Diskrétní matematika

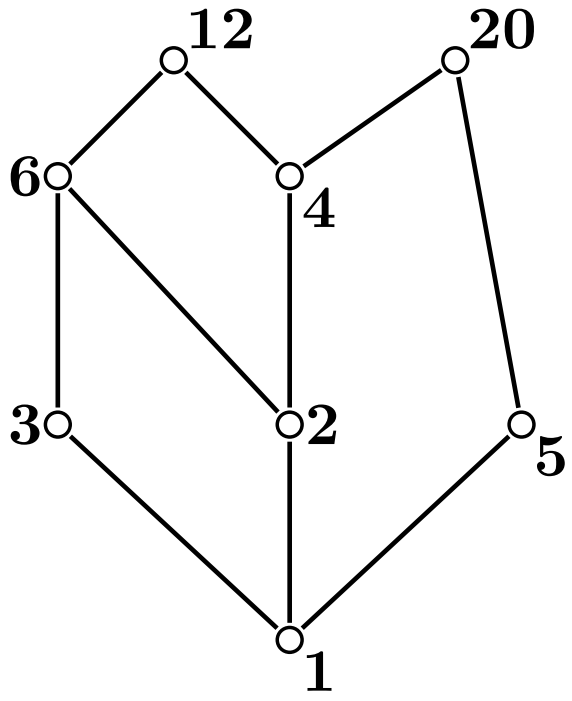
coby

Seznámení s matematikou jako vědou matematičtinou a matematickým uvažováním

Petr Habala

FEL ČVUT Praha

habala@fel.cvut.cz



Obsah

[b]: bonusový materiál.

Úvod

Tato kniha spojuje dvě učebnice: učebnici diskrétní matematiky a učebnici matematičtiny, šířeji vzato jde o představení vědy zvané matematika.

Diskrétní matematika je jednou z velmi užitečných partií matematiky, zejména tvoří základ pro mnohé aplikace ve světě počítačů. Není ovšem snadné popsat, co to vlastně je. Jednou z možností je dát ji do kontrastu s matematikou spojitou.

Když se rozhodneme sledovat pohyb přednášejícího před tabulí, můžeme to dělat jako fyzici a představit si, že jeho pozici snímáme ve všech možných časech a měříme s libovolnou přesností. Pohyb je pak nepřerušovaný, plynulý a pozici lze vyjádřit spojitou křivkou. Takové děje popisuje spojitá matematika, která nabízí užitečné nástroje typu derivace. Analýza nebo třeba geometrie jsou typické příklady spojité matematiky.

Pokud ovšem chceme tento pohyb zobrazit na obrazovce, pak je situace jiná. Protože je obrazovka tvořena jen konečnou sítí bodů, které lze porůznu barvit, máme k dispozici jen konečnou množinu pozic pro přednášejícího; například špička nosu se z jednoho pixelu obrazovky může přesunout na vedlejší, ale není žádná mezipoloha. Stejně tak čas měříme v krocích. Vznikne tak pohyb, který se děje ve skocích, čímž vznikne diskrétní pohled na stejný jev. Diskrétní matematika řeší právě takové situace. Pracuje se zřetelně oddělenými objekty, které se nemohou plynule morfovat. Spadá tam třeba kombinatorika, kdy různě organizujeme konečně mnoho objektů, ale lze pracovat i s nekonečně mnoha objekty, pokud jsou od sebe odděleny (dobrý příklad jsou celá čísla).

Pod název diskrétní matematika spadá řada samostatných oborů matematiky, pročež lze najít pod tímto názvem řadu rozdílných knih či předmětů, podle toho, co si autor z mnoha možností vybral. Do této knihy byly vybrány obory, které spojuje užitečnost pro počítačové vědy a patří do tradičního korpusu diskrétní matematiky. Protože jde o knihu úvodní a přehledovou, soustředíme se na dobré porozumění základů, což umožní v případě potřeby si znalost dále prohloubit.

