DMA Přednáška – Zobrazení

Definice.
Nechť A, B jsou množiny a T je podmnožina $A \times B$.
Řekneme, že je to **zobrazení** z A do B, jestliže
pro každé $a \in A$ existuje právě jedno $b \in B$ splňující $(a,b) \in T$.
Zobrazení T z A do B značíme $T\colon A \mapsto B$.
Množina A se nazývá **definiční obor** T, značeno $D(T)$, množina B je cílová množina T.
Definujeme také **obor hodnot** T jako

$$R(T) = \{b \in B : \exists a \in A\colon T(a) = b\} = \{T(a) : a \in A\}.$$

Definice.
Nechť $T\colon A \mapsto B$ a $S\colon C \mapsto D$ jsou zobrazení. Řekneme, že jsou si rovna, značeno $T = S$, jestliže $A = C$, $B = D$ a

$$\forall a \in A\colon T(a) = S(a).$$

Definice.
Nechť $S\colon A \mapsto B$ a $T\colon B \mapsto C$ jsou zobrazení. Definujeme jejich **složené zobrazení** či **kompozici** $T \circ S\colon A \mapsto C$ předpisem

$$(T \circ S)(a) = T(S(a)) \text{ pro } a \in A.$$

Značíme také $T \circ S = T(S)$.

Věta.
Nechť $R\colon A \mapsto B$, $S\colon B \mapsto C$ a $T\colon C \mapsto D$ jsou zobrazení. Pak platí $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

Definice.
Nechť $T\colon A \mapsto B$ je zobrazení. Řekneme, že zobrazení $S\colon B \mapsto A$ je **inverzní** k T, jestliže platí
- $(S \circ T)(a) = a$ pro všechna $a \in A$
- $(T \circ S)(b) = b$ pro všechna $b \in B$.

Pokud takové zobrazení existuje, tak řekneme, že T je **invertibilní**, a inverzní zobrazení značíme T^{-1}.

Fakt.
Nechť $T\colon A \mapsto B$ je invertibilní zobrazení. Pak $T^{-1}(b) = a$ právě tehdy, když $T(a) = b$.

Důsledek.
Nechť $T\colon A \mapsto B$ je zobrazení. Jestliže je invertibilní, tak je jeho inverzní zobrazení T^{-1} dáno jednoznačně.

Věta.
Nechť $T\colon A \mapsto B$ a $S\colon B \mapsto C$ jsou zobrazení. Jestliže jsou invertibilní, tak je i $S \circ T$ invertibilní a navíc platí $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

Definice.
Nechť $T\colon A \mapsto B$ je zobrazení.
Řekneme, že T je **prosté** či **injektivní**, jestliže

$$\forall x, y \in A\colon T(x) = T(y) \implies x = y.$$

Řekneme, že T je **na** či **surjektivní**, jestliže $R(T) = B$.
Řekneme, že T je **vzájemně jednoznačné** či **bijekce**, jestliže je prosté a na.

Věta.
Nechť $T\colon A \mapsto B$ je zobrazení. Je invertibilní právě tehdy, když je to bijekce.

Fakt.
Nechť $T\colon A \mapsto B$ a $S\colon B \mapsto C$ jsou zobrazení. Pak platí:
(i) Jestliže jsou T a S prosté, tak je $S \circ T$ prosté.
(ii) Jestliže jsou T a S na, tak je $S \circ T$ na.
(iii) Jestliže jsou T a S bijekce, tak je $S \circ T$ bijekce.

Fakt.
Nechť $T\colon A \mapsto B$ je zobrazení a A, B mají konečně mnoho prvků.
(i) Jestliže má B více prvků než A, pak T nemůže být na.
(ii) Jestliže má A více prvků než B, pak T nemůže být prosté.
(iii) Jestliže A a B nemají stejně prvků, pak T nemůže být bijekce.

Definice.
Řekneme, že množiny A, B mají stejnou **mohutnost**, značeno $|A| = |B|$, jestliže existuje bijekce z A na B.
Řekneme, že množina A má mohutnost stejnou nebo menší než B, značeno $|A| \le |B|$, jestliže existuje prosté zobrazení z A do B.

