DMA Přednáška – Rekurentní rovnice

Definice.
Rekurentní rovnice či **rekurzivní rovnice** pro posloupnost $(a_k)_{k\geq n_0}$ je libovolná množina rovnic rovnic typu

$$F_n(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n_0}) = 0,\ n \geq n_1$$

kde F_n jsou nějaké funkce.
Posloupnost $(a_k)_{k\geq n_0}$ je řešením takového vztahu či rovnice, pokud pro všechna $n \geq n_1$ dostaneme dosazením a_{n_0} až a_n do F_n pravdivou rovnost $F_n(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n_0}) = 0$.

Definice.
Lineární rekurentní rovnice řádu $d \in \mathbb{N}_0$ je libovolná rovnice ve tvaru

$$a_{n+d} + c_{d-1}(n)a_{n+d-1} + \dots + c_2(n)a_{n+2} + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n, \quad n \geq n_0,$$

kde $n_0 \in \mathbb{Z}$, $c_k(n)$ pro $k \in \{0, \dots, d-1\}$ jsou nějaké funkce $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$ (tzv. **koeficienty** rovnice), přičemž $c_0(n)$ není identicky nulová funkce, a $(b_n)_{n=n_0}^{\infty}$ je pevně zvolená posloupnost reálných čísel (tzv. **pravá strana** rovnice).

Jestliže $b_n = 0$ pro všechna $n \geq n_0$, pak se příslušná rovnice nazývá **homogenní**.

Zápis rovnice pomocí sumačního značení:

$$a_{n+d} + \sum_{k=0}^{d-1} c_k(n)a_{n+k} = b_n.$$

Definice.
Uvažujme lineární rekurentní rovnici

$$a_{n+d} + c_{d-1}(n)a_{n+d-1} + \ldots + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n, \quad n \geq n_0.$$

Pak se lineární rekurentní rovnice

$$a_{n+d} + c_{d-1}(n)a_{n+d-1} + \ldots + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = 0, \quad n \geq n_0$$

nazývá k ní **přidružená homogenní rovnice**.

Věta. (o struktuře řešení lineární rekurentní rovnice)
Nechť je dána lineární rekurentní rovnice

$$a_{n+k} + c_{k-1}(n)a_{n+k-1} + \ldots + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n, \quad n \geq n_0$$

a nějaké její řešení $(a_{p,n})_{n=n_0}^{\infty}$.
Posloupnost $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ je řešením této rovnice právě tehdy, pokud se dá napsat jako $(a_n) = (a_{p,n}) + (a_{h,n})$, kde $(a_{h,n})_{n=n_0}^{\infty}$ je nějaké řešení přidružené homogenní rovnice.

Množina všech řešení dané lineární rekurentní rovnice je tedy

$$\big\{(a_{p,n}) + (a_{h,n});\ (a_{h,n}) \text{ řeší přidruženou homogenní rovnici}\big\}.$$

Věta. (o prostoru řešení homogenní lineární rekurentní rovnice)
Množina všech řešení dané homogenní lineární rekurentní rovnice řádu d je vektorový prostor dimenze d.

Definice.
Lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty je libovolná rovnice ve tvaru

$$a_{n+d} + c_{d-1}a_{n+d-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = b_n, \quad n \geq n_0,$$

kde $n_0 \in \mathbb{Z}$, $c_i \in \mathbb{R}$ pro $i = 0, \ldots, d-1$ jsou pevně zvolená čísla a $(b_n)_{n=n_0}^{\infty}$ je pevně zvolená posloupnost reálných čísel.

Definice.
Nechť je dána lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty

$$a_{n+d} + c_{d-1}a_{n+d-1} + \cdots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = b_n, \quad n \geq n_0.$$

Její **charakteristický polynom** je definován jako polynom

$$p(\lambda) = \lambda^d + c_{d-1}\lambda^{d-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0.$$

Rovnici $\lambda^d + c_{d-1}\lambda^{d-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0$ se říká **charakteristická rovnice**.
Jejím řešením získáme kořeny charakteristického polynomu zvané **charakteristická čísla**, popřípadě **vlastní čísla** dané rovnice.

