

DMA Přednáška – Speciální relace

Definice.

Nechť \mathcal{R} je relace na nějaké množině A . Řekneme, že \mathcal{R} je **částečné uspořádání**, jestliže je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

V tom případě značíme relaci \preceq a řekneme, že dvojice (A, \preceq) je **částečně uspořádaná množina**.

Fakt.

Jestliže je (A, \preceq) částečně uspořádaná množina, pak je i (A, \preceq^{-1}) částečně uspořádaná množina.

Definice.

Nechť (A, \preceq) je částečné uspořádání. Definujeme relaci \prec na A předpisem

$$a \prec b \text{ právě tehdy, když } a \preceq b \text{ a } a \neq b.$$

Algoritmus pro vytváření Hasseova diagramu částečného uspořádání (A, \preceq) pro konečnou množinu A .

1. Najít prvky $a \in A$, které v ostrém srovnání nikdy nejsou napravo, tedy v pozici $x \prec a$ (nevedou do nich šipky). Dát do spodní řady. Odebrat tyto prvky z A , odebrat všechna srovnání s těmito body.

2. Ve zbylé množině hledat prvky, které v ostrém srovnání nikdy nejsou napravo (nevedou do nich šipky). Dát do druhé řady zdola, odebrat je z množiny prvků.

Spojit horní řadu s dolní tam, kde je relace, odebrat tyto dvojice ze seznamu srovnání.

3. Ve zbylé množině hledat prvky, které ve srovnání \prec nikdy nejsou napravo (nevedou do nich šipky). Vytvořit z nich novou řadu nahoře, odebrat z množiny prvků.

Spojit horní řadu s nižšími tam, kde je relace, přičemž postupujeme shora dolů (nejprve spojujeme horní řadu s tou pod ní, pak horní s tou o jedno níže, atd. až po horní s dolní). Existující dvojice vyškrtáváme ze seznamu, ale do grafu je kreslíme jen tehdy, pokud ještě tuto cestu nelze absolvovat pomocí již nakreslených spojit, a to vždy směrem zdola nahoru.

4. Opakovat krok 3., dokud jsou v množině body.

Definice.

Nechť (A, \preceq) je částečně uspořádaná množina a \prec odpovídající odvozená relace. Nechť M je neprázdná podmnožina A .

Řekneme, že prvek $m \in A$ je **nejmenší prvek** množiny M , jestliže $m \in M$ a pro všechna $x \in M$ platí $m \preceq x$.

Řekneme, že prvek $m \in A$ je **největší prvek** množiny M , jestliže $m \in M$ a pro všechna $x \in M$ platí $x \preceq m$.

Řekneme, že prvek $m \in A$ je **minimální prvek** množiny M , jestliže $m \in M$ a neexistuje $x \in M: x \prec m$.

Značíme to $m = \min(M)$.

Řekneme, že prvek $m \in A$ je **maximální prvek** množiny M , jestliže $m \in M$ a neexistuje $x \in M: m \prec x$.

Značíme to $m = \max(M)$.

Věta.

Nechť je (A, \preceq) částečně uspořádaná množina, uvažujme neprázdnou podmnožinu $M \subseteq A$. Pak platí následující:

(i) Jestliže existuje nejmenší prvek M , pak je jediný.

Jestliže existuje největší prvek M , pak je jediný.

(ii) Jestliže je m nejmenší prvek M , pak $m = \min(M)$ a jiné minimum už není.

Jestliže je m největší prvek M , pak $m = \max(M)$ a jiné maximum už není.

Věta.

Nechť (A, \preceq) je částečně uspořádaná množina. Jestliže je M konečná neprázdná podmnožina A , pak existuje $\min(M)$ a $\max(M)$.

Definice.

Nechť (A, \preceq) je částečně uspořádaná množina. Řekneme, že $a, b \in A$ jsou **porovnatelné**, jestliže $a \preceq b$ nebo $b \preceq a$.

Definice.

Nechť (A, \preceq) je částečně uspořádaná množina. Řekneme, že \preceq je **lineární uspořádání**, jestliže jsou každé dva prvky z A porovnatelné.

Věta.

Nechť (A, \preceq) je lineárně uspořádaná množina. Jestliže je M její neprázdná konečná podmnožina, pak má nejmenší a největší prvek.

Věta.

Nechť (A, \preceq) je konečná částečně uspořádaná množina. Je to lineární uspořádání právě tehdy, jestliže lze prvky A napsat jako $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ tak, aby $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_n$.

Definice.

