

## DMA Přednáška – Posloupnosti

**Definice.**

**Posloupnost** je libovolné zobrazení z nějaké množiny  $\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$  do  $\mathbb{R}$ , kde pro  $n_0 \in \mathbb{Z}$ .

**Definice.**

Nechť  $\{a_k\}$  je posloupnost.

Řekneme, že tato posloupnost jde do nekonečna, popřípadě že má limitu nekonečno, značeno  $\lim(a_k) = \infty$  popřípadě  $a_k \rightarrow \infty$ , jestliže

pro každé  $K > 0$  existuje  $k_0$  tak, aby  $a_k > K$  pro všechna  $k \geq k_0$ .

Řekneme, že tato posloupnost jde k nule, popřípadě že konverguje k nule, popřípadě že má limitu rovnou nule, značeno  $\lim(a_k) = 0$  popřípadě  $a_k \rightarrow 0$ , jestliže

pro každé  $K > 0$  existuje  $k_0$  tak, aby  $|a_k| < K$  pro všechna  $k \geq k_0$ .

**Fakt.**

(i) Nechť  $a > 0$ . Pak  $k^a \rightarrow \infty$  a  $\frac{1}{k^a} \rightarrow 0$ .

(ii) Jestliže  $q > 1$ , pak  $q^k \rightarrow \infty$ .

Jestliže  $|q| < 1$ , pak  $q^k \rightarrow 0$ .

(iii)  $k! \rightarrow \infty$ .

(iv)  $k^k \rightarrow \infty$ .

(v) Nechť  $b > 0$ . Pak  $[\ln(k)]^b \rightarrow \infty$ .

$10^6$ operací za 1 sec.	čas in ms.		s=sec	m=min	d=den	r=rok		
$k =$	5	10	20	50	100	1000	$10^5$	$10^8$
$\ln(k):$	0.0016	0.0023	0.003	0.004	0.0046	0.007	0.01	0.018
• $k:$	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	1	0.1s	1.7m
• $k^2:$	0.025	0.1	0.4	2.5	10	1s	28m	317r
$\frac{1}{100}k^2:$	0.0002	0.001	0.004	0.025	0.01	10	1.7m	3.2r
$k^{1.585}:$	0.013	0.038	0.12	0.49	1.5	57	1.4m	55d
$2^k:$	0.03	1	1s	35.7r	$4 \times 10^{16}$ r	$3 \times 10^{287}$ r		

Hardware setup: $k = 10 \implies$ 1sec.	čas in s.		m=min	d=den	r=rok	
$k =$	10	20	30	40	50	100
$\ln(k):$	1	1.3	1.5	1.6	1.7	2
• $k:$	1	2	3	4	5	10
$20k:$	1	2	3	4	5	10
$20k + 5:$	1	2	3	3.9	4.9	9.8
$k^2:$	1	4	9	16	25	1m40s
$k^3:$	1	8	27	1m	2m	17m
$2^k:$	1	17m	12d	34r	$35 \times 10^3$ r	$4 \times 10^{19}$ r
$k!:$	1	$21 \times 10^3$ r	$2 \times 10^{18}$ r	$7 \times 10^{33}$ r	$3 \times 10^{50}$ r	

**Definice.**

Nechť  $\{a_k\}$ ,  $\{b_k\}$  jsou posloupnosti splňující  $a_k \rightarrow \infty$ ,  $b_k \rightarrow \infty$ .

Řekneme, že  $a_k$  je  $o(b_k)$ , jestliže  $\frac{a_k}{b_k} \rightarrow 0$  neboli  $\frac{b_k}{a_k} \rightarrow \infty$ .

Řekneme, že  $a_k$  je  $\omega(b_k)$ , jestliže  $\frac{a_k}{b_k} \rightarrow \infty$  neboli  $\frac{b_k}{a_k} \rightarrow 0$ .

Řekneme, že  $a_k$  je  $O(b_k)$ , jestliže  $\exists N \in \mathbb{N} \exists K > 0$  aby  $\forall k \geq N: a_k \leq Kb_k$ .

Řekneme, že  $a_k$  je  $\Omega(b_k)$ , jestliže  $\exists N \in \mathbb{N} \exists L > 0$  aby  $\forall k \geq N: a_k \geq Lb_k$ .

Řekneme, že  $a_k$  je  $\Theta(b_k)$  nebo že  $a_k \asymp b_k$ , jestliže  $\exists N \in \mathbb{N} \exists K, L > 0$  aby  $\forall k \geq N: Lb_k \leq a_k \leq Kb_k$ .

**Fakt.**

Nechť  $\{a_k\}$ ,  $\{b_k\}$  jsou posloupnosti splňující  $a_k \rightarrow \infty$ ,  $b_k \rightarrow \infty$ .

Jestliže  $\frac{a_k}{b_k} \rightarrow A > 0$ , pak  $a_k$  je  $\Theta(b_k)$ .

**Věta.** (škála mocnin)

(i) Nechť  $a, b > 0$  a  $q > 1$ . Pak platí:

$$[\ln(k)]^a \text{ je } o(k^b),$$

$$k^b \text{ je } o(q^k),$$

$$q^k \text{ je } o(k!),$$

$$k! \text{ je } o(k^k).$$

(ii) Jestliže  $0 < a < b$ , pak platí:

$$[\ln(k)]^a \text{ je } o([\ln(k)]^b),$$

$$k^a \text{ je } o(k^b).$$

(iii) Jestliže  $1 < q < r$ , pak  $q^k$  je  $o(r^k)$ .

**Fakt.**

Jestliže  $b_k = o(a_k)$ , pak  $a_k + b_k = \Theta(a_k)$ .