Zatímco obsahově tvoří výklad diskrétní matematiky naprostou většinu knihy, je to jen polovina jejího účelu. Tou druhou polovinou je záměr představit skutečnou matematiku, protože typický student zatím poznal spíše počty (sbírka vzorců pro řešení konkrétních úloh).

Matematika se stala hlavním pracovním nástrojem pro přírodovědce a inženýry díky své spolehlivosti. Například vzorec pro kořeny kvadratické rovnice funguje zcela univerzálně, není rovnice, pro kterou by dal špatnou odpověď (pokud chybu neuděláme my při výpočtu). Této spolehlivosti je dosaženo zejména tím, že matematici své závěry dokazují.

Klíčovou součástí matematiky je jazyk matematičtina, pomocí kterého popisuje svět kolem nás. Pokud se podaří nějaký výsek reality popsat matematicky, pak je to obvykle klíčem k pochopení a praktickému uchopení oné věci. Proto je i pro lidi pracující v aplikacích důležité matematičtinu dobře umět. Požadavek na spolehlivost a přesnost způsobil, že se matematičtina liší od běžných jazyků a pro začátečníka není vůbec snadné mu porozumět. Vzniká tak jazyková bariéra, která zejména během prvním ročníku univerzity komplikuje studentům zvládnutí základních matematických předmětů.

My tady využijeme probíranou látku k jazykovému kurzu matematičtiny (diskrétní matematika se k tomu ukazuje jako výjimečně dobrá). Budeme se učit jí rozumět a také se pomocí ní vyjadřovat. To se dobře trénuje zejména při psaní důkazů, kterému se zde budeme významně věnovat. Kromě matematického vyjadřování se tím také trénuje schopnost logického myšlení a sestavování platných argumentů (a rozeznávání argumentů chybných), což jsou schopnosti, jejichž užitečnost významně přesahuje obor matematiky.

Matematici obvykle při popisu specifikují objekty, se kterými se pracuje, a pak určí vztahy mezi nimi a pravidla, kterými se řídí. Tím vznikne struktura, umělý svět, která je možno matematickými metodami zkoumat a přicházet s dalšími poznatky. U aplikací je cílem, aby tento umělý svět co nejvěrněji odrážel popisovanou realitu, pak se mu říká model, ale zkoumají se i světy, ve kterých se věci dějí jinak (i to může být užitečné). Jeden z možných pohledů na matematiku je, že je to obor zabývající se vytvářením a zkoumáním struktur. V této knize se pokusíme zprostředkovat i tento aspekt matematiky. Při tom také nahlédneme do zákulisí matematiky jako vědy, díky čemuž čtenář lépe porozumí spolehlivosti a také omezením matematických nástrojů, které bude třeba později využívat.

Aby kniha studentovi co nejvíce pomohla, je hlavně ze začátku výrazně rozvláčnější a detailnější, než bývá zvykem. To se týká zejména důkazů. Pro pokročilejší pak nabízíme odbočky směřující čtenáře dál, dobrému studentovi by měly pomoci nahlédnout hlouběji a ukázat mu dveře, kterými by mohlo být zajímavé projít. Zvýšením prostoru pro důkazy, diskuse a odbočky se už podle zákona zachování čehokoliv nedostalo na životopisné žblebty o slavných matematicích, historické anekdoty a podobně, ale to student najde v bohatém množství v libovolné novější matematické knize.

Pokud autor ve svém úsilí o student-friendly knihu uspěl, pak by mohla sloužit jednak jako učebnice diskrétní matematiky pro ty, kteří se ji chtějí „jen“ naučit na uživatelské úrovní (autor by si rád myslel, že dost dobrá), ale také jako vstupní brána k matematice i pro studenty jiných oborů, kteří se budou muset s matematikou dobře skamarádit a začínají v bodě nula.

Matematické vyjadřování a přemýšlení je založeno na logice. Protože ne každý se s ní seznámil v dostatečné míře na střední škole (mnohdy je to vzhledem ke kvalitě výuky dokonce takto lepší), nabízíme na konci knihy Dodatky, kde jsme se pokusili vyložit logiku a další důležité navazující pasáže zejména z uživatelského pohledu. Přehledovou přílohu o důkazech je asi vhodné číst poté, co čtenář získá základní zkušenost s dokazováním.

