

**DMA Přednáška – Speciální relace****Definice.**

Nechť  $\mathcal{R}$  je relace na nějaké množině  $A$ . Řekneme, že  $\mathcal{R}$  je **částečné uspořádání**, jestliže je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

V tom případě značíme relaci  $\preceq$  a řekneme, že dvojice  $(A, \preceq)$  je **částečně uspořádaná množina**.

**Fakt.**

Jestliže je  $(A, \preceq)$  částečně uspořádaná množina, pak je i  $(A, \preceq^{-1})$  částečně uspořádaná množina.

**Definice.**

Nechť  $(A, \preceq)$  je částečné uspořádání. Definujeme relaci  $\prec$  na  $A$  předpisem

$a \prec b$  právě tehdy, když  $a \preceq b$  a  $a \neq b$ .

**Algoritmus** pro vytváření Hasseova diagramu částečného uspořádání  $(A, \preceq)$  pro konečnou množinu  $A$ .

1. Najít prvky  $a \in A$ , které v ostrém srovnání nikdy nejsou napravo, tedy v pozici  $x \prec a$  (nevedou do nich šipky). Dát do spodní řady. Odebrat tyto prvky z  $A$ , odebrat všechna srovnání s těmito body.
2. Ve zbylé množině hledat prvky, které v ostrém srovnání nikdy nejsou napravo (nevedou do nich šipky). Dát do druhé řady zdola, odebrat je z množiny prvků. Spojit horní řadu s dolní tam, kde je relace, odebrat tyto dvojice ze seznamu srovnání.
3. Ve zbylé množině hledat prvky, které ve srovnání  $\prec$  nikdy nejsou napravo (nevedou do nich šipky). Vytvořit z nich novou řadu nahoře, odebrat z množiny prvků. Spojit horní řadu s nižšími tam, kde je relace, přičemž postupujeme shora dolů (nejprve spojujeme horní řadu s tou pod ní, pak horní s tou o jedno níže, atd. až po horní s dolní). Existující dvojice vyškrtnáme ze seznamu, ale do grafu je kreslíme jen tehdy, pokud ještě tuto cestu nelze absolvovat pomocí již nakreslených spojit, a to vždy směrem zdola nahoru.
4. Opakovat krok 3., dokud jsou v množině body.

### Definice.

Nechť  $(A, \preceq)$  je částečně uspořádaná množina a  $\prec$  odpovídající odvozená relace. Nechť  $M$  je neprázdná podmnožina  $A$ .

Řekneme, že prvek  $m \in A$  je **nejmenší prvek** množiny  $M$ , jestliže  $m \in M$  a pro všechna  $x \in M$  platí  $m \preceq x$ .

Řekneme, že prvek  $m \in A$  je **největší prvek** množiny  $M$ , jestliže  $m \in M$  a pro všechna  $x \in M$  platí  $x \preceq m$ .

Řekneme, že prvek  $m \in A$  je **minimální prvek** množiny  $M$ , jestliže  $m \in M$  a neexistuje  $x \in M$ :  $x \prec m$ .

Značíme to  $m = \min(M)$ .

Řekneme, že prvek  $m \in A$  je **maximální prvek** množiny  $M$ , jestliže  $m \in M$  a neexistuje  $x \in M$ :  $m \prec x$ .

Značíme to  $m = \max(M)$ .

**Věta.**

Nechť je  $(A, \preceq)$  částečně uspořádaná množina, uvažujme neprázdnou podmnožinu  $M \subseteq A$ . Pak platí následující:

(i) Jestliže existuje nejmenší prvek  $M$ , pak je jediný.

Jestliže existuje největší prvek  $M$ , pak je jediný.

(ii) Jestliže je  $m$  nejmenší prvek  $M$ , pak  $m = \min(M)$  a jiné minimum už není.

Jestliže je  $m$  největší prvek  $M$ , pak  $m = \max(M)$  a jiné maximum už není.

**Věta.**

Nechť  $(A, \preceq)$  je částečně uspořádaná množina. Jestliže je  $M$  konečná neprázdna podmnožina  $A$ , pak existuje  $\min(M)$  a  $\max(M)$ .

**Definice.**

Nechť  $(A, \preceq)$  je částečně uspořádaná množina. Řekneme, že  $a, b \in A$  jsou **porovnatelné**, jestliže  $a \preceq b$  nebo  $b \preceq a$ .

**Definice.**

Nechť  $(A, \preceq)$  je částečně uspořádaná množina. Řekneme, že  $\preceq$  je **lineární uspořádání**, jestliže jsou každé dva prvky z  $A$  porovnatelné.

**Věta.**

Nechť  $(A, \preceq)$  je lineárně uspořádaná množina. Jestliže je  $M$  její neprázdna konečná podmnožina, pak má nejmenší a největší prvek.

**Věta.**

Nechť  $(A, \preceq)$  je konečná částečně uspořádaná množina. Je to lineární uspořádání právě tehdy, jestliže lze prvky  $A$  napsat jako  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  tak, aby  $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_n$ .

**Definice.**

Nechť  $(A, \preceq)$  je částečně uspořádaná množina. Relace  $\preceq_L$  na  $A$  se nazývá **lineární rozšíření** relace  $\preceq$ , jestliže je  $(A, \preceq_L)$  lineárně uspořádaná množina a  $\preceq \subseteq \preceq_L$ , tedy pro všechna  $a, b \in A$  splňující  $a \preceq b$  platí i  $a \preceq_L b$ .

