

## DMA Přednáška – Relace

**Definice.**

Nechť  $A, B$  jsou množiny. Libovolná podmnožina  $\mathcal{R} \subseteq A \times B$  se nazývá **relace** z  $A$  do  $B$ . Jestliže  $(a, b) \in \mathcal{R}$ , pak to značíme  $a\mathcal{R}b$  a řekneme, že  $a$  je v **relaci**  $k$   $b$  vzhledem k  $\mathcal{R}$ .

**Definice.**

Nechť  $A$  je množina. Řekneme, že  $\mathcal{R}$  je relace na  $A$ , jestliže je to relace z  $A$  do  $A$ .

**Příklad:** Uvažujme malou školu se studenty **Frodo**, **Merry**, **Pippin** a **Sam**, škola nabízí kurzy cestování, **diskrétní** matematiky, **elfštiny** a **frodologie**.

Frodo si zapsal cestování a elfštinu, Merry a Pippin si zapsali cestování a diskrétku, Sam si zapsal elfštinu a frodologii.

**Definice.**

Nechť  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  a  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  jsou množiny. Pro relaci  $\mathcal{R}$  z  $A$  do  $B$  definujeme **matici relace**  $M_{\mathcal{R}} = (m_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$  předpisem

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in \mathcal{R}; \\ 0, & (a_i, b_j) \notin \mathcal{R}. \end{cases}$$

**Příklad:** Nechť je  $A$  množina všech měst (v České republice, aby jich nebylo tolik). Nechť  $\mathcal{R}_1$  je relace na  $A$  definovaná tak, že  $a\mathcal{R}_1b$  právě tehdy, jestli se dá z  $a$  do  $b$  dostat autobusem, a  $\mathcal{R}_2$  je relace na  $A$  definovaná tak, že  $a\mathcal{R}_2b$  právě tehdy, jestli se dá z  $a$  do  $b$  dostat vlakem.

**Definice.**

Nechť  $\mathcal{R}$  je relace z nějaké množiny  $A$  do nějaké množiny  $B$ . Definujeme **relaci inverzní k  $\mathcal{R}$** , značeno  $\mathcal{R}^{-1}$ , jako relaci z  $B$  do  $A$  předpisem

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

Tedy

$$b\mathcal{R}^{-1}a \text{ právě tehdy, když } a\mathcal{R}b.$$

**Definice.**

Nechť  $\mathcal{R}$  je relace z nějaké množiny  $A$  do nějaké množiny  $B$  a  $\mathcal{S}$  je relace z  $B$  do nějaké množiny  $C$ . Definujeme jejich **složení**  $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$  jako relaci z  $A$  do  $C$  definovanou

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B : [(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{S}]\}.$$

Alternativní značení:  $\mathcal{R};\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{R} \odot \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{R} \circ_l \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S} \circ_r \mathcal{R}$ , ...

**Příklad:** Pripomeňme, že  $A = \{F, M, P, S\}$  jsou studenti,  $B = \{b, c, d, e\}$  kurzy a relace  $\mathcal{R} = \{(F, c), (F, e), (M, c), (M, d), (P, c), (P, d), (S, e), (S, f)\}$  říká, který student si zapsal jaký kurs.

Množina učitelů  $C = \{\text{Tom Bombadil}, \text{Elrond}, \text{Gandalf}\}$ ,

relace který kurs je učen kterým učitelem:  $\mathcal{S} = \{(c, \mathcal{G}), (d, \mathcal{B}), (e, \mathcal{E}), (f, \mathcal{G})\}$ .

**Fakt.**

Nechť  $\mathcal{R}$  je relace z nějaké množiny  $A$  do nějaké množiny  $B$ ,  $\mathcal{S}$  je relace z  $B$  do nějaké množiny  $C$  a  $\mathcal{T}$  je relace z  $C$  do nějaké množiny  $D$ . Pak  $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$ .

**Definice.**

Nechť  $\mathcal{R}$  je relace na nějaké množině  $A$ . Pak definujeme její **mocninu** rekurzivně jako

$$(0) \mathcal{R}^1 = \mathcal{R};$$

$$(1) \mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^n \text{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

**Definice.**

Nechť  $\mathcal{R}$  je relace na množině  $A$ .

Řekneme, že  $\mathcal{R}$  je **reflexivní**, jestliže pro všechna  $a \in A$  platí  $a\mathcal{R}a$ .

Řekneme, že  $\mathcal{R}$  je **symetrická**, jestliže pro všechna  $a, b \in A$  platí  $a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$ .

Řekneme, že  $\mathcal{R}$  je **antisymetrická**, jestliže pro všechna  $a, b \in A$  platí  $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \implies a = b$ .

Řekneme, že  $\mathcal{R}$  je **tranzitivní**, jestliže pro všechna  $a, b, c \in A$  platí  $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \implies a\mathcal{R}c$ .