Návod ke čtení

Dá se očekávat, že mnozí čtenáři budou chtít v knize přeskakovat: Začátečníci si ty obtížnější pasáže lépe vychutnají při druhém čtení, někteří čtenáři ani nemají v úmyslu se učit dokazování a chtějí se jen naučit diskrétní matematiku na uživatelské úrovni. Pokročilí se zase budou chtít rychle dostat do obtížnějších partií. Abychom čtenáři usnadnili orientaci, zavedli jsme řadu značek.

M Statě, kde se věnujeme fungování matematiky a matematickému vyjadřování, zejména důkazům, značíme na levé straně výrazným písmenem a ukončujeme je trojúhelníkem, kterým mimochodem ukončujeme i další úvahy, příklady a podobně.
△

S Protože zvládnutí matematičtiny ale také praktických postupů není vždy lehké, nabízíme statě, kde ilustujeme, jakým myšenkovým postupem se došlo k důkazu, nebo třeba jak nahlížet z praktického pohledu na řešení určitého problému. Vlastně jde o návody: Návody jak myslet a návody jak prakticky řešit úlohy. Tyto informace se obvykle do učebnic nevejdou, ale pro někoho, kdo se látku učí, mohou mít velkou důležitost. Označení nalevo reflektuje fakt, že jde o jakýsi bonus pro studenty.
△

→ Pro náročnější čtenáře nabízíme bonusové poznámky, které značíme šipkou a odsazením. Ten, kdo zrovna pracuje na pochopení základů, je (zatím?) může přeskočit. Odsazeny jsou také důkazy; i ty slouží těm čtenářům,
← kteří chtějí zvládnout diskrétní matematiku víc než jen uživatelsky.

Text doprovází cvičení, která jsem se pokusil klasifikovat. „Rutinní“ přímo procvičují probraný materiál. Naučíte se řešit rovnice, rutinní cvičení chce řešit rovnici. Náročnější cvičení vyžadující trochu tvůrčí přístup jsem značil „dobrá“. Jako „poučná“ značím cvičení, která nějakým způsobem doplňují vyloženou látku. Tyto vlastnosti je samozřejmě možné kombinovat.

Podobně klasifikuji důkazy. „Rutinní“ jsou většinou velice lehké a v typické knize by byly vynechány, protože pokročilejšího čtenáře neskonale nudí, ale já jsem je tu dal jednak proto, abych sám sebe přesvědčil, že opravdu rutinní jsou, a druhak proto, aby začínající student viděl, co všechno takový důkaz obnáší. Doporučuji je brát jako další cvičení. Pokud student zkusí „rutinní“ důkaz nejprve vytvořit sám a pak to porovná s tím, co jsem napsal já, mnoho se naučí. Očekává se, že lepší student bude na konci kursu umět takovéto rutinní důkazy sám tvořit levou zadní (leváci pravou zadní). Mimochodem, spousta důkazů se dá vést více směry, takže pokud váš důkaz nebude úplně stejný jako můj, tak to ještě nutně neznamená, že je špatně (ale u začátečníka většinou ano).

Pak jsou důkazy „poučné“, které podle mého soudu studentovi dobře ukážou, jak matematika funguje. Některé důkazy jsou „dobré“, u těch rozhodně neočekávám, že by je student tvořil, a možná bude mít i problém je pochopit, ale výborný student by měl přinejmenším vnímat, co se tam děje. U některých důkazů jsem si nemohl pomoci a klasifikoval jsem je „z povinnosti“. Většinou jde o důkazy důležitých věcí, které by tedy měly být uvedeny, ale obvykle jsou dlouhé a přitom nečekám, že by studentovi něco daly, ani mě je nebavilo psát. Ale přemohl jsem se.

