

## DMA Přednáška – Zobrazení

**Definice.**

Nechť  $A, B$  jsou množiny a  $T$  je podmnožina  $A \times B$ .

Řekneme, že je to **zobrazení** z  $A$  do  $B$ , jestliže

pro každé  $a \in A$  existuje právě jedno  $b \in B$  splňující  $(a, b) \in T$ .

Zobrazení  $T$  z  $A$  do  $B$  značíme  $T: A \mapsto B$ .

Množina  $A$  se nazývá **definiční obor**  $T$ , značeno  $D(T)$ , množina  $B$  je cílová množina  $T$ .

Definujeme také **obor hodnot**  $T$  jako

$$R(T) = \{b \in B : \exists a \in A: T(a) = b\} = \{T(a) : a \in A\}.$$

**Definice.**

Nechť  $T: A \mapsto B$  a  $S: C \mapsto D$  jsou zobrazení. Řekneme, že jsou si rovna, značeno  $T = S$ , jestliže  $A = C$ ,  $B = D$  a

$$\forall a \in A: T(a) = S(a).$$

**Definice.**

Nechť  $S: A \mapsto B$  a  $T: B \mapsto C$  jsou zobrazení. Definujeme jejich **složené zobrazení** či **kompozici**  $T \circ S: A \mapsto C$  předpisem

$$(T \circ S)(a) = T(S(a)) \text{ pro } a \in A.$$

Značíme také  $T \circ S = T(S)$ .

**Věta.**

Nechť  $R: A \mapsto B$ ,  $S: B \mapsto C$  a  $T: C \mapsto D$  jsou zobrazení. Pak platí  $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$ .

**Definice.**

Nechť  $T: A \mapsto B$  je zobrazení. Řekneme, že zobrazení  $S: B \mapsto A$  je **inverzní** k  $T$ , jestliže platí

- $(S \circ T)(a) = a$  pro všechna  $a \in A$
- $(T \circ S)(b) = b$  pro všechna  $b \in B$ .

Pokud takové zobrazení existuje, tak řekneme, že  $T$  je **invertibilní**, a inverzní zobrazení značíme  $T^{-1}$ .

**Fakt.**

Nechť  $T: A \mapsto B$  je invertibilní zobrazení. Pak  $T^{-1}(b) = a$  právě tehdy, když  $T(a) = b$ .

**Důsledek.**

Nechť  $T: A \mapsto B$  je zobrazení. Jestliže je invertibilní, tak je jeho inverzní zobrazení  $T^{-1}$  dáno jednoznačně.

**Věta.**

Nechť  $T: A \mapsto B$  a  $S: B \mapsto C$  jsou zobrazení. Jestliže jsou invertibilní, tak je i  $S \circ T$  invertibilní a navíc platí  $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$ .

**Definice.**

Nechť  $T: A \mapsto B$  je zobrazení.

Řekneme, že  $T$  je **prosté** či **injektivní**, jestliže

$$\forall x, y \in A: T(x) = T(y) \implies x = y.$$

Řekneme, že  $T$  je **na** či **surjektivní**, jestliže  $R(T) = B$ .

Řekneme, že  $T$  je **vzájemně jednoznačné** či **bijekce**, jestliže je prosté a na.

**Věta.**

Nechť  $T: A \mapsto B$  je zobrazení. Je invertibilní právě tehdy, když je to bijekce.

**Fakt.**

Nechť  $T: A \mapsto B$  a  $S: B \mapsto C$  jsou zobrazení. Pak platí:

- (i) Jestliže jsou  $T$  a  $S$  prosté, tak je  $S \circ T$  prosté.
- (ii) Jestliže jsou  $T$  a  $S$  na, tak je  $S \circ T$  na.
- (iii) Jestliže jsou  $T$  a  $S$  bijekce, tak je  $S \circ T$  bijekce.

**Fakt.**

Nechť  $T: A \mapsto B$  je zobrazení a  $A, B$  mají konečně mnoho prvků.

- (i) Jestliže má  $B$  více prvků než  $A$ , pak  $T$  nemůže být na.
- (ii) Jestliže má  $A$  více prvků než  $B$ , pak  $T$  nemůže být prosté.
- (iii) Jestliže  $A$  a  $B$  nemají stejně prvků, pak  $T$  nemůže být bijekce.

**Definice.**

Řekneme, že množiny  $A, B$  mají stejnou **mohutnost**, značeno  $|A| = |B|$ , jestliže existuje bijekce z  $A$  na  $B$ .

Řekneme, že množina  $A$  má mohutnost stejnou nebo menší než  $B$ , značeno  $|A| \leq |B|$ , jestliže existuje prosté zobrazení z  $A$  do  $B$ .

