DMA Domácí úkol č. 10B

Tento úkol vypracujte po přednášce a před cvičením, na druhé straně je řešení.
Pokud vám něco není jasné, zeptejte se na cvičení nebo na konzultaci.

1. Dokažte, že množina S sudých celých čísel a množina L lichých celých čísel mají stejnou mohutnost. Nápověda: Obrázek pomůže.

2. Jaká je asymptotická rychlost růstu posloupnosti $a_n = 13 \cdot 2^n + 1000n^3 + 3^n$ v nekonečnu?

Řešení:

1. Uměli bychom šipkami propojit tyto dvě množiny?

$$S\colon \dots \overset{-2}{\bullet} \quad \overset{0}{\bullet} \quad \overset{2}{\bullet} \quad \overset{4}{\bullet} \dots$$

$$L\colon \dots \underset{-1}{\bullet} \quad \underset{1}{\bullet} \quad \underset{3}{\bullet} \quad \underset{5}{\bullet} \dots$$

Možností je mnoho, zkusím jednu nudnou, která se nabízí.
Uvažujme zobrazení $T\colon S \mapsto L$ dané předpisem $T(n) = n + 1$.
Je to dobrá definice? Asi všichni ví, že přičtením jedničky se změní parita. Kdyby někdo puntičkařil: Každé $n \in S$ se dá zapsat jako $2k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, pak $T(n) = 2k+1$, což je liché celé číslo. Potvrzeno, že $T\colon S \mapsto L$.
Je prosté: Nechť $m, n \in S$ splňují $T(n) = T(m)$. Pak $n + 1 = m + 1$, tedy $n = m$.
Je na: Je-li dáno $m \in L$, pak je to celé liché číslo, proto je $n = m - 1$ celé sudé číslo neboli $n \in S$. Toto n splňuje $T(n) = n + 1 = (m - 1) + 1 = m$.
Takže T je bijekce z S na L, proto $|S| = |L|$.

2. Vidíme tři typy výrazů: $2^n, 3^n, n^3$. Mocniny jsou pomalejší než exponenciály, takže odpadají. Mezi 2^n a 3^n vyhraje větší základ.
Závěr: $13 \cdot 2^n + 1000n^3 + 3^n = O(3^n)$.