DMA Přednáška – Rekurentní rovnice

Definice.
Rekurentní rovnice či **rekurzivní rovnice** pro posloupnost $\{a_n\}$ je vztah

$$a_{n+1} = G(a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-m}),\ n \geq n_0 + m,$$

kde G je nějaká funkce $m+1$ proměnných.
Jejím **řešením** nazveme libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ takovou, že po dosazení odpovídajících členů do dané rovnice dostáváme pro všechna $n \geq n_0 + m$ pravdivý výrok.

Definice.
Lineární rekurentní rovnice, popřípadě **lineární rekursivní rovnice řádu** $k \in \mathbb{N}_0$ je libovolná rovnice ve tvaru

$$a_{n+k} + c_{k-1}(n)a_{n+k-1} + \dots + c_2(n)a_{n+2} + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n, \quad n \geq n_0,$$

kde $n_0 \in \mathbb{Z}$, $c_i(n)$ pro $i = \{0, \dots, k-1\}$ (tzv. **koeficienty** rovnice) jsou nějaké funkce $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$, přičemž $c_0(n)$ není identicky nulová funkce, a $\{b_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ (tzv. **pravá strana rovnice**) je pevně zvolená posloupnost reálných čísel.

Jestliže $b_n = 0$ pro všechna $n \geq n_0$, pak se příslušná rovnice nazývá **homogenní**.

Zápis rovnice pomocí sumačního znaménka:

$$a_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_i(n)a_{n+i} = b_n.$$

Definice.
Nechť je dána lineární rekurentní rovnice řádu k

$$a_{n+k} + c_{k-1}(n)a_{n+k-1} + \ldots + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n, \quad n \geq n_0.$$

Za **počáteční podmínky** (**initial conditions**) pro tuto rovnici považujeme libovolnou soustavu rovnic $a_{n_0} = A_0$, $a_{n_0+1} = A_1, \ldots, a_{n_0+k-1} = A_{k-1}$, kde $A_i \in \mathbb{R}$ jsou pevně zvolená čísla.

Definice.
Uvažujme lineární rekurentní rovnici

$$a_{n+k} + c_{k-1}(n)a_{n+k-1} + \ldots + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n, \quad n \geq n_0.$$

Pak se lineární rekurentní rovnice

$$a_{n+k} + c_{k-1}(n)a_{n+k-1} + \ldots + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = 0, \quad n \geq n_0$$

nazývá k ní **přidružená homogenní rovnice**.

Věta. (o struktuře řešení lineární rekurentní rovnice)
Nechť je dána lineární rekurentní rovnice

$$a_{n+k} + c_{k-1}(n)a_{n+k-1} + \ldots + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n, \quad n \geq n_0$$

a nějaké její řešení $\{a_{p,n}\}_{n=n_0}^{\infty}$.
Posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ je řešením této rovnice právě tehdy, pokud se dá napsat jako $\{a_n\} = \{a_{p,n}\} + \{a_{h,n}\}$, kde $\{a_{h,n}\}_{n=n_0}^{\infty}$ je nějaké řešení přidružené homogenní rovnice.

Množina všech řešení dané lineární rekurentní rovnice je tedy

$$\big\{\{a_{p,n}\} + \{a_{h,n}\};\ \{a_{h,n}\} \text{ řeší přidruženou homogenní rovnici}\big\}.$$

Věta. (o prostoru řešení homogenní lineární rekurentní rovnice)
Množina všech řešení dané homogenní lineární rekurentní rovnice řádu k je vektorový prostor dimenze k.

Definice.
Lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty je libovolná rovnice ve tvaru

$$a_{n+k} + c_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = b_n, \quad n \geq n_0,$$

kde $n_0 \in \mathbb{Z}$, $c_i \in \mathbb{R}$ pro $i = 0, \ldots, k-1$ jsou pevně zvolená čísla a $\{b_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ je pevně zvolená posloupnost reálných čísel.

Definice.
Nechť je dána lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty

$$a_{n+k} + c_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = b_n, \quad n \geq n_0.$$

Její **charakteristický polynom** je definován jako polynom

$$p(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0.$$

Kořeny charakteristického polynomu se nazývají **charakteristická čísla**, popřípadě **vlastní čísla** dané rovnice. Řešené rovnici

$$\lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0 = 0$$

se také říká **charakteristická rovnice**.

