DMA Domácí úkol č. 11B

Tento úkol vypracujte po přednášce a před cvičením, na druhé straně je řešení.
Pokud vám něco není jasné, zeptejte se na cvičení nebo na konzultaci.

1. Dokažte, že posloupnost $\{2^n + n\}_{n=1}^{\infty}$ řeší rovnici $a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 1 - 2n$, $n \geq 1$ a splňuje počáteční podmínky $a_1 = 3$, $a_2 = 6$.

2. Najděte obecné řešení rovnice $a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 0$, $n \geq 2$.

Řešení:

1. Stačí dosadit navrhované a_n do rovnice, nejlépe začít levou stranou:

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = (2^{n+2} + (n+2)) - (2^{n+1} + (n+1)) - 2(2^n + n)$$
$$= 4 \cdot 2^n + n + 2 - 2 \cdot 2^n - n - 1 - 2 \cdot 2^n - 2n = 1 - 2n \text{ pro } n \geq 1.$$

Počáteční podmínky: $a_1 = 2^1 + 1 = 3$, $a_2 = 2^2 + 2 = 6$ souhlasí.

2. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$, odtud charakteristická čísla $\lambda = -2, 1$, proto obecné řešení $\{1^n u + (-2)^n v\}_{n=2}^{\infty} = \{u + (-2)^n v\}_{n=2}^{\infty}$.