\mathcal{R}a$ a $b\mathcal{S}x$ neboli $b\mathcal{S}x\mathcal{R}a$ a proto ...