DMA Domácí úkol č. 11A

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 12.

1. Napište induktivní definici množiny všech kladných celých čísel, která jsou dělitelná pěti ale ne desíti. Nápověda: Nejprve si napište prvních pár čísel z množiny, to by mělo napovědět.

2. Pro následující zobrazení rozhodněte, zda jsou prostá a zda jsou na. Své odpovědi dokažte.
a) $T\colon \mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N}^3$, $T(m,n) = (m,n,m+n)$.
b) $T\colon \mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N}$, $T(m,n) = m+n$.

Zkouškový speciál důkazový [náročnější] (pokročilejší mohou zkusit teď nebo před zkouškou):
a) Uvažujte zobrazení $T\colon A \mapsto B$ a $S\colon B \mapsto C$.
1) Dokažte, že když jsou T a S prostá, pak je i složené zobrazení $S \circ T$ prosté.
2) Ukažte konkrétní příklad zobrazení T, S, kdy T je prosté, S není prosté a $S \circ T$ není prosté.
Ukažte konkrétní příklad zobrazení T, S, kdy T je prosté, S není prosté a $S \circ T$ je prosté.
3) Dokažte, že když je složené zobrazení $S \circ T$ prosté, pak musí být i T prosté zobrazení.
4) Dokažte, že když jsou T a S na, pak je i složené zobrazení $S \circ T$ na.
5) Ukažte konkrétní příklad zobrazení T, S, kdy T není na, S je na a $S \circ T$ není na.
6) Ukažte konkrétní příklad zobrazení T, S, kdy T není na, S je na a $S \circ T$ je na.

b) Nechť $T\colon A \mapsto B$ je invertibilní zobrazení s inverzí T^{-1}. Dokažte přímo (bez použití věty o skládání a inverzi), že pak je $(T^{-1})^2 = T^{-1} \circ T^{-1}$ inverzní zobrazení k $T^2 = T \circ T$.

c) Najděte nějaké zobrazení $T\colon \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$, které je samo sobě inverzní, tedy $T^{-1} = T$.

d) Nechtť $T\colon A \mapsto B$ a $S\colon B \mapsto C$ jsou invertibilní zobrazení. Dokažte, že pak je i složené $S \circ T$ invertibilní a platí vzorec $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.