DMA Domácí úkol č. 12A

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 13.

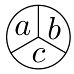
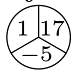
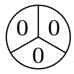
1. a) Najděte řešení pro rovnici $a_{n+2} - a_n = 0$, $n \geq 0$,
které splňuje počáteční podmínky $a_0 = 0$, $a_1 = 2$.

b) Najděte obecné řešení pro rovnici $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}$, $n \geq 2$.
Jaká je jeho typická asymptotická rychlost růstu v nekonečnu?
Poznámka: Nezapomeňte rovnici nejprve upravit na standardní tvar.

2. Pro následující množiny rozhodněte, zda jsou konečné, spočetné či nespočetné. Svou odpověď dokažte.

Poznámka: Pokud v argumentech o mohutnosti pracujete s nějakými zobrazeními a jsou důležité jejich vlastnosti (prostota, na), tak je stačí zmínit, netřeba je podrobně dokazovat (tak to bude i u zkoušky). Ale z cvičných důvodů je zajímavé si alespoň důkazy prostoty udělat jako nácvik otázky o zobrazení.

a) M je množina všech vektorů z $\mathbb{N}^2$, jejichž druhá složka je dvakrát větší než první.
Poznámka: $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) M je množina všech „matematických koláčů“  pro $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
Poznámka: Matematické koláče jsou objekty, které vznikají vložením tří celých čísel do formičky tvaru koláče. Takže množina M obsahuje například objekty , , , atd. Nás zajímá, „kolik“ takových objektů je.

c) (bonus pro ty, které a a b nudí svou lehkostí)
M je množina všech přirozených čísel, která **nejsou** dělitelná třemi.

Řešení:

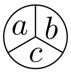
1. a) Charakteristická rovnice $\lambda^2 - \lambda^0 = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$,
odtud charakteristická čísla $\lambda = \pm 1$, proto obecné řešení $a_n = 1^n u + (-1)^n v = u + (-1)^n v$, $n \geq 0$.
Počáteční podmínky dávají $a_0 = u + v = 0$, $a_1 = u - v = 2$. Odtud $u = 1$, $v = -1$, proto řešení $a_n = 1 - (-1)^n$, $n \geq 0$.
Mimochodem, je to posloupnost $(0, 2, 0, 2, 0, 2, 0 \dots)$.
Poznámky:
• Občas někdo zapomene dát -1 do závorky při vyrábění posloupností. Pozor, -1^n není totéž co $(-1)^n$.
Například $-1^2 = -1$, ale $(-1)^2 = 1$.
• Pokud zadáváme posloupnost vzorcem, tak vždy musíme říct, odkud kam běhá index. Vzorec $a_n = 1 - (-1)^n$ tedy nestačí. Ti, kdo píšou odpovědi jako $(1 - (-1)^n)_{n=0}^{\infty}$, mají vystaráno.
• Nestačí napsat $u = 1$, $v = -1$. Otázka zní „najdi řešení“, takže ho musíme ukázat.

b) Přepis rovnice: $a_{n+1} - 6a_n + 9a_{n-1} = 0$, $n \geq 2$.
Posun indexu: $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$, $n \geq 1$.
Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 6\lambda^1 + 9\lambda^0 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$,
odtud charakteristická čísla $\lambda = 3, 3$ neboli $\lambda = 3$ $(2\times)$.
Proto obecné řešení (viz speciální trik) $a_n = 3^n u + n3^n v$, $n \geq 1$.
V typickém případě (tedy $u, v \neq 0$) je $a_n = \Theta(n3^n)$ nebo také $a_n \sim n3^n v$ pro $n \sim \infty$.

2. a) Máme $M = \{(1, 1), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \dots\}$.
Množinu lze vyjádřit jako $M = \{(n, 2n) : n \in \mathbb{N}\}$. Z toho se nabízí zobrazení $T(n) = (n, 2n)$, které je vlastně bijekce $\mathbb{N} \overset{\text{na}}{\mapsto} M$. Množiny $\mathbb{N}$ a M tedy mají stejnou mohutnost, proto je M **spočetná**.

Je také možno ušetřit důkaz surjektivity a postupovat takto:
1. Zobrazení $T(n) = (n, 2n)$ je prosté $\mathbb{N} \mapsto M$, proto $|\mathbb{N}| \leq |M|$.
2. Evidentně $M \subseteq \mathbb{N}^2$, proto $|M| \leq |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
Spojením nerovností dostaneme $|M| = |\mathbb{N}|$.
Bonus: Důkazy vlastností pro $T(n) = (n, 2n)$.
Prostota: Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $T(m) = T(n)$. Pak $(m, 2m) = (n, 2n)$, odtud $m = n$.

