

## DMA Přednáška – Rekurentní rovnice

**Definice.**

**Rekurentní rovnice** či **rekurzivní rovnice** pro posloupnost  $(a_k)_{k \geq n_0}$  je libovolná množina rovnic rovnic typu

$$F_n(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n_0}) = 0, \quad n \geq n_1$$

kde  $F_n$  jsou nějaké funkce.

Posloupnost  $(a_k)_{k \geq n_0}$  je řešením takového vztahu či rovnice, pokud pro všechna  $n \geq n_1$  dostaneme dosazením  $a_{n_0}$  až  $a_n$  do  $F_n$  pravdivou rovnost  $F_n(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n_0}) = 0$ .

**Definice.**

**Lineární rekurentní rovnice řádu  $d \in \mathbb{N}_0$**  je libovolná rovnice ve tvaru

$$a_{n+d} + c_{d-1}(n)a_{n+d-1} + \dots + c_2(n)a_{n+2} + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n, \quad n \geq n_0,$$

kde  $n_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $c_k(n)$  pro  $k \in \{0, \dots, d-1\}$  jsou nějaké funkce  $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$  (tzv. **koeficienty** rovnice), přičemž  $c_0(n)$  není identicky nulová funkce, a  $(b_n)_{n=n_0}^\infty$  je pevně zvolená posloupnost reálných čísel (tzv. **pravá strana** rovnice).

Jestliže  $b_n = 0$  pro všechna  $n \geq n_0$ , pak se příslušná rovnice nazývá **homogenní**.

Zápis rovnice pomocí sumačního značení:

$$a_{n+d} + \sum_{k=0}^{d-1} c_k(n)a_{n+k} = b_n.$$

**Definice.**

Uvažujme lineární rekurentní rovnici

$$a_{n+d} + c_{d-1}(n)a_{n+d-1} + \dots + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n, \quad n \geq n_0.$$

Pak se lineární rekurentní rovnice

$$a_{n+d} + c_{d-1}(n)a_{n+d-1} + \dots + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = 0, \quad n \geq n_0$$

nazývá k ní **přidružená homogenní rovnice**.

**Věta.** (o struktuře řešení lineární rekurentní rovnice)

Nechť je dána lineární rekurentní rovnice

$$a_{n+d} + c_{d-1}(n)a_{n+d-1} + \dots + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n, \quad n \geq n_0$$

a nějaké její řešení  $(a_{p,n})_{n=n_0}^\infty$ .

Posloupnost  $(a_n)_{n=n_0}^\infty$  je řešením této rovnice právě tehdy, pokud se dá napsat jako  $(a_n) = (a_{p,n}) + (a_{h,n})$ , kde  $(a_{h,n})_{n=n_0}^\infty$  je nějaké řešení přidružené homogenní rovnice.

Množina všech řešení dané lineární rekurentní rovnice je tedy

$$\{(a_{p,n}) + (a_{h,n}); (a_{h,n}) \text{ řeší přidruženou homogenní rovnici}\}.$$

**Věta.** (o prostoru řešení homogenní lineární rekurentní rovnice)

Množina všech řešení dané homogenní lineární rekurentní rovnice řádu  $d$  je vektorový prostor dimenze  $d$ .

**Definice.**

**Lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty** je libovolná rovnice ve tvaru

$$a_{n+d} + c_{d-1}a_{n+d-1} + \dots + c_1a_{n+1} + c_0a_n = b_n, \quad n \geq n_0,$$

kde  $n_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$  pro  $i = 0, \dots, d-1$  jsou pevně zvolená čísla a  $(b_n)_{n=n_0}^\infty$  je pevně zvolená posloupnost reálných čísel.

**Definice.**

Nechť je dána lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty

$$a_{n+d} + c_{d-1}a_{n+d-1} + \dots + c_1a_{n+1} + c_0a_n = b_n, \quad n \geq n_0.$$

Její **charakteristický polynom** je definován jako polynom

$$p(\lambda) = \lambda^d + c_{d-1}\lambda^{d-1} + \dots + c_1\lambda + c_0.$$

Rovnici  $\lambda^d + c_{d-1}\lambda^{d-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 = 0$  se říká **charakteristická rovnice**.

Jejím řešením získáme kořeny charakteristického polynomu zvané **charakteristická čísla**, popřípadě **vlastní čísla** dané rovnice.

**Fakt.**

Jestliže je  $\lambda_0$  charakteristickým číslem dané homogenní lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty, pak je posloupnost  $(\lambda_0^n)_{n=n_0}^\infty$  jejím řešením.

