

DMA Přednáška – Posloupnosti

Definice.

Posloupnost je libovolné zobrazení z nějaké množiny $\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$ do \mathbb{R} , kde pro $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Definice.

Nechť $\{a_k\}$ je posloupnost.

Řekneme, že tato posloupnost jde do nekonečna, popřípadě že má limitu nekonečno, značeno $\lim(a_k) = \infty$ popřípadě $a_k \rightarrow \infty$, jestliže

pro každé $K > 0$ existuje k_0 tak, aby $a_k > K$ pro všechna $k \geq k_0$.

Řekneme, že tato posloupnost jde k nule, popřípadě že konverguje k nule, popřípadě že má limitu rovnou nule, značeno $\lim(a_k) = 0$ popřípadě $a_k \rightarrow 0$, jestliže

pro každé $K > 0$ existuje k_0 tak, aby $|a_k| < K$ pro všechna $k \geq k_0$.

Fakt.

(i) Nechť $a > 0$. Pak $k^a \rightarrow \infty$ a $\frac{1}{k^a} \rightarrow 0$.

(ii) Jestliže $q > 1$, pak $q^k \rightarrow \infty$.

Jestliže $|q| < 1$, pak $q^k \rightarrow 0$.

(iii) $k! \rightarrow \infty$.

(iv) $k^k \rightarrow \infty$.

(v) Nechť $b > 0$. Pak $[\ln(k)]^b \rightarrow \infty$.

10^6 operací za 1 sec.	čas in ms.		s=sec	m=min	d=den	r=rok		
$k =$	5	10	20	50	100	1000	10^5	10^8
$\ln(k):$	0.0016	0.0023	0.003	0.004	0.0046	0.007	0.01	0.018
• $k:$	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	1	0.1s	1.7m
• $k^2:$	0.025	0.1	0.4	2.5	10	1s	28m	317r
$\frac{1}{100}k^2:$	0.0002	0.001	0.004	0.025	0.01	10	1.7m	3.2r
$k^{1.585}:$	0.013	0.038	0.12	0.49	1.5	57	1.4m	55d
$2^k:$	0.03	1	1s	35.7r	$4 \times 10^{16}r$	$3 \times 10^{287}r$		

Hardware setup: $k = 10 \implies 1\text{sec.}$	čas in s.		m=min	d=den	r=rok	
$k =$	10	20	30	40	50	100
$\ln(k):$	1	1.3	1.5	1.6	1.7	2
• $k:$	1	2	3	4	5	10
$20k:$	1	2	3	4	5	10
$20k + 5:$	1	2	3	3.9	4.9	9.8
$k^2:$	1	4	9	16	25	1m40s
$k^3:$	1	8	27	1m	2m	17m
$2^k:$	1	17m	12d	34r	35×10^3r	$4 \times 10^{19}r$
$k!:$	1	21×10^3r	$2 \times 10^{18}r$	$7 \times 10^{33}r$	$3 \times 10^{50}r$	

Definice.

Nechť $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ jsou posloupnosti splňující $a_k \rightarrow \infty$, $b_k \rightarrow \infty$.

Řekneme, že a_k je $o(b_k)$, jestliže $\frac{a_k}{b_k} \rightarrow 0$ neboli $\frac{b_k}{a_k} \rightarrow \infty$.

Řekneme, že a_k je $\omega(b_k)$, jestliže $\frac{a_k}{b_k} \rightarrow \infty$ neboli $\frac{b_k}{a_k} \rightarrow 0$.

Řekneme, že a_k je $O(b_k)$, jestliže $\exists N \in \mathbb{N} \exists K > 0$ aby $\forall k \geq N: a_k \leq K b_k$.

Řekneme, že a_k je $\Omega(b_k)$, jestliže $\exists N \in \mathbb{N} \exists L > 0$ aby $\forall k \geq N: a_k \geq L b_k$.

Řekneme, že a_k je $\Theta(b_k)$ nebo že $a_k \asymp b_k$, jestliže $\exists N \in \mathbb{N} \exists K, L > 0$ aby $\forall k \geq N: L b_k \leq a_k \leq K b_k$.

Fakt.

Nechť $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ jsou posloupnosti splňující $a_k \rightarrow \infty$, $b_k \rightarrow \infty$.

Jestliže $\frac{a_k}{b_k} \rightarrow A > 0$, pak a_k je $\Theta(b_k)$.

Věta. (škála mocnin)

(i) Nechť $a, b > 0$ a $q > 1$. Pak platí:

$[\ln(k)]^a$ je $o(k^b)$,

k^b je $o(q^k)$,

$$q^k \text{ je } o(k!),$$

$$k! \text{ je } o(k^k).$$

(ii) Jestliže $0 < a < b$, pak platí:

$$[\ln(k)]^a \text{ je } o([\ln(k)]^b),$$

$$k^a \text{ je } o(k^b).$$

(iii) Jestliže $1 < q < r$, pak q^k je $o(r^k)$.

Fakt.

Jestliže $b_k = o(a_k)$, pak $a_k + b_k = \Theta(a_k)$.