Konce důkazů jsou značeny tradičním čtverečkem vpravo. Je to pro čtenáře užitečné, ví totiž, že nic dalšího už nepřijde a je načase se zamyslet, zda předchozí text opravdu dává správný důkaz

U klasifikací cvičení i důkazů jde samozřejmě o můj subjektivní názor, pro studenta bude zásadní třeba i to, z jakého důvodu knihu čte, popřípadě jak náročný je kurs diskrétní matematiky, kvůli kterému se to učí.

Tvrzení jsou číslována arabskými číslicemi v každé kapitole zvlášť, značení ukazuje kapitolu, část a za tečkou číslo tvrzení (věta 6d.13). Podobně jsou číslovány příklady, ale mají své vlastní číslování a používají na to písmena (příklad 6d.k). Abychom čtenáři ulehčili hledání konkrétního tvrzení/příkladu, značíme na spodním okraji poslední tvrzení a příklad, které se na dotyčné stránce objevily.

Varování: U čísel používám zásadně destinnou tečku, protože je tomu tak na kalkulačkách, počítačích i v anglických knihách, lidi od computer science jsou na to zvyklí a já taky.

Abych čtenářům pomohl do dalších let, kdy budou nejspíše studovat z anglických zdrojů, uvádím v textu i anglické ekvivalenty termínů, občas celé věty. Popravdě řečeno mě lákalo to napsat celé englicky, protože každý, kdo se kolem computer science motá, musí tento jazyk umět. Nakonec jsem se ale rozhodl být hodný na začátečníky. Pokud půjdete v oboru dál, anglických knih si ještě užijete.

S Na závěr pár rad. Lidé se liší v tom, jakou preferenci dávají paměti a jakou porozumění. Zejména u snazší látky bývá častou volbou se jen nadrtit hromádku vzorových příkladů a doufat, že u zkoušky se natrefí na podobný. Tato strategie bývá ve škole bohužel docela účinná, ale v praxi často selhává, protože studenta nevyzbrojí na situace, které vybočují z naučených schémat.

Mnohem perspektivnější je látku pochopit. Student přemýšlivý nejprve stráví delší dobu rozjímaním nad podstatou věci a souvislostmi, načež si udělá pár příkladů, aby se ujistil, že to má opravdu v paži. Výhodou tohoto přístupu je, že už nevyžaduje tolik pamatování a navíc je získaná znalost vysoce flexibilní a neztrácí se v čase tak rychle, jako našprtané rutinní postupy. Nevýhoda je, že to vyžaduje přemýšlení a to bolí. Většina studentů oba přístupy kombinuje a poměr si nastavuje dle vlastního vkusu, nicméně pro studenta s ambicemi, který by rád v oboru působil tvůrčím způsobem, je jednoznačnou volbou cesta přes pochopení.

Jak se k takovému pochopení dospěje? Kromě rozjímaní nad textem je důležité správně pracovat s příklady a cvičeními. Klasická situace: Student se podívá na zadání, nevidí jak na to, koukne do řešení, prohlásí „A jo, tak takhle to je“ a jede dál. Výsledek: nenaučí se nic. Dvě věci jsou třeba dělat jinak.

1. Je třeba příklad opravdu zkusit vyřešit, věnovat mu čas, napnout mozek. Teprve když se to nezlomí ani po větším úsilí, je čas kouknout na řešení. Proč? Protože nejvíce si pamatujeme věci, které máme svázány s emocemi, například vztekem, že něco nejde. Pokud bez emocí konstatujeme „to nevidím“, tak máme malou šanci, že něco z této epizody uvízne v paměti.

2. Když se podíváme na řešení (ať už cvičení nebo ukázkového příkladu v textu), tak nestačí jen konstatovat, že vidíme, co se tam děje. Klíčové je umět si zodpovědět na otázku, proč se to tam děje. Proč autor řešil tento příklad zrovna tímto způsobem? Jak poznal, že nemá zkusit něco jiného? A co by se stalo, kdyby něco jiného zkusil? Teprve až čtenář najde odpovědi na tyto otázky, tak má jistotu, že až tento (či podobný) příklad zase potká, tak bude vědět, co dělat. Pokud si na tyto otázky odpovědět neumí, tak by se měl vrátit k textu, protože ty odpovědi tam někde jsou.