Fakt.
Jestliže je λ_0 charakteristickým číslem dané homogenní lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty, pak je posloupnost $\{\lambda_0^n\}_{n=n_0}^{\infty}$ jejím řešením.

Věta.
Uvažujme homogenní lineární rekurentní rovnici s konstantními koeficienty. Jestliže jsou λ_i různá její charakteristická čísla, pak $\{\lambda_i^n\}_{n=n_0}^{\infty}$ tvoří lineárně nezávislou množinu řešení této rovnice.

Fakt.
Nechť je dána homogenní lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty. Jestliže je λ_0 její charakteristické číslo a má násobnost m jako kořen charakteristického polynomu, pak posloupnosti $\{\lambda_0^n\}, \{n\lambda_0^n\}, \dots, \{n^{m-1}\lambda_0^n\}$ jsou řešení dané rovnice a tvoří lineárně nezávislou množinu.

Věta.
Nechť je dána homogenní lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty řádu k. Nechť jsou $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ její různá charakteristická čísla, přičemž každé λ_i má násobnost $m_i \in \mathbb{N}$. Pak je množina

$$\big\{\{\lambda_1^n\}, \{n\lambda_1^n\}, \dots, \{n^{m_1-1}\lambda_1^n\}, \{\lambda_2^n\}, \{n\lambda_2^n\}, \dots, \{n^{m_2-1}\lambda_2^n\}, \dots, \{\lambda_M^n\}, \{n\lambda_M^n\}, \dots, \{n^{m_M-1}\lambda_M^n\}\big\}$$

bází prostoru řešení dané rovnice.

Algoritmus pro řešení homogenní lineární rekurentní rovnice $a_{n+k}+\sum\limits_{i=0}^{k-1} c_i a_{n+i}=0,\ \ n\geq n_0$, řádu k.

1. Sestavte charakteristický polynom $p(\lambda)=\lambda^k+\sum\limits_{i=0}^{k-1} c_i\lambda^i$.

Řešením rovnice $p(\lambda)=0$ najděte všechna charakteristická čísla dané rovnice.
2. Sestavte množinu posloupností B takto:
• pro každé reálné charakteristické číslo λ přidejte do B posloupnost $\{\lambda^n\}_{n=n_0}^{\infty}$;
• pro každé reálné charakteristické číslo λ, jehož násobnost je $m>1$, přidejte do B rovněž posloupnosti $\{n\lambda^n\}_{n=n_0}^{\infty},\dots,\{n^{m-1}\lambda^n\}_{n=n_0}^{\infty}$;
• pro každé komplexní charakteristické číslo $\lambda=r[\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)]$, které není reálné, přidejte do B posloupnosti $\{r^n\cos(n\varphi)\}_{n=n_0}^{\infty}$ a $\{r^n\sin(n\varphi)\}_{n=n_0}^{\infty}$; pro jeho komplexně sdružené číslo λ^* již do B nic nepřidáváme;
• pro každé komplexní charakteristické číslo $\lambda=r[\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)]$, které není reálné a jehož násobnost je $m>1$, přidejte do B posloupnosti $\{nr^n\cos(n\varphi)\}_{n=n_0}^{\infty},\dots,\{n^{m-1}r^n\cos(n\varphi)\}_{n=n_0}^{\infty}$
a $\{nr^n\sin(n\varphi)\}_{n=n_0}^{\infty},\dots,\{n^{m-1}r^n\sin(n\varphi)\}_{n=n_0}^{\infty}$; pro jeho komplexně sdružené číslo λ^* již do B nic nepřidáváme.
Množina B je bází prostoru řešení.

3. Označíme-li $B=\big\{\{a_{1,n}\},\dots,\{a_{k,n}\}\big\}$, pak je obecné řešení dané rovnice určeno vzorcem $\Big\{\sum\limits_{i=1}^{k} u_i a_{i,n}\Big\}_{n=n_0}^{\infty}$ pro $u_1,\dots,u_k\in\mathbb{R}$.
4. Jsou-li dány počáteční podmínky, pak do nich za příslušná a_j pro $j=n_0,\dots,n_0+k-1$ dosadíme vzorce $a_j=\sum\limits_{i=1}^{k} u_i a_{i,j}$ a vyřešíme vzniklých k rovnic pro k neznámých u_i. Ty po dosazení do obecného řešení určí příslušné partikulární řešení.

