DMA Domácí úkol č. 12a

Tento úkol vypracujte po přednášce a před cvičením, na druhé straně je řešení. Pokud vám něco není jasné, zeptejte se na cvičení nebo na konzultaci.

1. Pro tři rovnice odhadněte obecný tvar partikulárního řešení.
Rovnice nemusíte řešit, ale kdo chce, může.

a) $a_{n+1} - 3a_n = 2^n + n(-3)^n$;

b) $a_{n+1} - 2a_n = 2^n + n^2$;

c) $a_{n+1} - a_n = (n+1)2^n + 2$.

2. Najděte obecné řešení rovnice $a_{n+1} - 2a_n = 2n$, $n \geq 0$.

Řešení:

1. a) Homogenní verze má charakteristické číslo $\lambda = 3$. Také má řešení $a_{n,h} = 3^n u$, ale to nepotřebujeme.
Dva členy, jejich speciální čísla $\lambda = 2, -3$ nejsou rovny 3, tedy bez korekce.
Odhad: $a_{n,p} = A2^n + (Bn + C)(-3)^n$.
b) Homogenní verze má charakteristické číslo $\lambda = 2$. Také má řešení $a_{n,h} = 2^n u$, ale to nepotřebujeme.
Dva členy, první má základ $\lambda = 2$, tedy bude korekce, druhý má $\lambda = 1$ (bez korekce).
Odhad: $a_{n,p} = n \cdot A2^n + Bn^2 + Cn + D$.
c) Homogenní verze má charakteristické číslo $\lambda = 1$. Také má řešení $a_{n,h} = 1^n u = u$, ale to nepotřebujeme.
Dva členy, první má základ $\lambda = 2$, tedy bez korekce, druhý má $\lambda = 1$, bude korekce.
Odhad: $a_{n,p} = (An + B)2^n + n \cdot C$.

2. Homogenní: $\lambda - 2 = 0$, $\lambda = 2$, $a_{h,n} = 2^n u$.
Partikulární: odhad. Pravá strana: $b_n = 2n \cdot 1^n$. Zde $P(n) = 2n$ stupeň 1 proto odhad $Q(n) = An + B$, $\lambda = 1$ nerovno char. číslu proto není korekce, $m = 0$. Tedy uhádneme řešení $a_n = n^0(An + B)1^n = An + B$. Dosadit do rovnice:

$$\begin{aligned}(A(n+1) + B) - 2(An + B) = 2n &\implies An + A + B - 2An - 2B = 2n \\ &\implies -An + (A - B) = 2n \implies A = -2,\ B = -2.\end{aligned}$$

Partikulární řešení $a_{p,n} = (-2n - 2)$.
Obecné řešení: $a_n = a_{p,n} + a_{h,n} = -2 - 2n + 2^n u$ pro $n \geq 0$.
Alternativa: $\big\{2^n u - 2n - 2\big\}_{n=0}^{\infty}$.

Bonus: Obecná řešení pro příklad 1 jsou:
a) $a_n = -2^n + \big(-\frac{1}{6}n + \frac{1}{12}\big)(-3)^n + 3^n u$;
b) $a_n = \frac{1}{2}n2^n - n^2 - 2n - 3 + 2^n u$;
c) $a_n = (n-1)2^n + 2n + u$.
U řešení jsme nepsali rozsahy pro n, což není korektní, ale ony nebyly ani v zadání, což taky není korektní. Ony to vlastně nejsou opravdické rovnice, jen cvičné napodobeniny na nácvik odhadu tvaru řešení.