DMA Přednáška – Indukce

Kroky při důkazu indukcí:
1. Zformulujeme přesně tvrzení a oznámíme, jak jej dokážeme.
2. Dokážeme základní krok.
3. Dokážeme indukční krok. Pro jisté (libovolné) $n \geq n_0$ předpokládáme, že platí „indukční předpoklad“ $V(n)$, pomocí něj pak dokážeme platnost $V(n+1)$.
4. Uděláme závěr.

Slabý princip matematické indukce.
Nechť $n_0 \in \mathbb{Z}$, nechť $V(n)$ je vlastnost celých čísel, která má smysl pro $n \geq n_0$.
Předpokládejme, že následující předpoklady jsou splněny:
(0) $V(n_0)$ platí.
(1) Pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ je pravdivá následující implikace: Jestliže platí $V(n)$, pak platí i $V(n+1)$.
Potom $V(n)$ platí pro všechna $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$.

Věta.
Princip indukce je ekvivalentní s principem dobrého uspořádání.

Silný princip matematické indukce.
Nechť $n_0 \in \mathbb{Z}$, nechť $V(n)$ je vlastnost celých čísel, která má smysl pro $n \geq n_0$.
Předpokládejme, že následující předpoklady jsou splněny:
(0) $V(n_0)$ platí.
(1) Pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ je pravdivá následující implikace: Jestliže platí $V(k)$ pro všechna $k = n_0, n_0+1, \dots, n$, pak platí i $V(n+1)$.
Potom $V(n)$ platí pro všechna $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$.

Věta.
Slabý a silný princip matematické indukce jsou ekvivalentní.

Modifikovaný silný princip matematické indukce.
Nechť $n_0 \in \mathbb{Z}$, nechť $V(n)$ je vlastnost celých čísel, která má smysl pro $n \geq n_0$. Nechť $m \in \mathbb{N}$.
Předpokládejme, že následující předpoklady jsou splněny:
(0) $V(n_0)$, $V(n_0+1)$, $V(n_0+2)$, … ,$V(n_0+m-1)$ platí.
(1) Pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0+m-1$ je pravdivá následující implikace: Jestliže platí $V(k)$ pro všechna $k = n-m+1, n-m+2, \dots, n$, pak platí i $V(n+1)$.
Potom $V(n)$ platí pro všechna $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$.

Induktivní definice množin.
Při definici konkrétní množiny M uvažujme následující dva druhy specifikací:
(0) **Základní pravidla** definují přímo, které prvky jsou v množině M.
(1) **Induktivní pravidla** určují, jak lze pomocí prvků, které již v množině jsou (tzv. **předpoklady** pravidla), vytvářet další prvky z M (tzv. **závěr** pravidla).
Množina M se pak skládá ze všech prvků, které lze obdržet konečným počtem použití pravidel (0) a (1) (tedy prvky, které lze takto získat, leží v M, a ty, které takto získat nelze, pak v M neleží).

Princip strukturální indukce.
Uvažujme množinu M definovanou induktivně pomocí nějakých základních pravidel (0) a induktivních pravidel (1). Uvažujme vlastnost $V(m)$, která má smysl pro všechny $m \in M$.
Předpokládejme, že jsou splněny následující podmínky:
(0) V je splněna pro všechny prvky, které jsou do M dodány základními pravidly.
(1) Pro každé induktivní pravidlo platí: Jestliže je V splněna pro prvky z jeho předpokladů, pak je splněna i pro prvek z jeho závěru.
Pak je vlastnost V splněna pro všechny prvky $m \in M$.

Věta.
Platnost principu strukturální indukce je ekvivalentní platnosti principu matematické indukce.