Matematické koutky

1a.3: Jak dokazovat tvrzení s kvantifikátory
1a.9: Implikace a jak je dokazovat
1a.13: Nepřímý důkaz implikace
1a.18: Ekvivalence a jak je dokazovat
1a.18: Důkaz po případech
1a.30: Důkaz sporem, viz také 1a.31
1b.2: Důkazy s množinami
1b.12: Důkaz vícečetné ekvivalence cyklem
1b.14: Lineární kombinace

Rady a algoritmy

1a.5: Jakou mají mít důkazy strukturu
1a.6: Jak zapisovat důkazy (sloh)
1a.8: Důkaz může být chybný vynecháním
1a.11: Jak zapisovat důkazy implikací
1a.21: Dva přístupy k důkazům implikací (závěr jako cesta)
1b.g, 1b.h, a 1b.i: Příklad: Ruční výpočet Euklidova algoritmu
1b.30: Rozšířený Euklidův algoritmus
1b.l, 1b.m: Příklad: Ruční výpočet rozšířeného Euklidova algoritmu
2b.6: Jak najít inverzní prvek modulo
10b.8: Jak řešit lineární rekurentní rovnice
xxx: Jak řešit rovnice $ax = b$ modulo n
: Jak řešit soustavy lineárních kongruencí
4b.1: Jak vyšetřovat vlastnosti relací
6a.7: Jak vytvářet Hasseův diagram
7a.12: Jak dokazovat indukcí
: Jak určovat mohutnost

Literatura

V knize chybí tradiční bohaté odkazy na literaturu. Většina látky je totiž klasická, nové je její podání. Při svém studiu i přípravě tohoto kursu jsem samozřejmě čerpal z mnoha zdrojů, zmíním ty hlavní. Hodně pomohli mí učitelé matematiky, počínaje základní školou a konče MFF UK, své zápisky z tehdejších přednášek mám dodnes schovány a několikrát jsem do nich nakoukl i při přípravě této knihy. Inspirací mi bylo pojetí diskrétní matematiky mých kolegů, prof. Demlové a doc. Velebila, hodně se mi také líbila níže zmíněná kniha od Rosena.

Pokud by se student chtěl podívat i do jiné knihy, pak je jich k dispozici mnoho, stačí vyhledat „discrete mathematics“ na Webu. Většina má podobný obsah (ale prakticky žádná se nekryje s touto, něco chybí a něco je navíc), i zpracování bývá v modernějších knihách podobné a je otázkou osobního vkusu, která více vyhoví. Pokud by čtenáře zajímal můj názor, zde je pár doporučení:

• Rosen, K.H.: *Discrete Mathematics And Its Applications*, 6ed, McGraw-Hill (2007).

Tohle je první liga. Je to kniha „nového“ typu, se spoustou historických poznámek, životopisů matematiků, pěkných příkladů s aplikacemi, počítačovými cvičeními a podobně. Obsah: Logika, množiny a zobrazení, kombinatorika, relace, dělitelnost a počítání modulo, rekurentní rovnice, také teorie grafů a dokonce algoritmizace. Oproti tomuto textu chybí binární operace, kniha nejde tak hluboko a nesnaží se tolik organizovat materiál do matematických struktur (pro některé čtenáře to může být výhodou). Navíc probírá diskrétní matematiku a algoritmizaci paralelně a ony se pěkně doplňují, velice dobře se čte a má málo chyb, zato spoustu cvičení. Je to také pěkná bichle (1000 stran). Doporučil bych ji jako zajímavou knihu ke čtení zároveň s tímto textem, protože namísto pohledu teoretičtějšího nabízí spíš pohled praktičtější. Moc se mi líbila.

• Velebil, J.: *Diskrétní matematika a logika*, online (pdf soubor).