Fakt.
Jestliže je λ_0 charakteristickým číslem dané homogenní lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty, pak je posloupnost $(\lambda_0^n)_{n=n_0}^{\infty}$ jejím řešením.

Věta.
Uvažujme homogenní lineární rekurentní rovnici s konstantními koeficienty. Jestliže jsou λ_i různá její charakteristická čísla, pak $(\lambda_i^n)_{n=n_0}^{\infty}$ tvoří lineárně nezávislou množinu řešení této rovnice.

Definice.
Nechť je dána lineární rekurentní rovnice řádu d

$$a_{n+d} + c_{d-1}(n)a_{n+d-1} + \ldots + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n, \quad n \geq n_0.$$

Za **počáteční podmínky** (**initial conditions**) pro tuto rovnici považujeme libovolnou soustavu rovností

$$a_{n_0} = A_0,\ a_{n_0+1} = A_1, \ldots,\ a_{n_0+d-1} = A_{d-1},$$

kde $A_k \in \mathbb{R}$ jsou pevně zvolená čísla.

Fakt.
Nechť je dána homogenní lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty. Jestliže je λ_0 její charakteristické číslo a má násobnost m jako kořen charakteristického polynomu, pak posloupnosti $(\lambda_0^n), (n\lambda_0^n), \dots, (n^{m-1}\lambda_0^n)$ jsou řešení dané rovnice a tvoří lineárně nezávislou množinu.

Věta.
Nechť je dána homogenní lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty řádu d. Nechť jsou $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ její různá charakteristická čísla, přičemž každé λ_i má násobnost $m_i \in \mathbb{N}$. Pak je množina

$$\big\{(\lambda_1^n), (n\lambda_1^n), \dots, (n^{m_1-1}\lambda_1^n), (\lambda_2^n), (n\lambda_2^n), \dots, (n^{m_2-1}\lambda_2^n), \dots, (\lambda_M^n), (n\lambda_M^n), \dots, (n^{m_M-1}\lambda_M^n)\big\}$$

bází prostoru řešení dané rovnice.

Algoritmus pro řešení homogenní lineární rekurentní rovnice $a_{n+d}+\sum\limits_{k=0}^{d-1} c_k a_{n+k}=0$, $n\geq n_0$ řádu d.

1. Sestavíme charakteristický polynom $p(\lambda)=\lambda^d+\sum\limits_{k=0}^{d-1} c_k\lambda^k$.

Řešením rovnice $p(\lambda)=0$ najdeme všechna charakteristická čísla dané rovnice.
2. Sestavíme množinu posloupností B takto:
• pro každé reálné charakteristické číslo λ přidáme do B posloupnost $(\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$;
• pro každé reálné charakteristické číslo λ, jehož násobnost je $m>1$, přidáme do B rovněž posloupnosti $(n\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty},\dots,(n^{m-1}\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$;
• pro každé komplexní charakteristické číslo $\lambda=r[\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)]$, které není reálné, přidáme do B posloupnosti $(r^n\cos(n\varphi))_{n=n_0}^{\infty}$ a $(r^n\sin(n\varphi))_{n=n_0}^{\infty}$; pro jeho komplexně sdružené číslo λ^* již do B nic nepřidáváme;
• pro každé komplexní charakteristické číslo $\lambda=r[\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)]$, které není reálné a jehož násobnost je $m>1$, přidáme do B posloupnosti $(nr^n\cos(n\varphi))_{n=n_0}^{\infty},\dots,(n^{m-1}r^n\cos(n\varphi))_{n=n_0}^{\infty}$
a $(nr^n\sin(n\varphi))_{n=n_0}^{\infty},\dots,(n^{m-1}r^n\sin(n\varphi))_{n=n_0}^{\infty}$; pro jeho komplexně sdružené číslo λ^* již do B nic nepřidáváme.
Množina B je bází prostoru řešení.

3. Označíme-li $B=\big\{(a_{1,n}),\dots,(a_{d,n})\big\}$, pak je obecné řešení dané rovnice určeno vzorcem $a_n=\sum\limits_{i=1}^{d} u_i a_{i,n}$, $n\geq n_0$ pro $u_1,\dots,u_d\in\mathbb{R}$.
4. Jsou-li dány počáteční podmínky, pak do nich za příslušná a_j pro $j=n_0,\dots,n_0+d-1$ dosadíme vzorce $a_j=\sum\limits_{i=1}^{d} u_i a_{i,j}$ a vyřešíme vzniklých d rovnic pro d neznámých u_i. Ty po dosazení do obecného řešení určí příslušné partikulární řešení.

