DMA Domácí úkol č. 13A

Tento úkol vypracujte a pokud budete chtít, pošlete jej vyučujícímu.

1. Najděte řešení rovnice $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot 2^n + 8n - 8$, $n \geq 1$ splňující počáteční podmínky $a_0 = 3$, $a_1 = 9$.
(Tento má trochu lehčí pravou stranu.)

2. Najděte řešení rovnice $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} + 9 \cdot 2^n + 2n - 7$, $n \geq 3$ splňující počáteční podmínky $a_2 = 16$, $a_3 = 31$.
(Tady je pravá strana už zkouškové obtížnosti.)

3. Funkce f je zadána $f(1) = 13$ a vzorcem $f(n) = f\left(\frac{n}{3}\right) + 2$ pro vhodná $n \in \mathbb{N}$. Intuitivním výpočtem odvoďte explicitní vzorec pro f a napište jej ve tvaru $f(n) = \cdots$. Nezapomeňte uvést, pro jaká n je tento vzorec platný.

Řešení:

1. Nejprve přesuneme neznámé nalevo a posuneme index, ať má rovnice správný tvar. Nezapomeneme to udělat napravo:

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n &= \tfrac{1}{2} \cdot 2^{n+1} + 8(n+1) - 8,\ n+1 \geq 1 \\ a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n &= 2^n + 8n,\ n \geq 0. \end{aligned}$$

1. Obecné řešení?
a) Homogenní: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, $(\lambda-3)^2 = 0$, $\lambda = 3(2\times)$, $a_{h,n} = u \cdot 3^n + v \cdot n3^n$.
b) Partikulární: Pravá strana má dvě části.
1. $2^n = 1 \cdot 2^n$, zde $p(n) = 1$, stupeň 0 proto odhad $q(n) = A$. $\lambda = 2$ nerovno char. číslu, proto není korekce. Dostáváme $A \cdot 2^n = A2^n$.
2. $8n \cdot 1^n$, zde $p(n) = 8n$, stupeň 1 proto odhad $q(n) = Bn + C$, $\lambda = 1$ nerovno char. číslu, proto není korekce, $m = 0$. Dostáváme $(Bn + C) \cdot 1^n = Bn + C$.
Celkově uhádneme tvar řešení $a_{p,n} = A2^n + Bn + C$.
Dosadit do levé strany rovnice, upravit, porovnat s pravou:

$$\begin{aligned} L &= [A2^{n+2} + B(n+2) + C] - 6[A2^{n+1} + B(n+1) + C] + 9[A2^n + Bn + C] \\ &= [4A2^n + Bn + 2B + C] - [12A2^n + 6Bn + 6B + 6C] + [9A2^n + 9Bn + 9C] \\ &= A2^n + 4Bn + (-4B + 4C) \stackrel{?}{=} 1 \cdot 2^n + 8n + 0 \\ &\qquad \Longrightarrow A = 1,\ B = 2,\ C = 2. \end{aligned}$$

Partikulární řešení $a_{p,n} = 2^n + 2n + 2$.
c) Obecné řešení: $a_n = a_{p,n} + a_{h,n} = 2^n + 2n + 2 + u3^n + vn3^n$, $n \geq 0$.
2. Poč. podmínky:

$$\begin{matrix} a_0 = 3 \\ a_1 = 9 \end{matrix} \iff \begin{matrix} 2^0 + 0 + 2 + 3^0u + 0 \cdot 3^0 v = 3 \\ 2^1 + 2 + 2 + 3^1u + 1 \cdot 3^1 v = 9 \end{matrix} \iff \begin{matrix} u = 0 \\ 3u + 3v = 3 \end{matrix}.$$

Odtud $u = 0$, $v = 1$.
Závěr: Řešením je posloupnost $a_n = 2^n + 2n + 2 + n3^n$, $n \geq 0$.

Poznámka: Jednotlivé etapy není třeba číslovat a písmenkovat, tady to dělám kvůli návaznosti na přednášku/seminář. Když normálně řeším rovnici, tak to někdy nedělám a někdy ano, podle nálady. Je to na vás, jak to chcete hrát, hlavně ať je to přehledné.

Poznámka: Oblíbenou chybou je zapomenout při posouvání indexu upravit také pravou stranu. Vlastně tak vznikne alternativní příklad. Pokud jste jej počítali a vyšlo vám $A = \frac{1}{2}$, $B = 2$, $C = 0$, tak jste počítali správně. U počátečních podmínek pak vyjdou zlomky.