Na: Dáno $b \in M$. Dle definice M musí být $b = (a, 2a)$ pro nějaké $a \in \mathbb{N}$. Toto a pak splňuje $T(a) = (a, 2a) = b$.

b) „Matematické koláče“ jsou vlastně jen jinak zapsané třísložkové vektory. (Proč tak vlastně vektory nepíšeme? Bylo by to hezčí.) Množina M je proto spočetná, formálně to potvrdí dosti zjevná bijekce T: 

$\mapsto (a, b, c)$ vedoucí $M \mapsto \mathbb{Z}^3$. Proto $|M| = |\mathbb{Z}^3|$ a také víme, že $|\mathbb{Z}^3| = |\mathbb{N}|$, tedy $|M| = |\mathbb{N}|$.

c) Je snadné si představit, že množinu $M = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, \dots\}$ dokážeme propojit s $\mathbb{N}$, popřípadě očíslovat. Vzniká něco, co by měla být bijekce:

$$1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 4,\ 4 \mapsto 5,\ 5 \mapsto 7,\ \dots$$

Abychom ale dokázali, že je to bijekce, musíme mít pro ni vzorec, a to je dost obtížná záležitost (viz konec). Je proto lepší zkusit jinou strategii.

1. Protože $M \subseteq \mathbb{N}$, máme $|M| \leq |\mathbb{N}|$. Množina M tedy určitě není nespočetná, jinak řečeno je nejvýše spočetná.
2. Cítíme, že je **spočetná**, tedy potřebovali bychom ukázat nerovnost $|\mathbb{N}| \leq |M|$. Jak to dokážeme? Nabízí se dvě cesty.

• Chceme-li dokázat onu nerovnost, pak bychom podle definice měli najít prosté zobrazení T: $\mathbb{N} \mapsto M$. Hledáme vzoreček, jehož výstupy by nikdy nebyly dělitelné trojkou, což je otázka inspirace, buď přijde, nebo ne (v tomto je občas matematika podobná umění a tak trochu zrádná).
Mě napadlo zobrazení $T(n) = 3n - 1$. Vede $\mathbb{N} \mapsto M$, protože čísla ve tvaru $3n + 1$ nejsou dělitelná třemi (dávají jedničku modulo 3). Jelikož je T prosté, máme $|\mathbb{N}| \leq |M|$, což spolu s opačnou nerovností potvrzuje spočetnost M.
Studenty napadají i jiné věci, třeba $T(n) = 2^n$ nebo $3^n - 1$.
Bonus: Důkazy vlastností pro $T(n) = 3n - 1$.
Prostota: Dáno $m, n \in \mathbb{N}$, předp. $T(m) = T(n)$. Pak $3m - 1 = 3n - 1$, tedy $m = n$.

• Existuje jeden snadný argument: Protože je M nekonečná, podle věty z přednášky platí $|\mathbb{N}| \leq |M|$. Takže $|M| = |\mathbb{N}|$ neboli M je spočetná.
Tento důkaz má problém, že by se někdo mohl zeptat, jak víme, že je M nekonečná. Obvykle se toto ukazuje tak, že v ní najdeme kopii přirozených čísel, což se dělá pomocí prostého zobrazení z $\mathbb{N}$ do dotyčné množiny. To nás ale vlastně vrátí na předchozí způsob řešení.
Dá se to nějak obejít? Jedna finta mě napadla. Víme, že prvočísel je nekonečně mnoho. To pak platí i pro prvočísla jiná než 3 (označme jejich množinu $P_{\not 3}$) a ta určitě nejsou dělitelná třemi, proto $P_{\not 3} \subseteq M$. To ukazuje, že také M musí být nekonečná.
Jiná finta nalezená studenty: Sporem. Kdyby byla M konečná, tak musí mít největší prvek, třeba m. To je přirozené číslo nedělitelné trojkou, pak ovšem také číslo $m + 3$ je nedělitelné trojkou a přirozené, tedy $m + 3 \in M$. Protože je m největší, máme $m + 3 \leq m$ neboli $3 \leq 0$, což je spor.

Zajímavá alternativa: je možno napsat

$$M = \{3k - 2 :\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{3k - 1 :\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Pomocí bijekce $k \mapsto 3k + 1$, popřípadě $k \mapsto 3k + 2$ hravě ukážeme, že ty dvě množiny napravo jsou spočetné, tudíž i jejich sjednocení musí být spočetné.

Poznámka pro zvídavé: Jak mohou vypadat bijekce $\mathbb{N} \mapsto M$ pro čísla nedělitelná třemi?
Například $T(n) = n + \left\lfloor \frac{1}{2}(n-1) \right\rfloor$ (používá zaokrouhlení dolů), popřípadě $T(n) = n - 1 + \left\lceil \frac{1}{2} n \right\rceil$ (zaokrouhlení nahoru). Lze také použít $T(n) = n + \left\lfloor \frac{1}{2}(n-1) \right\rfloor$ jako bijekci $\mathbb{N}_0 \mapsto M$. Teď ovšem zkuste dokázat, že jsou prostá a na.

Další alternativa je definice indukcí:

$$T(1) = 1,\ T(2) = 2;\ T(n+1) = T(n-1) + 1 \text{ pro } n \geq 2.$$

Opět drobný problém: jak dokázat prostotu. Musela by se použít indukce. Studenty napadlo i toto:

$$T(1) = 1,\ T(2) = 2;\ T(n+1) = T(n) + T(n) \bmod 3 \text{ pro } n \geq 2.$$

Používá se tam zbytek po dělení třema. Zde má opravdu cyklus délku 3, protože v cílovém prostoru máme 3-periodický obrazec.