

DMA Přednáška – Zobrazení a mohutnost

Definice.

Nechť A, B jsou množiny. Podmnožina T množiny $A \times B$ se nazývá **zobrazení** z A do B , jestliže pro každé $a \in A$ existuje právě jedno $b \in B$ splňující $(a, b) \in T$.

Zobrazení T z A do B značíme $T: A \mapsto B$.

Namísto $(a, b) \in T$ také píšeme $T(a) = b$.

Množina A se nazývá **definiční obor** T , značeno $D(T)$, množina B je cílová množina T .

Definujeme také **obor hodnot** T jako

$$\text{ran}(T) = \{b \in B; \exists a \in A: T(a) = b\} = \{T(a); a \in A\}.$$

Definice.

Nechť $T: A \mapsto B$ a $S: C \mapsto D$ jsou zobrazení. Řekneme, že jsou si rovna, značeno $T = S$, jestliže $A = C$, $B = D$ a

$$\forall a \in A: T(a) = S(a).$$

Definice.

Nechť $T: A \mapsto B$ a $S: B \mapsto C$ jsou zobrazení. Definujeme jejich **složené zobrazení** či **kompozici** $S \circ T: A \mapsto C$ předpisem

$$(S \circ T)(a) = S(T(a)) \quad \text{pro } a \in A.$$

Značíme také $S \circ T = S(T)$.

Věta.

Nechť $T: A \mapsto B$, $S: B \mapsto C$ a $R: C \mapsto D$ jsou zobrazení. Pak platí $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$.

Definice.

Nechť $T: A \mapsto B$ je zobrazení. Řekneme, že zobrazení $S: B \mapsto A$ je **inverzní** k T , jestliže platí

- $(S \circ T)(a) = a$ pro všechna $a \in A$
- $(T \circ S)(b) = b$ pro všechna $b \in B$.

Pak jej značíme T^{-1} .

Pokud T^{-1} existuje, tak řekneme, že T je **invertibilní**.

Fakt.

Nechť $T: A \mapsto B$ je invertibilní zobrazení. Pak $T^{-1}(b) = a$ právě tehdy, když $T(a) = b$.

Důsledek.

Nechť $T: A \mapsto B$ je zobrazení. Jestliže je invertibilní, tak je jeho inverzní zobrazení T^{-1} dáno jednoznačně.

Definice.

Nechť $T: A \mapsto B$ je zobrazení.

Řekneme, že T je **prosté** či **injektivní**, jestliže

$$\forall x, y \in A: T(x) = T(y) \implies x = y.$$

Řekneme, že T je **na** či **surjektivní**, jestliže $\text{ran}(T) = B$.

Řekneme, že T je **vzájemně jednoznačné** či **bijekce**, jestliže je prosté a na.

Věta.

Zobrazení je invertibilní právě tehdy, když je to bijekce.

Fakt.

Nechť $T: A \mapsto B$ a $S: B \mapsto C$ jsou zobrazení. Pak platí:

- (i) Jestliže jsou T a S prosté, tak je $S \circ T$ prosté.
- (ii) Jestliže jsou T a S na, tak je $S \circ T$ na.
- (iii) Jestliže jsou T a S bijekce, tak je $S \circ T$ bijekce A na C .

Věta.

Nechť $T: A \mapsto B$ a $S: B \mapsto C$ jsou zobrazení. Jestliže jsou invertibilní, tak je i $S \circ T$ invertibilní a navíc platí $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

Fakt.

Nechť $T: A \mapsto B$ je zobrazení a A, B mají konečně mnoho prvků.

- (i) Jestliže má A více prvků než B , pak T nemůže být prosté.
- (ii) Jestliže má B více prvků než A , pak T nemůže být na.
- (iii) Jestliže A a B nemají stejně prvků, pak T nemůže být bijekce.

Důsledek.

Nechť $T: A \mapsto B$ je zobrazení a A, B mají konečně mnoho prvků.

- (i) Jestliže je T prosté, pak B má stejně nebo více prvků než A .
- (ii) Jestliže je T na, pak B má stejně nebo méně prvků než A .
- (iii) Jestliže je T bijekce, pak A a B mají stejně prvků.

Definice.

Řekneme, že množiny A, B mají stejnou **mohutnost**, značeno $|A| = |B|$, jestliže existuje bijekce z A na B .