Definice.
Řekneme, že posloupnost $(b_n)_{n=n_0}^{\infty}$ je **kvazipolynom**, jestliže existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ a polynom $p(n)$ takový, že $b_n = p(n)\lambda^n$ pro všechna $n \geq n_0$.

Věta.
Uvažujme rovnici
$$a_{n+d} + c_{d-1}a_{n+d-1} + \cdots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = b_n, \quad n \geq n_0.$$
Předpokládejme, že existují $\lambda \in \mathbb{R}$ a polynom p takový, že $b_n = p(n)\lambda^n$ pro všechna $n \geq n_0$. Nechť m je násobnost tohoto čísla λ jako charakteristického čísla přidružené homogenní rovnice, přičemž $m = 0$ v případě, že toto λ vůbec charakteristickým číslem není.
Pak existuje polynom q stupně stejného jako p takový, že $a_n = n^m q(n)\lambda^n$, $n \geq n_0$ je řešením dané rovnice.

Algoritmus pro nalezení řešení rovnice $a_{n+d} + c_{d-1}a_{n+d-1} + \cdots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = b_n$, $n \geq n_0$ řádu d, kde $b_n = p(n)\lambda^n$.

0. Pokud je to potřeba, zadanou rovnici přepíšeme do správného tvaru přesunem členů, popřípadě posunem indexu. Ujasníme si, s jakými posloupnostmi (jaká je indexace) rovnice pracuje.

1. Najdeme obecné řešení.

a) Najdeme homogenní řešení.

Z přidružené homogenní rovnice $a_{n+d} + c_{d-1}a_{n+d-1} + \cdots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0$ vytvoříme charakteristickou rovnici $\lambda^d + c_{d-1}\lambda^{d-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0$.

Vyřešením najdeme charakteristická čísla λ_j s násobnostmi m_j dané rovnice a sestavíme bázi prostoru řešení $\big\{(a_{i,n})_{n=n_0}^{\infty};\ i = 1, \dots, d\big\}$.

Obecné řešení přidružené homogenní rovnice (homogenní řešení) je $a_{h,n} = \sum\limits_{i=1}^{d} u_i a_{i,n}$ pro $u_i \in \mathbb{R}$.

Pokud byla zadaná rovnice homogenní, krok **1** končí.

b) Najdeme partikulární řešení.

Pro pravou stranu $b_n = p(n)\lambda^n$ sestavíme základní podobu odhadu řešení ve tvaru $q(n)\lambda^n$, kde q je obecný polynom stejného stupně jako p. Tradičně se jako koeficienty používají $A, B, C, \dots$ a žádnou mocninu není možné vynechat.

Pokud je pravá strana jen geometrická posloupnost $b_n = \lambda^n$, použijeme interpretaci $b_n = 1 \cdot \lambda^n$, tedy $p(n) = 1$ a $q(n) = A$.

Porovnáme λ s charakteristickými čísly λ_j z kroku **a)**. Pokud se žádnému nerovná, náš původní odhad řešení je správný, formálně položíme $m = 0$.

Pokud pro nějaké j platí $\lambda = \lambda_j$, položíme $m = m_j$ (násobnost dotyčného charakteristického čísla) a původní odhad vynásobíme členem n^m. Doporučuje se tuto mocninu roznásobit do polynomu.

Pokud je pravá strana jen polynom $b_n = p(n)$, použijeme interpretaci $b_n = p(n)1^n$, tedy korekce se určuje pomocí $\lambda = 1$.

Uhodnutý tvar řešení $a_{p,n} = n^m q(n)\lambda^n$ dosadíme do levé strany rovnice (ve správném tvaru), vytkneme λ^n a zbytek zjednodušíme do tvaru polynomu. Tento výstup porovnáme s pravou stranou b_n. Měli bychom dostat rovnost dvou polynomů stejného stupně, což porovnáním koeficientů vede na soustavu rovnic. Jejím řešením získáme hodnoty koeficientů polynomu $q(n)$a tím i partikulární řešení.

c) Obecné řešení dané úlohy je dáno vztahem $a_n = a_{p,n} + a_{h,n}$.

