DMA Přednáška – Relace

Definice.
Nechť A, B jsou množiny. Libovolná podmnožina $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ se nazývá **relace** z A do B.
Jestliže $(a, b) \in \mathcal{R}$, pak to značíme $a\mathcal{R}b$ a řekneme, že a **je v relaci k** b vzhledem k $\mathcal{R}$.

Definice.
Nechť A je množina. Řekneme, že $\mathcal{R}$ je relace na A, jestliže je to relace z A do A.

Příklad: Uvažujme malou školu se studenty **F**rodo, **M**erry, **P**ippin a **S**am, škola nabízí kursy **c**estování, **d**iskrétní matiky, **e**lfštiny a **f**rodologie.
Frodo si zapsal cestování a elfštinu, Merry a Pippin si zapsali cestování a diskrétku, Sam si zapsal elfštinu a frodologii.

Definice.
Nechť $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ a $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ jsou množiny. Pro relaci $\mathcal{R}$ z A do B definujeme **matici relace** $M_{\mathcal{R}} = (m_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ předpisem

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in \mathcal{R}; \\ 0, & (a_i, b_j) \notin \mathcal{R}. \end{cases}$$

Příklad: Nechť je A množina všech měst (v České republice, aby jich nebylo tolik). Nechť $\mathcal{R}_1$ je relace na A definovaná tak, že $a\mathcal{R}_1b$ právě tehdy, jestli se dá z a do b dostat autobusem, a $\mathcal{R}_2$ je relace na A definovaná tak, že $a\mathcal{R}_2b$ právě tehdy, jestli se dá z a do b dostat vlakem.

Definice.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace z nějaké množiny A do nějaké množiny B. Definujeme **relaci inverzní k** $\mathcal{R}$, značeno $\mathcal{R}^{-1}$, jako relaci z B do A předpisem

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

Tedy

$$b\mathcal{R}^{-1}a \text{ právě tehdy, když } a\mathcal{R}b.$$

Definice.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace z nějaké množiny A do nějaké množiny B a $\mathcal{S}$ je relace z B do nějaké množiny C. Definujeme jejich **složení** $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ jako relaci z A do C definovanou

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \big\{(a,c) \in A \times C : \exists b \in B\colon\ [(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{S}]\big\}.$$

Alternativní značení: $\mathcal{R}\,\boldsymbol{;}\mathcal{S}$, $\mathcal{R} \odot \mathcal{S}$, $\mathcal{R} \circ_l \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \circ_r \mathcal{R}$, $\dots$

Příklad: Připomeňme, že $A = \{F, M, P, S\}$ jsou studenti, $B = \{b, c, d, e\}$ kursy a relace
$\mathcal{R} = \{(F,c),(F,e),(M,c),(M,d),(P,c),(P,d),(S,e),(S,f)\}$ říká, který student si zapsal jaký kurs.
Množina učitelů $C = \{$Tom $\mathcal{B}$ombadil, $\mathcal{E}$lrond, $\mathcal{G}$andalf$\}$,
relace který kurs je učen kterým učitelem: $\mathcal{S} = \{(c,\mathcal{G}),(d,\mathcal{B}),(e,\mathcal{E}),(f,\mathcal{G})\}$.

Fakt.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace z nějaké množiny A do nějaké množiny B, $\mathcal{S}$ je relace z B do nějaké množiny C a $\mathcal{T}$ je relace z C do nějaké množiny D. Pak $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.

Definice.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na nějaké množině A. Pak definujeme její **mocninu** rekurzivně jako
(0) $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$;
(1) $\mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Definice.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A.
Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **reflexivní**, jestliže pro všechna $a \in A$ platí $a\mathcal{R}a$.
Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **symetrická**, jestliže pro všechna $a, b \in A$ platí $a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$.
Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **antisymetrická**, jestliže pro všechna $a, b \in A$ platí $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \implies a = b$.
Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **tranzitivní**, jestliže pro všechna $a, b, c \in A$ platí $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \implies a\mathcal{R}c$.