Definice.
Řekneme, že posloupnost $\{b_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ je **kvazipolynom**, jestliže existuje $\lambda\in\mathbb{R}$ a polynom $P(n)$ takový, že $b_n=P(n)\lambda^n$ pro všechna $n\geq n_0$.

Věta.
Uvažujme rovnici

$$a_{n+k}+c_{k-1}a_{n+k-1}+\dots+c_1a_{n+1}+c_0a_n=b_n,\quad n\geq n_0.$$

Předpokládejme, že existují $\lambda\in\mathbb{R}$ a polynom P takový, že $b_n=P(n)\lambda^n$ pro všechna $n\geq n_0$. Nechť m je násobnost tohoto čísla λ jako charakteristického čísla přidružené homogenní rovnice, přičemž $m=0$ v případě, že toto λ vůbec charakteristickým číslem není.
Pak existuje polynom $Q(n)$ stupně stejného jako P takový, že $\{n^mQ(n)\lambda^n\}$ je řešením dané rovnice.

$a_{n+2}-9a_n=$ $[\lambda=-3,3]$	$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=$ $[\lambda=1,2]$	$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=$ $[\lambda=2\ (2\times)]$	$L=$ / $=b_n$
			$=n\,2^n$ $[\lambda=2]$
			$=n^2(-1)^n$ $[\lambda=-1]$
			$=2n-5$ $[\lambda=1]$
			$=(-3)^n$ $[\lambda=-3]$

Algoritmus pro nalezení řešení rovnice $a_{n+k}+c_{k-1}a_{n+k-1}+\ldots+c_1a_{n+1}+c_0a_n=b_n$, $n\geq n_0$, kde $b_n=P(n)\lambda^n$, $c_i\in\mathbb{R}$ a $c_0\neq 0$ (tedy řád k).

1. Nejprve řešte přidruženou homogenní rovnici $a_{n+k}+c_{k-1}a_{n+k-1}+\ldots+c_1a_{n+1}+c_0a_n=0$.
a) Najděte všechna charakteristická čísla λ_j s násobnostmi m_j řešením rovnice $\lambda_k+c_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+c_1\lambda+c_0=0$.
b) Sestavte bázi prostoru řešení $B=\big\{\{a_{i,n}\}_{n=n_0}^{\infty};\ i=1,\ldots,k\big\}$.
c) Obecné řešení přidružené homogenní rovnice je $\{a_{h,n}\}=\Big\{\sum\limits_{i=1}^{k}u_ia_{i,n}\Big\}$ pro $u_i\in\mathbb{R}$.
Pokud byla zadaná rovnice již homogenní, jděte na **3**.
2. Pokud nebyla zadaná rovnice homogenní, zkontrolujte, že je pravá strana kvazipolynom, tedy $b_n=P(n)\lambda^n$ pro nějaké $\lambda\in\mathbb{R}$ a polynom P.
a) Porovnejte λ s charakteristickými čísly λ_j z kroku **1**. Pokud se žádnému nerovná, položte $m=0$. Pokud pro nějaké j platí $\lambda=\lambda_j$, položte $m=m_j$ (násobnost dotyčného charakteristického čísla).
b) Sestavte obecný polynom Q stupně stejného jako P, tradičně se používá $Q(n)=A+Bn+\cdots$.
c) Uhádněte řešení $a_n=n^mQ(n)\lambda^n$. Dosaďte jej do dané rovnice a po zkrácení λ zjednodušte levou stranu do tvaru polynomu. Porovnáním koeficientů polynomů na levé a pravé straně získáte tolik rovnic, kolik je neznámých koeficientů v Q.
d) Vyřešte tyto rovnice a obdržené konstanty dosaďte zpět do Q. Získáte jedno konkrétní řešení $a_{p,n}$.
e) Obecné řešení dané úlohy je $\Big\{a_{p,n}+\sum\limits_{i=1}^{k}u_ia_{i,n}\Big\}_{n=n_0}^{\infty}$ či $a_n=a_{p,n}+\sum\limits_{i=1}^{k}u_ia_{i,n}$ pro $n\geq n_0$.
3. Pokud byly s rovnicí zadány také počáteční podmínky, dosaďte za a_j v těchto podmínkách vzorce pro a_j z obecného řešení, které jste našli. Získáte k rovnic pro k neznámých $u_1,\ldots,u_k$. Vyřešte tuto soustavu, získaná u_i dosaďte do vzorce pro obecné řešení a dostanete tak partikulární řešení pro zadanou úlohu.

