

DMA Přednáška – Relace

Definice.

Nechť A, B jsou množiny. Libovolná podmnožina $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ se nazývá **relace** z A do B . Jestliže $(a, b) \in \mathcal{R}$, pak to značíme $a\mathcal{R}b$ a řekneme, že a je v **relaci** k b vzhledem k \mathcal{R} .

Definice.

Nechť A je množina. Řekneme, že \mathcal{R} je relace na A , jestliže je to relace z A do A .

Příklad: Uvažujme malou školu se studenty **Frodo**, **Merry**, **Pippin** a **Sam**, škola nabízí kurzy cestování, **diskrétní matematiky** a **elfštiny**.

Frodo si zapsal cestování a elfštinu, Merry a Pippin si zapsali cestování a diskrétku, Sam si zapsal elfštinu.

Definice.

Nechť $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ a $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ jsou množiny. Pro relaci \mathcal{R} z A do B definujeme **matici relace** $M_{\mathcal{R}} = (m_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ předpisem

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in \mathcal{R}; \\ 0, & (a_i, b_j) \notin \mathcal{R}. \end{cases}$$

Příklad: Nechť je A množina všech měst (v České republice, aby jich nebylo tolik). Nechť \mathcal{R}_1 je relace na A definovaná tak, že $a\mathcal{R}_1b$ právě tehdy, jestli se dá z a do b dostat autobusem, a \mathcal{R}_2 je relace na A definovaná tak, že $a\mathcal{R}_2b$ právě tehdy, jestli se dá z a do b dostat vlakem.

Definice.

Nechť \mathcal{R} je relace z nějaké množiny A do nějaké množiny B . Definujeme **relaci inverzní k \mathcal{R}** , značeno \mathcal{R}^{-1} , jako relaci z B do A předpisem

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

Tedy

$$b\mathcal{R}^{-1}a \text{ právě tehdy, když } a\mathcal{R}b.$$

Definice.

Nechť \mathcal{R} je relace z nějaké množiny A do nějaké množiny B a \mathcal{S} je relace z B do nějaké množiny C . Definujeme jejich **složení** $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ jako relaci z A do C definovanou

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B : [(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{S}]\}.$$

Alternativní značení: $\mathcal{R};\mathcal{S}$, $\mathcal{R} \odot \mathcal{S}$, $\mathcal{R} \circ_l \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \circ_r \mathcal{R}$, ...

Příklad: Pripomeňme, že $A = \{F, M, P, S\}$ jsou studenti, $B = \{b, c, d, e\}$ kurzy a relace $\mathcal{R} = \{(F, c), (F, e), (M, c), (M, d), (P, c), (P, d), (S, e)\}$ říká, který student si zapsal jaký kurs.

Množina učitelů $C = \{\text{Tom Bombadil}, \text{Elrond}, \text{Gandalf}\}$,

relace který kurs je učen kterým učitelem: $\mathcal{S} = \{(c, \mathcal{G}), (d, \mathcal{B}), (e, \mathcal{E})\}$.

Fakt.

Nechť \mathcal{R} je relace z nějaké množiny A do nějaké množiny B , \mathcal{S} je relace z B do nějaké množiny C a \mathcal{T} je relace z C do nějaké množiny D . Pak $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.

Definice.

Nechť \mathcal{R} je relace na nějaké množině A . Pak definujeme její **mocninu** rekurzivně jako

$$(0) \mathcal{R}^1 = \mathcal{R};$$

$$(1) \mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^n \text{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

Definice.

Nechť \mathcal{R} je relace na množině A .

Řekneme, že \mathcal{R} je **reflexivní**, jestliže pro všechna $a \in A$ platí $a\mathcal{R}a$.

Řekneme, že \mathcal{R} je **symetrická**, jestliže pro všechna $a, b \in A$ platí $a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$.

Řekneme, že \mathcal{R} je **antisymetrická**, jestliže pro všechna $a, b \in A$ platí $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \implies a = b$.

Řekneme, že \mathcal{R} je **tranzitivní**, jestliže pro všechna $a, b, c \in A$ platí $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \implies a\mathcal{R}c$.