DMA Přednáška – Posloupnosti

Definice.
Posloupnost je libovolné zobrazení a z nějaké množiny $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$ do $\mathbb{R}$, kde $n_0 \in \mathbb{Z}$.
Takovou posloupnost značíme $(a_k)_{k=n_0}^{\infty}$, kde $a_k = a(k)$.

Definice.
Nechť $(a_k)_{k\ge n_0}$ je posloupnost.
Řekneme, že tato posloupnost jde do nekonečna, popřípadě že má limitu nekonečno, značeno $\lim(a_k) = \infty$ popřípadě $a_k \to \infty$, jestliže

pro každé $K > 0$ existuje k_0 tak, aby $a_k > K$ pro všechna $k \ge k_0$.

Řekneme, že tato posloupnost konverguje k nule, popřípadě že má limitu nula,
značeno $\lim(a_k) = 0$ popřípadě $a_k \to 0$, jestliže $\frac{1}{|a_k|} \to \infty$.

Fakt.
(i) Nechť $a > 0$. Pak $k^a \to \infty$ a $\frac{1}{k^a} \to 0$.
(ii) Jestliže $q > 1$, pak $q^k \to \infty$.
Jestliže $|q| < 1$, pak $q^k \to 0$.
(iii) $k! \to \infty$.
(iv) $k^k \to \infty$.
(v) Nechť $b > 0$. Pak $[\ln(k)]^b \to \infty$.

10^6 operací za 1 sec. čas in ms. s=sec m=min d=den r=rok

$k =$	5	10	20	50	100	1000	10^5	10^8
$\ln(k)$:	0.0016	0.0023	0.003	0.004	0.0046	0.007	0.01	0.018
• k:	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	1	0.1s	1.7m
• k^2:	0.025	0.1	0.4	2.5	10	1s	28m	317r
$\frac{1}{100}k^2$:	0.0002	0.001	0.004	0.025	0.01	10	1.7m	3.2r
$k^{1.585}$:	0.013	0.038	0.12	0.49	1.5	57	1.4m	55d
2^k:	0.03	1	1s	35.7r	4×10^{16}r	3×10^{287}r		

Hardware setup: $k = 10 \implies$ 1sec. čas in s. m=min d=den r=rok

$k =$	10	20	30	40	50	100
$\ln(k)$:	1	1.3	1.5	1.6	1.7	2
• k:	1	2	3	4	5	10
$20k$:	1	2	3	4	5	10
$20k+5$:	1	2	3	3.9	4.9	9.8
k^2:	1	4	9	16	25	1m40s
k^3:	1	8	27	1m	2m	17m
2^k:	1	17m	12d	34r	$35{\times}10^3$r	$4{\times}10^{19}$r
$k!$:	1	$21{\times}10^3$r	$2{\times}10^{18}$r	$7{\times}10^{33}$r	$3{\times}10^{50}$r	

Definice.
Nechť (a_k), (b_k) jsou posloupnosti nenulových čísel.
Řekneme, že a_k je $o(b_k)$, psáno také $a_k = o(b_k)$, jestliže $\frac{|b_k|}{|a_k|} \to \infty$ neboli $\frac{a_k}{b_k} \to 0$.
Řekneme, že a_k je $\omega(b_k)$, psáno také $a_k = \omega(b_k)$, jestliže $\frac{|a_k|}{|b_k|} \to \infty$ neboli $\frac{b_k}{a_k} \to 0$.
Řekneme, že a_k je $O(b_k)$, jestliže existují $K > 0$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_k| \le K|b_k|$ pro $k \ge k_0$.
Řekneme, že a_k je $\Omega(b_k)$, jestliže existují $L > 0$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_k| \ge L|b_k|$ pro $\forall k \ge k_0$.
Řekneme, že a_k je $\Theta(b_k)$ nebo že $a_k \asymp b_k$, jestliže existují $K, L > 0$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $L|b_k| \le |a_k| \le K|b_k|$ pro $\forall k \ge k_0$.

Fakt.
Uvažujme posloupnosti $(a_k), (b_k)$ nenulových čísel.
Jestliže má $\frac{|a_k|}{|b_k|}$ nenulovou (a konečnou) limitu, tak $a_k = \Theta(b_k)$.

Věta. (škála mocnin)
(i) Nechť $a, b > 0$ a $q > 1$. Pak platí:
$[\ln(k)]^a$ je $o(k^b)$,
k^b je $o(q^k)$,
q^k je $o(k!)$,
$k!$ je $o(k^k)$.
(ii) Jestliže $0 < a < b$, pak platí:
$[\ln(k)]^a$ je $o([\ln(k)]^b)$,
k^a je $o(k^b)$.
(iii) Jestliže $1 < q < r$, pak q^k je $o(r^k)$.

Fakt.
Jestliže $b_k = o(a_k)$, pak $a_k + b_k = \Theta(a_k)$.