DMA Domácí úkol č. 11A

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 12.

1. Napište induktivní definici množiny všech kladných celých čísel, která jsou dělitelná pěti ale ne desíti. Nápověda: Nejprve si napište prvních pár čísel z množiny, to by mělo napovědět.

2. Pro následující zobrazení rozhodněte, zda jsou prostá a zda jsou na. Své odpovědi dokažte.
a) T: $\mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N}^3$, $T(m,n) = (m,n,m+n)$.
b) T: $\mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N}$, $T(m,n) = m+n$.

Řešení:

1. Nejjednodušší je toto:
(0) $5 \in M$.
(1) $n \in M \implies n+10 \in M$.

2a. T je prosté.
Dk: Nechť $(m,n),(u,v) \in \mathbb{N}^2$ a $\underline{T(m,n) = T(u,v)}$. Pak $(m,n,m+n) = (u,v,u+v)$, což znamená mimo jiné $m = u$, $n = v$ a tedy $\underline{(m,n) = (u,v)}$.
T není na.
Dk: p–p: Zvolíme $(1,1,13) \in \mathbb{N}^3$. Tvrdíme, že neexistuje $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ splňující $T(m,n) = (1,1,13)$. Kdyby totiž existovalo, tak by muselo platit $(m,n,m+n) = (1,1,13)$, pak ale $m = 1$, $n = 1$ a nevyjde $m+n = 13$.
Taky se dá vzít třeba $(-1,-1,13)$ a dokonce už ani nebude žádné $m \in \mathbb{N}$ aby $m = -1$.

2b. T není prosté.
Dk: $T(1,2) = 3 = T(2,1)$.
Poznámka: Z rovnice $T(m,n) = T(x,y)$ dostaneme $m+n = x+y$, chceme získat $(m,n) = (x,y)$ neboli $m = x$ a $n = y$. To nejde.

T není na.
Dk: Neexistuje $(m,n) \in \mathbb{N}$ takové, že $T(m,n) = 1$. Pro $(m,n) \in \mathbb{N}$ totiž platí $m+n \geq 1+1 = 2$.

Poznámka: Oblíbený přístup studentů je následující: Nechť $z \in \mathbb{N}$ libovolné. Pak najdeme $m,n \in \mathbb{N}$ tak, aby $m+n = z$, a máme $T(m,n) = z$. Dokázali jsme, že T je na.
Problém tohoto pokusu o důkaz je, že od čtenáře očekáváme, že nám prostě bude věřit, se ty m,n nějak najdou. V matematice ovšem víra nestačí, proto ani nestačí argumenty tohoto typu. Pokud chceme, aby nám existenci těch m,n uznali, tak musíme konkrétně ukázat, jak se pro dané z najdou, nejlépe nějakými vzorci. Když to zkusíme, zjistíme, že pro jedničku to nefunguje.
Ze stejného důvodu neprojde další docela oblíbený pokus: Pro dané $z \in \mathbb{N}$ zvolíme m,n tak, že $n = z-m$ a $m = z-n$. Zde sice vzorce pro m,n máme, ale jsou zacyklené, takže to neplatí.

Poznámka: Pokud bychom T brali jako zobrazení $\mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N} \setminus \{1\}$, tak už bude na.
Dk: Dáno $z \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Zvolíme $m = 1$ a $n = z-1$. Pak evidentně

$$T(m,n) = T(1,z-1) = 1 + (z-1) = z$$

a $m \in \mathbb{N}$. Víme $n \in \mathbb{Z}$ a díky $z \geq 2$ také $n \geq 1$, proto $n \in \mathbb{N}$ a tedy $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.