

DMA Domáci úkol č. 12A

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 13.

1. a) Najděte řešení pro rovnici $a_{n+2} - a_n = 0$, $n \geq 0$, které splňuje počáteční podmínky $a_0 = 0$, $a_1 = 2$.

b) Najděte obecné řešení pro rovnici $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}$, $n \geq 2$.

Jaká je jeho typická asymptotická rychlost růstu v nekonečnu?

Poznámka: Nezapomeňte rovnici nejprve upravit na standardní tvar.

2. Pro následující množiny rozhodněte, zda jsou konečné, spočetné či nespočetné. Svou odpověď dokažte.

Poznámka: Pokud v argumentech o mohutnosti pracujete s nějakými zobrazeními a jsou důležité jejich vlastnosti (prostota, na), tak je stačí zmínit, netřeba je podrobně dokazovat (tak to bude i u zkoušky). Ale z cvičných důvodů je zajímavé si alespoň důkazy prostoty udělat jako nácvik otázky o zobrazení.

a) M je množina všech vektorů z \mathbb{N}^2 , jejichž druhá složka je dvakrát větší než první.

Poznámka: $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) M je množina všech „matematických koláčů“ $\begin{pmatrix} a & b \\ c \end{pmatrix}$ pro $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Poznámka: Matematické koláče jsou objekty, které vznikají vložením tří celých čísel do formičky tvaru

koláče. Takže množina M obsahuje například objekty $\begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, atd. Nás zajímá, „kolik“ takových objektů je.

c) (bonus pro ty, které a a b nudí svou lehkostí)

M je množina všech přirozených čísel, která **nejsou** dělitelná třemi.