Fakt.
Nechť A, B jsou množiny.
(i) $|A| = |B|$ právě tehdy, když $|B| = |A|$.
(ii) Jestliže $|A| = |B|$, pak $|A| \le |B|$ a $|B| \le |A|$.

Věta. (Cantor-Bernstein-Schroeder)
Nechť A, B jsou množiny. Jestliže $|A| \le |B|$ a $|B| \le |A|$, pak $|A| = |B|$.

Fakt.
Jestliže $A \subseteq B$, pak $|A| \le |B|$.

Definice.
Nechť A je množina.
Řekneme, že je **konečná**, jestliže $A = \emptyset$ (pak píšeme $|A| = 0$),
nebo existuje takové $m \in \mathbb{N}$, aby $|A| = |\{1, 2, \dots, m\}|$, pak píšeme $|A| = m$.
Jinak řekneme, že je **nekonečná**.

Věta.
Nechť A, B jsou množiny.
(i) Jestliže je A nekonečná a B je její nadmnožina, pak je B nekonečná.
(ii) Jestliže je A nekonečná, pak je i $A \cup B$ nekonečná.
(iii) Jestliže je A nekonečná a $B \neq \emptyset$, pak je $A \times B$ nekonečná.

Věta.
Nechť A, B jsou množiny.
(i) Jestliže je A konečná a B je její podmnožina, tak je B konečná a platí $|B| \le |A|$.
Je-li navíc B podmnožina vlastní, pak $|B| < |A|$.
(ii) Jsou-li A, B konečné, pak je i $A \cup B$ konečná a platí $|A \cup B| \le |A| + |B|$.
Jsou-li navíc A, B disjunktní, pak $|A \cup B| = |A| + |B|$.
(iii) Jsou-li A, B konečné, pak je $A \times B$ konečná a platí $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Věta.
(i) Jsou-li A_i pro $i = 1, 2, \dots, n$ konečné množiny, pak je i $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ konečná a $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right| \le \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i|$.
Jsou-li navíc po dvou disjunktní, tak $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i|$.
(ii) Jsou-li A_i pro $i = 1, 2, \dots, n$ konečné množiny, pak je i $A_1 \times \dots \times A_n$ konečná a

$$|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdots |A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Věta.
(i) Jestliže je množina nekonečná, tak má vlastní podmnožinu, která má stejnou mohutnost.
(ii) Nechť A, B jsou množiny, A je nekonečná a $|B| \leq |A|$. Pak $|A \cup B| = |A|$.
(iii) Nechť A, B jsou množiny, A je nekonečná a $|B| \leq |A|$. Pak $|A \times B| = |A|$.

Fakt.
Nechť A je množina. Jestliže je nekonečná, pak $|\mathbb{N}| \leq |A|$.

Definice.
Nechť A je nekonečná množina.
Řekneme, že je **spočetná**, jestliže má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$.
Jinak řekneme, že je **nespočetná**.

Věta.
(i) Množina $\mathbb{N}_0$ je spočetná.
(ii) Množina $\mathbb{Z}$ je spočetná.
(iii) Množina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je spočetná.
(iv) Množina $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je spočetná.
(v) Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je spočetná.

Fakt.
(i) Jestliže jsou A_n pro $n \in \mathbb{N}$ nejvýše spočetné množiny, pak je $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ nejvýše spočetná.
(ii) Jestliže jsou navíc A_n neprázdné a po dvou disjunktní, pak je $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ spočetná.

Věta.
Interval reálných čísel $\langle 0, 1)$ je nespočetný.

Důsledek.
Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je nespočetná.

Definice.
Nechť A je množina. Definujeme **potenční množinu** A, značeno $P(A)$, jako množinu všech podmnožin A.

Fakt.
Jestliže je A konečná množina, pak $|P(A)| = 2^{|A|}$.

Věta. (Cantorova)
Pro každou množinu A platí $|A| < |P(A)|$.