**Věta.**

Uvažujme homogenní lineární rekurentní rovnici s konstantními koeficienty. Jestliže jsou  $\lambda_i$  různá její charakteristická čísla, pak  $(\lambda_i^n)_{n=n_0}^\infty$  tvoří lineárně nezávislou množinu řešení této rovnice.

**Definice.**

Nechť je dána lineární rekurentní rovnice řádu  $d$

$$a_{n+d} + c_{d-1}(n)a_{n+d-1} + \dots + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n, \quad n \geq n_0.$$

Za **počáteční podmínky (initial conditions)** pro tuto rovnici považujeme libovolnou soustavu rovností

$$a_{n_0} = A_0, \quad a_{n_0+1} = A_1, \dots, \quad a_{n_0+d-1} = A_{d-1},$$

kde  $A_k \in \mathbb{R}$  jsou pevně zvolená čísla.

**Fakt.**

Nechť je dána homogenní lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty. Jestliže je  $\lambda_0$  její charakteristické číslo a má násobnost  $m$  jako kořen charakteristického polynomu, pak posloupnosti  $(\lambda_0^n), (n\lambda_0^n), \dots, (n^{m-1}\lambda_0^n)$  jsou řešení dané rovnice a tvoří lineárně nezávislou množinu.

**Věta.**

Nechť je dána homogenní lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty řádu  $d$ . Nechť jsou  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$  její různá charakteristická čísla, přičemž každé  $\lambda_i$  má násobnost  $m_i \in \mathbb{N}$ . Pak je množina

$$\{(\lambda_1^n), (n\lambda_1^n), \dots, (n^{m_1-1}\lambda_1^n), (\lambda_2^n), (n\lambda_2^n), \dots, (n^{m_2-1}\lambda_2^n), \dots, (\lambda_M^n), (n\lambda_M^n), \dots, (n^{m_M-1}\lambda_M^n)\}$$

bázi prostoru řešení dané rovnice.

**Algoritmus** pro řešení homogenní lineární rekurentní rovnice  $a_{n+d} + \sum_{k=0}^{d-1} c_k a_{n+k} = 0, n \geq n_0$  řádu  $d$ .

1. Sestavíme charakteristický polynom  $p(\lambda) = \lambda^d + \sum_{k=0}^{d-1} c_k \lambda^k$ .

Řešením rovnice  $p(\lambda) = 0$  najdeme všechna charakteristická čísla dané rovnice.

2. Sestavíme množinu posloupností  $B$  takto:

- pro každé reálné charakteristické číslo  $\lambda$  přidáme do  $B$  posloupnost  $(\lambda^n)_{n=n_0}^\infty$ ;
  - pro každé reálné charakteristické číslo  $\lambda$ , jehož násobnost je  $m > 1$ , přidáme do  $B$  rovněž posloupnosti  $(n\lambda^n)_{n=n_0}^\infty, \dots, (n^{m-1}\lambda^n)_{n=n_0}^\infty$ ;
  - pro každé komplexní charakteristické číslo  $\lambda = r[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]$ , které není reálné, přidáme do  $B$  posloupnosti  $(r^n \cos(n\varphi))_{n=n_0}^\infty$  a  $(r^n \sin(n\varphi))_{n=n_0}^\infty$ ; pro jeho komplexně sdružené číslo  $\lambda^*$  již do  $B$  nic nepřidáváme;
  - pro každé komplexní charakteristické číslo  $\lambda = r[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]$ , které není reálné a jehož násobnost je  $m > 1$ , přidáme do  $B$  posloupnosti  $(nr^n \cos(n\varphi))_{n=n_0}^\infty, \dots, (n^{m-1}r^n \cos(n\varphi))_{n=n_0}^\infty$  a  $(nr^n \sin(n\varphi))_{n=n_0}^\infty, \dots, (n^{m-1}r^n \sin(n\varphi))_{n=n_0}^\infty$ ; pro jeho komplexně sdružené číslo  $\lambda^*$  již do  $B$  nic nepřidáváme.
- Množina  $B$  je bázi prostoru řešení.

3. Označíme-li  $B = \{(a_{1,n}), \dots, (a_{d,n})\}$ , pak je obecné řešení dané rovnice určeno vzorcem  $a_n = \sum_{i=1}^d u_i a_{i,n}, n \geq n_0$  pro  $u_1, \dots, u_d \in \mathbb{R}$ .

4. Jsou-li dány počáteční podmínky, pak do nich za příslušná  $a_j$  pro  $j = n_0, \dots, n_0 + d - 1$  dosadíme vzorce  $a_j = \sum_{i=1}^d u_i a_{i,j}$  a vyřešíme vzniklých  $d$  rovnic pro  $d$  neznámých  $u_i$ . Ty po dosazení do obecného řešení určí příslušné partikulární řešení.

