DMA Domácí úkol č. 11A

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 12.

1. Napište induktivní definici množiny všech kladných celých čísel, která jsou dělitelná pěti ale ne desíti. Nápověda: Nejprve si napište prvních pár čísel z množiny, to by mělo napovědět.

2. Pro následující zobrazení rozhodněte, zda jsou prostá a zda jsou na. Své odpovědi dokažte.
a) $T\colon \mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N}^3$, $T(m,n) = (m,n,m+n)$.
b) $T\colon \mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N}$, $T(m,n) = m+n$.

Zkouškový speciál důkazový [náročnější] (pokročilejší mohou zkusit teď nebo před zkouškou):
a) Uvažujte zobrazení $T\colon A \mapsto B$ a $S\colon B \mapsto C$.
1) Dokažte, že když jsou T a S prostá, pak je i složené zobrazení $S \circ T$ prosté.
2) Ukažte konkrétní příklad zobrazení T, S, kdy T je prosté, S není prosté a $S \circ T$ není prosté.
Ukažte konkrétní příklad zobrazení T, S, kdy T je prosté, S není prosté a $S \circ T$ je prosté.
3) Dokažte, že když je složené zobrazení $S \circ T$ prosté, pak musí být i T prosté zobrazení.
4) Dokažte, že když jsou T a S na, pak je i složené zobrazení $S \circ T$ na.
5) Ukažte konkrétní příklad zobrazení T, S, kdy T není na, S je na a $S \circ T$ není na.
6) Ukažte konkrétní příklad zobrazení T, S, kdy T není na, S je na a $S \circ T$ je na.

b) Nechť $T\colon A \mapsto B$ je invertibilní zobrazení s inverzí T^{-1}. Dokažte přímo (bez použití věty o skládání a inverzi), že pak je $(T^{-1})^2 = T^{-1} \circ T^{-1}$ inverzní zobrazení k $T^2 = T \circ T$.

c) Najděte nějaké zobrazení $T\colon \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$, které je samo sobě inverzní, tedy $T^{-1} = T$.

d) Nechtť $T\colon A \mapsto B$ a $S\colon B \mapsto C$ jsou invertibilní zobrazení. Dokažte, že pak je i složené $S \circ T$ invertibilní a platí vzorec $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

Řešení:

1. Nejjednodušší je toto:
(0) $5 \in M$.
(1) $n \in M \implies n + 10 \in M$.

2a. T je prosté.
Dk: Nechť $(m,n), (u,v) \in \mathbb{N}^2$ a $\underline{T(m,n) = T(u,v)}$. Pak $(m,n,m+n) = (u,v,u+v)$, což znamená mimo jiné $m = u$, $n = v$ a tedy $\underline{(m,n) = (u,v)}$.
T není na.
Dk: p–p: Zvolíme $(1,1,13) \in \mathbb{N}^3$. Tvrdíme, že neexistuje $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ splňující $T(m,n) = (1,1,13)$. Kdyby totiž existovalo, tak by muselo platit $(m,n,m+n) = (1,1,13)$, pak ale $m = 1$, $n = 1$ a nevyjde $m + n = 13$.
Taky se dá vzít třeba $(-1,-1,13)$ a dokonce už ani nebude žádné $m \in \mathbb{N}$ aby $m = -1$.

2b. T není prosté.
Dk: $T(1,2) = 3 = T(2,1)$.
Poznámka: Z rovnice $T(m,n) = T(x,y)$ dostaneme $m + n = x + y$, chceme získat $(m,n) = (x,y)$ neboli $m = x$ a $n = y$. To nejde.

T není na.
Dk: Neexistuje $(m,n) \in \mathbb{N}$ takové, že $T(m,n) = 1$. Pro $(m,n) \in \mathbb{N}$ totiž platí $m + n \geq 1 + 1 = 2$.

Poznámka: Oblíbený přístup studentů je následující: Nechť $z \in \mathbb{N}$ libovolné. Pak najdeme $m, n \in \mathbb{N}$ tak, aby $m + n = z$, a máme $T(m,n) = z$. Dokázali jsme, že T je na.
Problém tohoto pokusu o důkaz je, že od čtenáře očekáváme, že nám prostě bude věřit, se ty m, n nějak najdou. V matematice ovšem víra nestačí, proto ani nestačí argumenty tohoto typu. Pokud chceme, aby nám existenci těch m, n uznali, tak musíme konkrétně ukázat, jak se pro dané z najdou, nejlépe nějakými vzorci. Když to zkusíme, zjistíme, že pro jedničku to nefunguje.
Ze stejného důvodu neprojde další docela oblíbený pokus: Pro dané $z \in \mathbb{N}$ zvolíme m, n tak, že $n = z - m$ a $m = z - n$. Zde sice vzorce pro m, n máme, ale jsou zacyklené, takže to neplatí.

Poznámka: Pokud bychom T brali jako zobrazení $\mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N} \setminus \{1\}$, tak už bude na.
Dk: Dáno $z \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Zvolíme $m = 1$ a $n = z - 1$. Pak evidentně

$$T(m, n) = T(1, z - 1) = 1 + (z - 1) = z$$

a $m \in \mathbb{N}$. Víme $n \in \mathbb{Z}$ a díky $z \geq 2$ také $n \geq 1$, proto $n \in \mathbb{N}$ a tedy $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

Zkouškový speciál důkazový:
a) 1) $x, y \in A$ libov. $S(T(x)) = S(T(y)) \implies T(x) = T(y) \implies x = y$.
2) $n \circ n^2$ pro $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$.
$T(1) = a$, $S(a) = \alpha$, $S(b) = \alpha$.
3) $x, y \in A$ libov. $T(x) = T(y) \implies S(T(x)) = S(T(y)) \implies (S \circ T)(x) = (S \circ T)(y) \implies x = y$.
4) $c \in C$ libov. $\exists S(b) = c$ pak $\exists T(a) = b$ tedy $S(T(a)) = c$.
5) $T(n) = n$ $\mathbb{N} \mapsto Z$, $S(n) = n$ $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$.
6) $T(1) = a$, pak $S(a) = S(b) = \alpha$, $C = \{\alpha\}$.

b) $(T^{-1} \circ T^{-1}) \circ (T \circ T) = I_A$ a $(T \circ T) \circ (T^{-1} \circ T^{-1}) = I_B$.
c) $T(n) = -n$, $T(n) = n$ atd.
d) $(T^{-1} \circ S^{-1}) \circ (S \circ T) = I_A$ a $(S \circ T) \circ (T^{-1} \circ S^{-1}) = I_B$.