Nechť (A, \preceq) je částečně uspořádaná množina. Relace \preceq_L na A se nazývá **lineární rozšíření** relace \preceq , jestliže je (A, \preceq_L) lineárně uspořádaná množina a $\preceq \subseteq \preceq_L$, tedy pro všechna $a, b \in A$ splňující $a \preceq b$ platí i $a \preceq_L b$.

Věta.

Pro každou konečnou částečně uspořádanou množinu (A, \preceq) existuje lineární rozšíření \preceq_L na A .

procedure *topological sort*((A, \preceq))

$k := 0$;

while $A \neq \emptyset$ do

$k := k + 1$

$a_k := \min(A)$

$A := A - \{a_k\}$;

output: $(a_1 \prec_L a_2 \prec_L \dots \prec_L a_k)$;

Definice.

Nechť (A, \preceq) je částečně uspořádaná množina. Řekneme, že (A, \preceq) je **dobře uspořádaná množina**, jestliže každá neprázdná podmnožina množiny A má nejmenší prvek.

Fakt.

Každé dobré uspořádání je také lineární.

Axiom (princip dobrého uspořádání)

(\mathbb{N}, \leq) je dobře uspořádaná množina.

Definice.

Uvažujme částečně uspořádané množiny $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_n, \preceq_n)$. Definujeme **lexikografické uspořádání** na $A = A_1 \times \dots \times A_n$ následovně: Pro $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in A$ platí $a \preceq_L b$ právě tehdy, jestliže $a_i = b_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$ (tedy $a = b$), nebo existuje index k takový, že $a_i = b_i$ pro všechna i splňující $1 \leq i < k$ a $a_k \prec_k b_k$.

Věta.

Uvažujme dobře uspořádané množiny $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_n, \preceq_n)$. Pak je $A = A_1 \times \dots \times A_n$ spolu s lexikografickým uspořádáním \preceq_L dobře uspořádaná množina.

Definice.

Relace na množině se nazývá **ekvivalence**, jestliže je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Definice.

Nechť \mathcal{R} je relace ekvivalence na nějaké množině A .

Pro $a \in A$ definujeme **třidu ekvivalence** prvku a vzhledem k \mathcal{R} jako

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{b \in A : a\mathcal{R}b\}.$$

Věta.

Nechť \mathcal{R} je relace ekvivalence na nějaké množině A , nechť $a \in A$.

(i) Pro každé $b, c \in [a]_{\mathcal{R}}$ platí $b\mathcal{R}c$.

(ii) Pro každé $b \in [a]_{\mathcal{R}}$ a $c \in A$ platí, že jestliže $b\mathcal{R}c$, pak $c \in [a]_{\mathcal{R}}$.

(iii) Pro každé $b \in [a]_{\mathcal{R}}$: $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.

(iv) Pro každé $a, b \in A$ platí: $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.

(v) Pro všechna $a, b \in A$ platí, že buď $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$, nebo $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.

Definice.

Uvažujme množinu A . Jejím **rozkladem** rozumíme libovolný soubor $\{A_i\}_{i \in I}$ neprázdných podmnožin A takových, že $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ a pro všechna $i \neq j \in I$ jsou A_i, A_j disjunktní.

Věta.

Nechť A je množina.

(i) Jestliže je \mathcal{R} ekvivalence na A , pak $\{[a]_{\mathcal{R}}\}_{a \in A}$ je rozklad množiny A .

(ii) Jestliže je $\{A_i\}_{i \in I}$ nějaký rozklad množiny A , pak existuje relace ekvivalence \mathcal{R} na A taková, že $\{A_i\}_{i \in I}$ jsou přesně třídy ekvivalence \mathcal{R} .

Věta.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je relace „být kongruentní modulo n “ ekvivalence na \mathbb{Z} .

Definice.

Prostor \mathbb{Z}_n definujeme jako množinu všech tříd ekvivalence v \mathbb{Z} vzhledem k relaci být kongruentní modulo n , tedy $\mathbb{Z}_n = \{[a]_n : a \in \mathbb{Z}\}$.

Pro $[a]_n, [b]_n \in \mathbb{Z}_n$ definujeme

$$[a]_n \oplus [b]_n = [a + b]_n,$$

$$[a]_n \odot [b]_n = [a \cdot b]_n.$$

Věta.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, uvažujme $a, b, u, v \in \mathbb{Z}$ takové, že $[a]_n = [u]_n$ a $[b]_n = [v]_n$. Pak $[a + b]_n = [u + v]_n$ a $[a \cdot b]_n = [u \cdot v]_n$.

Věta.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, uvažujme $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$.

(i) Vždy existuje prvek opačný $-[a]_n = [n - a]_n$.

(ii) $[a]_n$ je invertibilní vůči \odot právě tehdy, když jsou a a n nesoudělné.