Typický zápis je $a_n = n^m q(n)\lambda^n + \sum\limits_{i=1}^{d} u_i a_{i,n}$, $n \geq n_0$, popřípadě $\Big(n^m q(n)\lambda^n + \sum\limits_{i=1}^{d} u_i a_{i,n}\Big)_{n=n_0}^{\infty}$.

2. Pokud byly s rovnicí zadány také počáteční podmínky, dosadíme v těchto podmínkách místo a_j vzorec z obecného řešení. Získáme d rovnic pro d neznámých $u_1, \dots, u_d$. Tuto soustavu vyřešíme, získaná u_i dosadíme do vzorce pro obecné řešení a dostaneme tak partikulární řešení pro zadanou úlohu.

1. Obecné řešení

 a) homogenní řešení
 $a_{h,n}$

 b) partikulární řešení
 $a_{p,n}$

 c) obecné řešení
 $a_n = a_{p,n} + a_{h,n}$

2. Partikulární řešení
 (počáteční podmínky)

Věta.
Nechť $d \in \mathbb{N}$, uvažujme funkce $c_0(n), c_1(n), \ldots, c_{d-1}(n)\colon \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$.

Jestliže posloupnost $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ řeší rovnici $\quad a_{n+d} + \sum\limits_{k=0}^{d-1} c_k(n) a_{n+k} = b_n,\ \ n \geq n_0$

a posloupnost $(\tilde{a}_n)_{n=n_0}^{\infty}$ řeší rovnici $\quad a_{n+d} + \sum\limits_{k=0}^{d-1} c_k(n) a_{n+k} = \tilde{b}_n,\ \ n \geq n_0,$

pak posloupnost $(a_n + \tilde{a}_n)_{n=n_0}^{\infty}$ řeší rovnici $\quad a_{n+d} + \sum\limits_{k=0}^{d-1} c_k(n) a_{n+k} = b_n + \tilde{b}_n,\ \ n \geq n_0.$

Fakt.
Nechť $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Nechť $f(n)$ je funkce definovaná pro $n \in M = \{b^k;\ k \in \mathbb{N}_0\}$. Předpokládejme, že existuje $a \in \mathbb{N}$ takové, že

$$f(n) = a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \qquad \text{pro všechna } n \in M,\ n \geq b.$$

Pak pro $n \in M$ platí $f(n) = n^{\log_b(a)} f(1)$.

Věta. (The Master theorem)
Uvažujme neklesající nezápornou funkci f na $\mathbb{N}$. Předpokládejme, že existují $a, b \in \mathbb{N}$, kde $b \geq 2$, $c \geq 0$ a $d \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro každé n ve tvaru $n = b^k$, $k \in \mathbb{N}$ funkce f splňuje $f(n) = a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d$.
Pak platí následující:
(i) Jestliže $d < n^{\log_b(a)}$ nebo $c = 0$, tak $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$.
(ii) Jestliže $d = n^{\log_b(a)}$, tak $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \log_2(n)) = \Theta(n^d \log_2(n))$.
(iii) Jestliže $d > n^{\log_b(a)}$, tak $f(n) = \Theta(n^d)$.

x, y: čísla o $n = 2m$ cifrách.
Nechť $x = x_L \cdot 10^m + x_R$, $y = y_L \cdot 10^m + y_R$. Pak

$$\begin{aligned} xy &= (x_L \cdot 10^m + x_R)(y_L \cdot 10^m + y_R) \\ &= 10^{2m} x_L y_L + 10^m (x_L y_R + x_R y_L) + x_R y_R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy &= (x_L \cdot 10^m + x_R)(y_L \cdot 10^m + y_R) \\ &= 10^{2m} x_L y_L + 10^m (x_L y_R + x_R y_L) + x_R y_R \\ &= 10^{2m} x_L y_L + 10^m [x_L y_L + (x_L - x_R)(y_R - y_L) + x_R y_R] + x_R y_R. \end{aligned}$$