První polovina skripta nabízí zajímavý pohled na indukci, relace a počítání modulo. Odtud se pak odrazí k obecnějším algebraickým strukturám pro pokročilé. Skriptum je méně upovídané, nabízí výklad z pohledu matematiky a také dost zajímavých příkladů, náročnějšího čtenáře rozhodně nezklame.

• Velebil, J.: *Lecture notes for Mathematics 5(d)*, online (pdf soubor).

Rovněž začíná indukcí a počítáním modulo, i zde se pak rozjede do pokročilých luhů a hájů, v tomto případě ještě dále. Procvičí angličtinu.

• Matoušek, J. a Nešetřil, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum Praha (2000).

V prvních kapitolách se podrobně proberou množiny a zobrazení, dále relace, dělají to matematicky, ale se spoustou příkladů a povídání. Dobře se to čte. V druhé polovině knihy autoři utečou hlavně ke grafům a dalším tématům mnohem pokročilejším než tento kurs. Jako dobré cvičení bych doporučil anglickou verzi *Invitation to Discrete Mathematics*, Oxford UP (2008).

• Demlová M., Pondělíček B.: *Matematická logika*, ČVUT Praha (1997).

Doplní studentovi logiku, velice pěkné skriptum.

• Demel J.: *Grafy a jejich aplikace*, Academia (2002).

Díky této knize zde stačil jen stručný úvod o grafech, zbytek je tam.

Upozornění: Snažil jsem se psát česky, pokud se tedy někdy od pravidel českého pravopisu odchyluji (a není to překlep), pak je to záměr, protože si naivně myslím, že to tak je hezčí.

Poděkování: Rád bych poděkoval všem, od kterých jsem se tuto látku naučil a kteří mě různým způsobem podporovali při psaní tohoto textu (třeba děti mě nechaly občas i vyspat). Special thanks jdou panu Knuthovi, jehož sázecí systém TEX byl naprostou revolucí v přípravě textů, používám jeho mutaci $\mathcal{AMS}$-TEX. Obrázky jsem přímo ve zdrojovém kódu tvořil pomocí PGF/TikZ, který jsem se kvůli této knize naučil a bylo to šťastné setkání.

Děkuji také studentům za odchycení chyb a překlepů, zejména panu Michalu Souchovi, který byl obzvláště pečlivým čtenářem.

Příjemné čtení přeje autor.

Struktura kapitol

Na rozdíl od řekněme analýzy, kde témata následují přirozeně za sebou a mají společný objekt zkoumání, je diskrétní matematika spíše souborem téměř samostatných témat. Tato slabá vazba nabízí zajímavou možnost studovat jednotlivé kapitoly do značné míry samostatně či je permutovat, aniž by vznikly větší problémy. Druhou stranou mince je, že ony slabší vazby jsou občas obousměrné, což způsobuje, že není snadné najít pořadí, které by bylo matematicky korektní a zároveň vhodné z pedagogického hlediska. Konec konců, tato verze knihy je již čtbrtá, každá měla jiné pořadí kapitol a ani jedno z nich by nebylo špatně.

