DMA Přednáška – Relace

Definice.
Nechť A, B jsou množiny. Libovolná podmnožina $\mathcal{R}$ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá **binární relace** z A do B.
Jestliže $(a, b) \in \mathcal{R}$, pak to také značíme $a\mathcal{R}b$ a řekneme, že a **je v relaci k** b vzhledem k $\mathcal{R}$.

Definice.
Nechť A je množina. Řekneme, že $\mathcal{R}$ je relace na A, jestliže je to relace z A do A.

Příklad: Uvažujme malou školu se studenty **F**rodo, **M**erry, **P**ippin a **S**am, škola nabízí kursy **c**estování, **d**iskrétní matiky a **e**lfštiny.
Frodo si zapsal cestování a elfštinu, Merry a Pippin si zapsali cestování a diskrétku.

Příklad: Nechť je A množina všech měst (v České republice, aby jich nebylo tolik). Nechť $\mathcal{R}_1$ je relace na A definovaná tak, že $a\mathcal{R}_1 b$ právě tehdy, jestli se dá z a do b dostat autobusem, a $\mathcal{R}_2$ je relace na A definovaná tak, že $a\mathcal{R}_2 b$ právě tehdy, jestli se dá z a do b dostat vlakem.

Definice.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace z množiny A do množiny B, nechť $C \subseteq A$ a $D \subseteq B$. Definujeme **restrikci** relace $\mathcal{R}$ na $C \times D$ jako relaci $\mathcal{R} \cap (C \times D)$ z C do D. Značí se $\mathcal{R}|_{C\times D}$.
Pro relaci $\mathcal{R}$ na množině A a podmnožinu $C \subseteq A$ definujeme restrikci $\mathcal{R}$ na C, značeno $\mathcal{R}|_C$, jako $\mathcal{R}|_{C\times C}$.

Definice.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace z množiny A do množiny B. Definujeme **relaci inverzní k** $\mathcal{R}$, značeno $\mathcal{R}^{-1}$, jako relaci z B do A předpisem

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a);\ (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

Tedy

$$b\mathcal{R}^{-1}a \text{ právě tehdy, když } a\mathcal{R}b.$$

Definice.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace z množiny A do množiny B a $\mathcal{S}$ je relace z B do množiny C. Definujeme jejich **složení** $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ jako relaci z A do C definovanou

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \big\{(a, c) \in A \times C;\ \exists b \in B\colon\ [(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{S}]\big\}.$$

Alternativní značení: $\mathcal{R}\,;\mathcal{S}$, $\mathcal{R} \odot \mathcal{S}$, $\mathcal{R} \circ_l \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \circ_r \mathcal{R}$, ...

Příklad: Připomeňme, že $A = \{F, M, P, S\}$ jsou studenti, $B = \{b, c, d, e\}$ kursy a relace
$\mathcal{R} = \{(F, c), (F, e), (M, c), (M, d), (P, c), (P, d), (S, e)\}$ říká, který student si zapsal jaký kurs.
Množina učitelů $C = \{$Tom $\mathcal{B}$ombadil, $\mathcal{E}$lrond, $\mathcal{G}$andalf$\}$,
relace který kurs je učen kterým učitelem: $\mathcal{S} = \{(c, \mathcal{G}), (d, \mathcal{B}), (e, \mathcal{E})\}$.

Fakt.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace z množiny A do množiny B, $\mathcal{S}$ je relace z B do množiny C a $\mathcal{T}$ je relace z C do množiny D.
Pak $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.

Definice.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A. Pak definujeme její **mocninu** rekurzivně jako
(0) $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$;
(1) $\mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Definice.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A.
Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **reflexivní**, jestliže pro všechna $a \in A$ platí $a\mathcal{R}a$.
Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **symetrická**, jestliže pro všechna $a, b \in A$ platí $a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$.
Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **antisymetrická**, jestliže pro všechna $a, b \in A$ platí $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \implies a = b$.
Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **tranzitivní**, jestliže pro všechna $a, b, c \in A$ platí $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \implies a\mathcal{R}c$.