2. Nejprve přesuneme neznámé nalevo a posuneme index, ať má rovnice správný tvar. Nezapomeneme to udělat napravo:

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n &= 9 \cdot 2^{n+1} + 2(n+1) - 7,\ n+1 \geq 3 \\ a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n &= 18 \cdot 2^n + 2n - 5,\ n \geq 2. \end{aligned}$$

1. Obecné řešení?

a) Homogenní: $\lambda^2-\lambda-2=0$, $\lambda=-1,2$, $a_{h,n}=u\cdot 2^n+v\cdot(-1)^n$.
b) Partikulární: Pravá strana má dvě části.
1. $18\cdot 2^n$, zde $p(n)=18$, stupeň 0 proto odhad $q(n)=A$. $\lambda=2$ rovno char. číslu, proto je korekce, $m=1$. Dostáváme $n^1\cdot A\cdot 2^n=An2^n$.
2. $(2n-5)\cdot 1^n$, zde $p(n)=2n-5$, stupeň 1 proto odhad $q(n)=Bn+C$, $\lambda=1$ nerovno char. číslu, proto není korekce. Dostáváme $(Bn+C)\cdot 1^n=Bn+C$.
Celkově uhádneme tvar řešení $a_{p,n}=An2^n+Bn+C$.
Dosadit do levé strany rovnice, upravit, porovnat s pravou:

$$\begin{aligned}
L &= [A(n+2)2^{n+2}+B(n+2)+C]-[A(n+1)2^{n+1}+B(n+1)+C]\\
&\qquad\qquad -2[An2^n+Bn+C]\\
&=[4An2^n+8A2^n+Bn+2B+C]-[2An2^n+2A2^n+Bn+B+C]\\
&\qquad -[2An2^n+2Bn+2C]\\
&=6A2^n-2Bn+(B-2C)\overset{?}{=}18\cdot 2^n+2n-5\\
&\qquad \Longrightarrow\ A=3,\ B=-1,\ C=2.
\end{aligned}$$

Partikulární řešení $a_{p,n}=3n2^n+2-n$.
c) Obecné řešení: $a_n=a_{p,n}+a_{h,n}=3n2^n+2-n+u2^n+v(-1)^n$, $n\geq 2$.
2. Poč. podmínky:

$$\begin{matrix} a_2=16 \\ a_3=31 \end{matrix} \iff \begin{matrix} 24+2^2u+(-1)^2v=16 \\ 71+2^3u+(-1)^3v=31 \end{matrix} \iff \begin{matrix} 4u+v=-8 \\ 8u-v=-40 \end{matrix}.$$

Odtud $u=-4$, $v=8$.
Závěr: Řešením je posloupnost $a_n=3n2^n+2-n-4\cdot 2^n+8\cdot(-1)^n$, $n\geq 2$.

Poznámka: Oblíbenou chybou je zapomenout při posouvání indexu upravit také pravou stranu. Vlastně tak vznikne alternativní příklad. Pokud jste jej počítali a vyšlo vám $A=\frac{3}{2}$, $B=-1$, $C=3$, tak jste počítali správně. U počátečních podmínek pak vyjdou zlomky.

3. Pokud $f(1)=13$, pak $f(3)=f(1)+2=15$, $f(9)=f(3)+2=17=13+4$, $f(27)=19=13+6$, $f(3^4)=21=13+8=13+2\cdot 4$, $f(3^5)=23=13+2\cdot 5$.
Tento výpočet může být pro někoho snadnější, pokud si pomocí substituce $\frac{n}{3}=m$ rovnici přepíše jako $f(3m)=f(m)+2$ pro $m\geq 1$.
Pro čísla v „mezerách“ f spočítat neumíme, třeba nevíme, co je $f(2)$.
Vzorec se odhaduje lépe, pokud si zachováme informaci o vzniku výsledků:
$f(3)=13+2$,
$f(3^2)=13+2+2$,
$f(3^3)=13+2+2+2$,
$f(3^4)=13+2+2+2+2$, atd.
Odhadneme, že $f(3^k)=2k+13$. Přepis pomocí substituce $n=3^k$: $f(n)=2\log_3(n)+13$ pro $n\in\{3^k;\ k\in\mathbb{N}_0\}$.
Také bych bral $f(n)=2\log_3(n)+13$ pro $n=3^k$, $k\in\mathbb{N}_0$.