**Fakt.**

Nechť  $A, B$  jsou množiny.

- (i)  $|A| = |B|$  právě tehdy, když  $|B| = |A|$ .
- (ii) Jestliže  $|A| = |B|$ , pak  $|A| \leq |B|$  a  $|B| \leq |A|$ .

**Věta.** (Cantor-Bernstein-Schroeder)

Nechť  $A, B$  jsou množiny. Jestliže  $|A| \leq |B|$  a  $|B| \leq |A|$ , pak  $|A| = |B|$ .

**Fakt.**

Jestliže  $A \subseteq B$ , pak  $|A| \leq |B|$ .

**Definice.**

Nechť  $A$  je množina.

Řekneme, že je **konečná**, jestliže  $A = \emptyset$  (pak píšeme  $|A| = 0$ ),

nebo existuje takové  $m \in \mathbb{N}$ , aby  $|A| = |\{1, 2, \dots, m\}|$ , pak píšeme  $|A| = m$ .

Jinak řekneme, že je **nekonečná**.

**Věta.**

Nechť  $A, B$  jsou množiny.

(i) Jestliže je  $A$  nekonečná a  $B$  je její nadmnožina, pak je  $B$  nekonečná.

(ii) Jestliže je  $A$  nekonečná, pak je i  $A \cup B$  nekonečná.

(iii) Jestliže je  $A$  nekonečná a  $B \neq \emptyset$ , pak je  $A \times B$  nekonečná.

**Věta.**

Nechť  $A, B$  jsou množiny.

(i) Jestliže je  $A$  konečná a  $B$  je její podmnožina, tak je  $B$  konečná a platí  $|B| \leq |A|$ .

Je-li navíc  $B$  podmnožina vlastní, pak  $|B| < |A|$ .

(ii) Jsou-li  $A, B$  konečné, pak je i  $A \cup B$  konečná a platí  $|A \cup B| \leq |A| + |B|$ .

Jsou-li navíc  $A, B$  disjunktní, pak  $|A \cup B| = |A| + |B|$ .

(iii) Jsou-li  $A, B$  konečné, pak je  $A \times B$  konečná a platí  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ .

**Věta.**

(i) Jsou-li  $A_i$  pro  $i = 1, 2, \dots, n$  konečné množiny, pak je i  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  konečná a  $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |A_i|$ .

Jsou-li navíc po dvou disjunktní, tak  $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$ .

(ii) Jsou-li  $A_i$  pro  $i = 1, 2, \dots, n$  konečné množiny, pak je i  $A_1 \times \dots \times A_n$  konečná a

$$|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|.$$

**Věta.**

- (i) Jestliže je množina nekonečná, tak má vlastní podmnožinu, která má stejnou mohutnost.
- (ii) Nechť  $A, B$  jsou množiny,  $A$  je nekonečná a  $|B| \leq |A|$ . Pak  $|A \cup B| = |A|$ .
- (iii) Nechť  $A, B$  jsou množiny,  $A$  je nekonečná a  $|B| \leq |A|$ . Pak  $|A \times B| = |A|$ .

**Fakt.**

Nechť  $A$  je množina. Jestliže je nekonečná, pak  $|\mathbb{N}| \leq |A|$ .

**Definice.**

Nechť  $A$  je nekonečná množina.

Řekneme, že je **spočetná**, jestliže má stejnou mohutnost jako  $\mathbb{N}$ .

Jinak řekneme, že je **nespočetná**.

**Věta.**

- (i) Množina  $\mathbb{N}_0$  je spočetná.
- (ii) Množina  $\mathbb{Z}$  je spočetná.
- (iii) Množina  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  je spočetná.
- (iv) Množina  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  je spočetná.
- (v) Množina racionálních čísel  $\mathbb{Q}$  je spočetná.

**Fakt.**

- (i) Jestliže jsou  $A_n$  pro  $n \in \mathbb{N}$  nejvýše spočetné množiny, pak je  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  nejvýše spočetná.
- (ii) Jestliže jsou navíc  $A_n$  neprázdné a po dvou disjunktní, pak je  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  spočetná.

**Věta.**

Interval reálných čísel  $(0, 1)$  je nespočetný.

**Důsledek.**

Množina reálných čísel  $\mathbb{R}$  je nespočetná.

**Definice.**

Nechť  $A$  je množina. Definujeme **potenční množinu**  $A$ , značeno  $P(A)$ , jako množinu všech podmnožin  $A$ .

**Fakt.**

Jestliže je  $A$  konečná množina, pak  $|P(A)| = 2^{|A|}$ .

**Věta.** (Cantorova)

Pro každou množinu  $A$  platí  $|A| < |P(A)|$ .