**Definice.**

Řekneme, že posloupnost  $(b_n)_{n=n_0}^{\infty}$  je **kvazipolynom**, jestliže existuje  $\lambda \in \mathbb{R}$  a polynom  $p(n)$  takový, že  $b_n = p(n)\lambda^n$  pro všechna  $n \geq n_0$ .

**Věta.**

Uvažujme rovnici

$$a_{n+d} + c_{d-1}a_{n+d-1} + \cdots + c_1a_{n+1} + c_0a_n = b_n, \quad n \geq n_0.$$

Předpokládejme, že existují  $\lambda \in \mathbb{R}$  a polynom  $p$  takový, že  $b_n = p(n)\lambda^n$  pro všechna  $n \geq n_0$ . Nechť  $m$  je násobnost tohoto čísla  $\lambda$  jako charakteristického čísla přidružené homogenní rovnice, přičemž  $m = 0$  v případě, že toto  $\lambda$  vůbec charakteristickým číslem není.

Pak existuje polynom  $q$  stupně stejného jako  $p$  takový, že  $a_n = n^m q(n)\lambda^n$ ,  $n \geq n_0$  je řešením dané rovnice.

**Algoritmus** pro nalezení řešení rovnice  $a_{n+d} + c_{d-1}a_{n+d-1} + \cdots + c_1a_{n+1} + c_0a_n = b_n$ ,  $n \geq n_0$  řádu  $d$ , kde  $b_n = p(n)\lambda^n$ .

**0.** Pokud je to potřeba, zadanou rovnici přepíšeme do správného tvaru přesunem členů, popřípadě posunem indexu. Ujasníme si, s jakými posloupnostmi (jaká je indexace) rovnice pracuje.

**1.** Najdeme obecné řešení.

a) Najdeme homogenní řešení.

Z přidružené homogenní rovnice  $a_{n+d} + c_{d-1}a_{n+d-1} + \cdots + c_1a_{n+1} + c_0a_n = 0$  vytvoříme charakteristickou rovnici  $\lambda^d + c_{d-1}\lambda^{d-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0$ .

Vyřešením najdeme charakteristická čísla  $\lambda_j$  s násobnostmi  $m_j$  dané rovnice a sestavíme bázi prostoru řešení  $\{(a_{i,n})_{n=n_0}^{\infty}; i = 1, \dots, d\}$ .

Obecné řešení přidružené homogenní rovnice (homogenní řešení) je  $a_{h,n} = \sum_{i=1}^d u_i a_{i,n}$  pro  $u_i \in \mathbb{R}$ .

Pokud byla zadaná rovnice homogenní, krok **1** končí.

b) Najdeme partikulární řešení.

Pro pravou stranu  $b_n = p(n)\lambda^n$  sestavíme základní podobu odhadu řešení ve tvaru  $q(n)\lambda^n$ , kde  $q$  je obecný polynom stejného stupně jako  $p$ . Tradičně se jako koeficienty používají  $A, B, C, \dots$  a žádnou mocninu není možné vynechat.

Pokud je pravá strana jen geometrická posloupnost  $b_n = \lambda^n$ , použijeme interpretaci  $b_n = 1 \cdot \lambda^n$ , tedy  $p(n) = 1$  a  $q(n) = A$ .

Porovnáme  $\lambda$  s charakteristickými čísly  $\lambda_j$  z kroku **a**). Pokud se žádnému nerovná, náš původní odhad řešení je správný, formálně položíme  $m = 0$ .

Pokud pro nějaké  $j$  platí  $\lambda = \lambda_j$ , položíme  $m = m_j$  (násobnost dotyčného charakteristického čísla) a původní odhad vynásobíme členem  $n^m$ . Doporučuje se tuto mocninu roznásobit do polynomu.

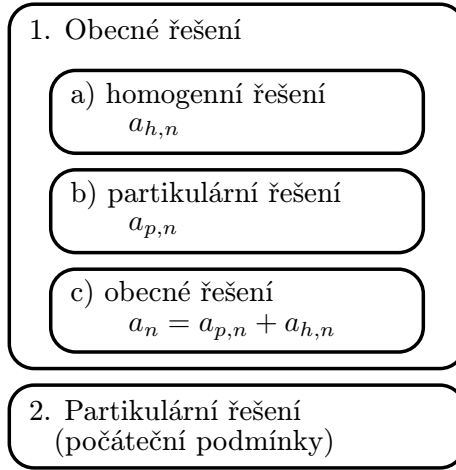
Pokud je pravá strana jen polynom  $b_n = p(n)$ , použijeme interpretaci  $b_n = p(n)1^n$ , tedy korekce se určuje pomocí  $\lambda = 1$ .