Řekneme, že mohutnost A je menší nebo rovna mohutnosti B , značeno $|A| \leq |B|$, jestliže existuje prosté zobrazení z A do B . Pak také můžeme říct, že mohutnost B je větší nebo rovna mohutnosti A .

Fakt.

Jestliže $A \subseteq B$, pak $|A| \leq |B|$.

Fakt.

Nechť A, B jsou množiny.

- (i) $|A| = |A|$ a $|A| \leq |A|$.
- (ii) $|A| = |B|$ právě tehdy, když $|B| = |A|$.
- (iii) Jestliže $|A| = |B|$, pak $|A| \leq |B|$.

Věta. (Cantor-Bernstein-Schroeder)

Nechť A, B jsou množiny. Jestliže $|A| \leq |B|$ a $|B| \leq |A|$, pak $|A| = |B|$.

Definice.

Řekneme, že množina A je **konečná**, jestliže existuje takové $n \in \mathbb{N}_0$, aby $|A| = |\{1, 2, \dots, n\}|$;
pak píšeme $|A| = n$.

Jinak řekneme, že A je **nekonečná**.

Věta.

Množina nemůže být zároveň konečná a nekonečná.

Mohutnost každé konečné množiny je určena jednoznačně.

Věta.

Nechť A, B jsou množiny.

- (i) Jestliže je A nekonečná a B je její nadmnožina, pak je B nekonečná.
- (ii) Jestliže je A nekonečná, pak je i $A \cup B$ nekonečná.
- (iii) Jestliže je A nekonečná a $B \neq \emptyset$, pak je $A \times B$ nekonečná.

Věta.

Nechť A, B jsou množiny.

- (i) Jestliže je A konečná a B je její podmnožina, tak je B konečná a platí $|B| \leq |A|$.
Je-li navíc B podmnožina vlastní, pak $|B| < |A|$.
- (ii) Jsou-li A, B konečné, pak je i $A \cup B$ konečná a platí $|A \cup B| \leq |A| + |B|$.
Jsou-li navíc A, B disjunktní, pak $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- (iii) Jsou-li A, B konečné, pak je $A \times B$ konečná a platí $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Věta.

(i) Jsou-li A_i pro $i = 1, 2, \dots, n$ konečné množiny, pak je i $\bigcup_{i=1}^n A_i$ konečná a $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |A_i|$.

Jsou-li navíc po dvou disjunktní, tak $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$.

(ii) Jsou-li A_i pro $i = 1, 2, \dots, n$ konečné množiny, pak je i $A_1 \times \dots \times A_n$ konečná a

$$|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdots |A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|.$$

Věta.

(i) Jestliže je množina nekonečná, tak má vlastní podmnožinu, která má stejnou mohutnost.

(ii) Nechť A, B jsou množiny, A je nekonečná a $|B| \leq |A|$. Pak $|A \cup B| = |A|$.

(iii) Nechť A, B jsou množiny, A je nekonečná a $|B| \leq |A|$. Pak $|A \times B| = |A|$.

Fakt.

Jestliže je A nekonečná množina, pak $|\mathbb{N}| \leq |A|$.

Definice.

Nechť A je nekonečná množina.

Řekneme, že je **spočetná**, jestliže má stejnou mohutnost jako \mathbb{N} .

Jinak řekneme, že je **nespočetná**.

Věta.

(i) Množina \mathbb{N}_0 je spočetná.

(ii) Množina \mathbb{Z} je spočetná.

(iii) Množina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je spočetná.

(iv) Množina $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je spočetná.

(v) Množina racionálních čísel \mathbb{Q} je spočetná.

Fakt.

(i) Jestliže jsou A_n pro $n \in \mathbb{N}$ nejvýše spočetné množiny, pak je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ nejvýše spočetná.

(ii) Jestliže jsou navíc A_n neprázdné a po dvou disjunktní, pak je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ spočetná.

Věta.

Interval reálných čísel $(0, 1)$ je nespočetný.

Důsledek.

Množina reálných čísel \mathbb{R} je nespočetná.

Definice.

Nechť A je množina. Definujeme **potenční množinu** A , značeno $P(A)$, jako množinu všech podmnožin A .

Fakt.

Jestliže je A konečná množina, pak $|P(A)| = 2^{|A|}$.

Věta. (Cantorova)

Pro každou množinu A platí $|A| < |P(A)|$.