**Věta.**

Pro každou konečnou částečně uspořádanou množinu  $(A, \preceq)$  existuje lineární rozšíření  $\preceq_L$  na  $A$ .

```

procedure topological sort(( $A, \preceq$ ))
 $k := 0$ ;
while  $A \neq \emptyset$  do
   $k := k + 1$ 
   $a_k := \min(A)$ 
   $A := A - \{a_k\}$ ;
output: ( $a_1 \prec_L a_2 \prec_L \dots \prec_L a_k$ );

```

**Definice.**

Uvažujme částečně uspořádané množiny  $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_n, \preceq_n)$ .

Definujeme **součinnové uspořádání** na  $A = A_1 \times \dots \times A_n$  následovně: Pro  $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in A$  platí  $a \preceq b$  právě tehdy, jestliže  $a_i \prec_i b_i$  pro všechna  $i = 1, \dots, n$ .

**Definice.**

Uvažujme částečně uspořádané množiny  $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_n, \preceq_n)$ . Definujeme **lexikografické uspořádání** na  $A = A_1 \times \dots \times A_n$  následovně: Pro  $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in A$  platí  $a \preceq_L b$  právě tehdy, jestliže  $a_i = b_i$  pro všechna  $i = 1, \dots, n$  (tedy  $a = b$ ), nebo existuje index  $k$  takový, že  $a_i = b_i$  pro všechna  $i$  splňující  $1 \leq i < k$  a  $a_k \prec_k b_k$ .

**Věta.**

Uvažujme lineárně uspořádané množiny  $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_n, \preceq_n)$ . Pak je  $A = A_1 \times \dots \times A_n$  spolu s lexikografickým uspořádáním  $\preceq_L$  lineárně uspořádaná množina.

**Definice.**

Nechť  $(A, \preceq)$  je částečně uspořádaná množina. Řekneme, že  $(A, \preceq)$  je **dobře uspořádaná množina**, jestliže každá neprázdna podmnožina množiny  $A$  má nejmenší prvek.

**Fakt.**

Každé dobré uspořádání je také lineární.

**Axiom (princip dobrého uspořádání)**

$(\mathbb{N}, \leq)$  je dobře uspořádaná množina.

**Věta.**

Uvažujme dobře uspořádané množiny  $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_n, \preceq_n)$ . Pak je  $A = A_1 \times \dots \times A_n$  spolu s lexikografickým uspořádáním  $\preceq_L$  dobře uspořádaná množina.

**Definice.**

Relace na množině se nazývá **ekvivalence**, jestliže je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

**Definice.**

Nechť  $\mathcal{R}$  je relace ekvivalence na nějaké množině  $A$ .

Pro  $a \in A$  definujeme **třidu ekvivalence** prvku  $a$  vzhledem k  $\mathcal{R}$  jako

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{b \in A : a\mathcal{R}b\}.$$

**Věta.**

Nechť  $\mathcal{R}$  je relace ekvivalence na nějaké množině  $A$ , nechť  $a \in A$ .

- (i) Pro každé  $b, c \in [a]_{\mathcal{R}}$  platí  $b\mathcal{R}c$ .
- (ii) Pro každé  $b \in [a]_{\mathcal{R}}$  a  $c \in A$  platí, že jestliže  $b\mathcal{R}c$ , pak  $c \in [a]_{\mathcal{R}}$ .
- (iii) Pro každé  $b \in [a]_{\mathcal{R}}$ :  $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$ .
- (iv) Pro každé  $a, b \in A$  platí:  $a\mathcal{R}b$  právě tehdy, když  $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$ .
- (v) Pro všechna  $a, b \in A$  platí, že buď  $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$ , nebo  $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} = \emptyset$ .

**Definice.**

Uvažujme množinu  $A$ . Jejím **rozkladem** rozumíme libovolný soubor  $\{A_i\}_{i \in I}$  neprázdných podmnožin  $A$  takových, že  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  a pro všechna  $i \neq j \in I$  jsou  $A_i, A_j$  disjunktní.

**Věta.**

Nechť  $A$  je množina.

- (i) Jestliže je  $\mathcal{R}$  ekvivalence na  $A$ , pak  $\{[a]_{\mathcal{R}}\}_{a \in A}$  je rozklad množiny  $A$ .
- (ii) Jestliže je  $\{A_i\}_{i \in I}$  nějaký rozklad množiny  $A$ , pak existuje relace ekvivalence  $\mathcal{R}$  na  $A$  taková, že  $\{A_i\}_{i \in I}$  jsou přesně třídy ekvivalence  $\mathcal{R}$ .

**Věta.**

Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je relace „být kongruentní modulo  $n$ “ ekvivalence na  $\mathbb{Z}$ .

**Definice.**

Prostor  $\mathbb{Z}_n$  definujeme jako množinu všech tříd ekvivalence v  $\mathbb{Z}$  vzhledem k relaci být kongruentní modulo  $n$ , tedy

$$\mathbb{Z}_n = \{[a]_n : a \in \mathbb{Z}\}.$$

Pro  $[a]_n, [b]_n \in \mathbb{Z}_n$  definujeme

$$[a]_n \oplus [b]_n = [a + b]_n,$$

$$[a]_n \odot [b]_n = [a \cdot b]_n.$$