Uhodnutý tvar řešení  $a_{p,n} = n^m q(n)\lambda^n$  dosadíme do levé strany rovnice (ve správném tvaru), vytkneme  $\lambda^n$  a zbytek zjednodušíme do tvaru polynomu. Tento výstup porovnáme s pravou stranou  $b_n$ . Měli bychom dostat rovnost dvou polynomů stejného stupně, což porovnáním koeficientů vede na soustavu rovnic. Jejím řešením získáme hodnoty koeficientů polynomu  $q(n)$  a tím i partikulární řešení.

c) Obecné řešení dané úlohy je dáno vztahem  $a_n = a_{p,n} + a_{h,n}$ .

Typický zápis je  $a_n = n^m q(n)\lambda^n + \sum_{i=1}^d u_i a_{i,n}$ ,  $n \geq n_0$ , popřípadě  $\left( n^m q(n)\lambda^n + \sum_{i=1}^d u_i a_{i,n} \right)_{n=n_0}^{\infty}$ .

**2.** Pokud byly s rovnicí zadány také počáteční podmínky, dosadíme v těchto podmínkách místo  $a_j$  vzorec z obecného řešení. Získáme  $d$  rovnic pro  $d$  neznámých  $u_1, \dots, u_d$ . Tuto soustavu vyřešíme, získaná  $u_i$  dosadíme do vzorce pro obecné řešení a dostaneme tak partikulární řešení pro zadanou úlohu.

**Věta.**

Nechť  $d \in \mathbb{N}$ , uvažujme funkce  $c_0(n), c_1(n), \dots, c_{d-1}(n): \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$ .

Jestliže posloupnost  $(a_n)_{n=n_0}^\infty$  řeší rovnici  $a_{n+d} + \sum_{k=0}^{d-1} c_k(n)a_{n+k} = b_n, n \geq n_0$

a posloupnost  $(\tilde{a}_n)_{n=n_0}^\infty$  řeší rovnici  $a_{n+d} + \sum_{k=0}^{d-1} c_k(n)a_{n+k} = \tilde{b}_n, n \geq n_0,$

pak posloupnost  $(a_n + \tilde{a}_n)_{n=n_0}^\infty$  řeší rovnici  $a_{n+d} + \sum_{k=0}^{d-1} c_k(n)a_{n+k} = b_n + \tilde{b}_n, n \geq n_0.$

**Fakt.**

Nechť  $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ . Nechť  $f(n)$  je funkce definovaná pro  $n \in M = \{b^k; k \in \mathbb{N}_0\}$ . Předpokládejme, že existuje  $a \in \mathbb{N}$  takové, že

$$f(n) = a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \quad \text{pro všechna } n \in M, n \geq b.$$

Pak pro  $n \in M$  platí  $f(n) = n^{\log_b(a)} f(1)$ .

**Věta.** (The Master theorem)

Uvažujme neklesající nezápornou funkci  $f$  na  $\mathbb{N}$ . Předpokládejme, že existují  $a, b \in \mathbb{N}$ , kde  $b \geq 2, c \geq 0$  a  $d \in \mathbb{N}_0$  takové, že pro každé  $n$  ve tvaru  $n = b^k, k \in \mathbb{N}$  funkce  $f$  splňuje  $f(n) = a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d$ .

Pak platí následující:

- (i) Jestliže  $d < n^{\log_b(a)}$  nebo  $c = 0$ , tak  $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$ .
- (ii) Jestliže  $d = n^{\log_b(a)}$ , tak  $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \log_2(n)) = \Theta(n^d \log_2(n))$ .
- (iii) Jestliže  $d > n^{\log_b(a)}$ , tak  $f(n) = \Theta(n^d)$ .

$x, y$ : čísla o  $n = 2m$  cifrách.

Nechť  $x = x_L \cdot 10^m + x_R, y = y_L \cdot 10^m + y_R$ . Pak

$$\begin{aligned} xy &= (x_L \cdot 10^m + x_R)(y_L \cdot 10^m + y_R) \\ &= 10^{2m} x_L y_L + 10^m (x_L y_R + x_R y_L) + x_R y_R \\ &= 10^{2m} x_L y_L + 10^m [x_L y_L + (x_L - x_R)(y_R - y_L) + x_R y_R] + x_R y_R. \end{aligned}$$