Věta.
Nechť $k \in \mathbb{N}$, uvažujme funkce $c_0(n), c_1(n), \dots, c_{k-1}(n)\colon \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$.

Jestliže posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ řeší rovnici $\quad a_{n+k} + \sum\limits_{i=0}^{k-1} c_i(n)a_{n+i} = b_n,\ \ n \geq n_0$

a posloupnost $\{\tilde{a}_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ řeší rovnici $\quad a_{n+k} + \sum\limits_{i=0}^{k-1} c_i(n)a_{n+i} = \tilde{b}_n,\ \ n \geq n_0,$

pak posloupnost $\{a_n + \tilde{a}_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ řeší rovnici $\quad a_{n+k} + \sum\limits_{i=0}^{k-1} c_i(n)a_{n+i} = b_n + \tilde{b}_n \quad$ pro všechna $n \geq n_0$.

Fakt.
Nechť je funkce f na $\mathbb{N}$ dána vzorcem $f(n) = a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right)$ pro $a > 0$ a $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$.
Pak pro $n \in \{b^k;\ k \in \mathbb{N}\}$ platí $f(n) = n^{\log_b(a)} f(1)$.

Věta. (The Master theorem)
Uvažujme neklesající nezápornou funkci f na $\mathbb{N}$. Pro nějaké $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ označme $M = \{b^k;\ k \in \mathbb{N}\}$ a předpokládejme, že f splňuje na M rovnici $f(n) = a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d$ pro konstanty $a, c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}_0$ splňující $a \geq 1$ a $c > 0$. Pak platí následující:
(i) Jestliže $a > b^d$, tak $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$.
(ii) Jestliže $a = b^d$, tak $f(n) = \Theta(n^d \log_2(n))$.
(iii) Jestliže $a < b^d$, tak $f(n) = \Theta(n^d)$.

Důsledek.
Uvažujme neklesající nezápornou funkci f na $\mathbb{N}$. Pro nějaké $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ označme $M = \{b^k;\ k \in \mathbb{N}\}$ a předpokládejme, že f splňuje na M rovnici $f(n) = a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d$ pro konstanty $a, c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}_0$ splňující $a \geq 1$ a $c \geq 0$. Pak platí následující:
(i) Jestliže $d < \log_b(a)$ nebo $c = 0$, tak $f(n)$ je $\Theta(n^{\log_b(a)})$.
(ii) Jestliže $d = \log_b(a)$, tak $f(n)$ je $\Theta(n^{\log_b(a)} \log_2(n)) = \Theta(n^d \log_2(n))$.
(iii) Jestliže $d > \log_b(a)$, tak $f(n)$ je $\Theta(n^d)$.

x, y: čísla o $n = 2m$ cifrách.
Nechť $x = x_L \cdot 10^m + x_R$, $y = y_L \cdot 10^m + y_R$. Pak

$$\begin{aligned} xy &= (x_L \cdot 10^m + x_R)(y_L \cdot 10^m + y_R) \\ &= 10^{2m} x_L y_L + 10^m (x_L y_R + x_R y_L) + x_R y_R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy &= (x_L \cdot 10^m + x_R)(y_L \cdot 10^m + y_R) \\ &= 10^{2m} x_L y_L + 10^m (x_L y_R + x_R y_L) + x_R y_R \\ &= 10^{2m} x_L y_L + 10^m [x_L y_L + (x_L - x_R)(y_R - y_L) + x_R y_R] + x_R y_R. \end{aligned}$$