

DMA Přednáška – Relace

Definice.

Nechť A, B jsou množiny. Libovolná podmnožina \mathcal{R} kartézského součinu $A \times B$ se nazývá **binární relace** z A do B .

Jestliže $(a, b) \in \mathcal{R}$, pak to také značíme $a\mathcal{R}b$ a řekneme, že a je **v relaci k** b vzhledem k \mathcal{R} .

Definice.

Nechť A je množina. Řekneme, že \mathcal{R} je relace na A , jestliže je to relace z A do A .

Příklad: Uvažujme malou školu se studenty **Frodo**, **Merry**, **Pippin** a **Sam**, škola nabízí kurzy cestování, **diskrétní matiky** a **elfštiny**.

Frodo si zapsal cestování a elfštinu, Merry a Pippin si zapsali cestování a diskrétku.

Příklad: Nechť je A množina všech měst (v České republice, aby jich nebylo tolik). Nechť \mathcal{R}_1 je relace na A definovaná tak, že $a\mathcal{R}_1b$ právě tehdy, jestli se dá z a do b dostat autobusem, a \mathcal{R}_2 je relace na A definovaná tak, že $a\mathcal{R}_2b$ právě tehdy, jestli se dá z a do b dostat vlakem.

Definice.

Nechť \mathcal{R} je relace z množiny A do množiny B , nechť $C \subseteq A$ a $D \subseteq B$. Definujeme **restrikci** relace \mathcal{R} na $C \times D$ jako relaci $\mathcal{R} \cap (C \times D)$ z C do D . Značí se $\mathcal{R}|_{C \times D}$.

Pro relaci \mathcal{R} na množině A a podmnožinu $C \subseteq A$ definujeme restrikci \mathcal{R} na C , značeno $\mathcal{R}|_C$, jako $\mathcal{R}|_{C \times C}$.

Definice.

Nechť \mathcal{R} je relace z množiny A do množiny B . Definujeme **relaci inverzní k** \mathcal{R} , značeno \mathcal{R}^{-1} , jako relaci z B do A předpisem

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

Tedy

$$b\mathcal{R}^{-1}a \text{ právě tehdy, když } a\mathcal{R}b.$$

Definice.

Nechť \mathcal{R} je relace z množiny A do množiny B a \mathcal{S} je relace z B do množiny C . Definujeme jejich **složení** $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ jako relaci z A do C definovanou

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B: [(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{S}]\}.$$

Alternativní značení: $\mathcal{R};\mathcal{S}$, $\mathcal{R} \odot \mathcal{S}$, $\mathcal{R} \circ_l \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \circ_r \mathcal{R}$, ...

Příklad: Připomeňme, že $A = \{F, M, P, S\}$ jsou studenti, $B = \{b, c, d, e\}$ kurzy a relace $\mathcal{R} = \{(F, c), (F, e), (M, c), (M, d), (P, c), (P, d), (S, e)\}$ říká, který student si zapsal jaký kurs.

Množina učitelů $C = \{\text{Tom Bombadil}, \text{Elrond}, \text{Gandalf}\}$,

relace který kurs je učen kterým učitelem: $\mathcal{S} = \{(c, \mathcal{G}), (d, \mathcal{B}), (e, \mathcal{E})\}$.

Fakt.

Nechť \mathcal{R} je relace z množiny A do množiny B , \mathcal{S} je relace z B do množiny C a \mathcal{T} je relace z C do množiny D . Pak $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.

Definice.

Nechť \mathcal{R} je relace na množině A . Pak definujeme její **mocninu** rekurzivně jako

$$(0) \mathcal{R}^1 = \mathcal{R};$$

$$(1) \mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^n \text{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

Definice.

Nechť \mathcal{R} je relace na množině A .

Řekneme, že \mathcal{R} je **reflexivní**, jestliže pro všechna $a \in A$ platí $a\mathcal{R}a$.

Řekneme, že \mathcal{R} je **symetrická**, jestliže pro všechna $a, b \in A$ platí $a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$.

Řekneme, že \mathcal{R} je **antisymetrická**, jestliže pro všechna $a, b \in A$ platí $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \implies a = b$.

Řekneme, že \mathcal{R} je **tranzitivní**, jestliže pro všechna $a, b, c \in A$ platí $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \implies a\mathcal{R}c$.