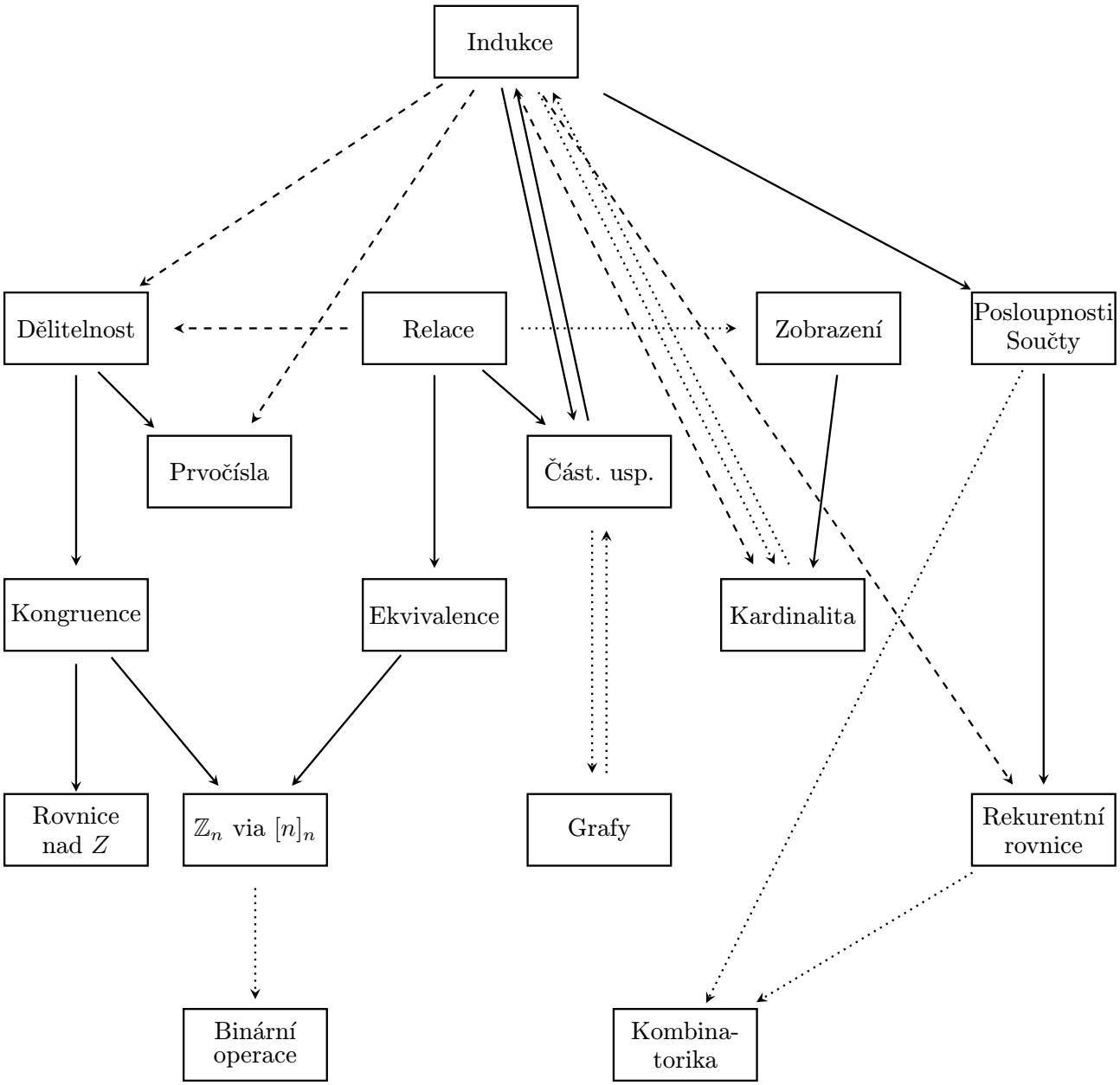
Vzájemnou provázanost sekcí ukazuje následující graf (co taky jiného v učebnici diskrétní matematiky):

Notation:

A ⟶ B Témata kapitoly A jsou výrazně použita v kapitole B.

A ⇢ B Věci z kapitoly A jsou nutné pro nějaký důkaz v kapitole B.

A ⋯→ B Témata z kapitoly A jsou ne zásadně použita (v příkladu, v diskusi) v kapitole B.



V logicky sestavěném textu by všechny šipky vedly směrem dolů. Je možné takto materiál učit, ale praxe ukázala, že začít indukcí je vhodné pro pokročilé studenty, nikoliv pro ty, kteří začínají. Po čtyřech různých testovaných variantách se jako nevýhodnější pro úvodní poznávání matematiky se ukázala dělitelnost. Tím je dána struktura této knihy, ale existují i další možnosti, záleží na tom, kolik se vyučující rozhodne vynechat či naopak doplnit.

• Tematicky k sobě patří kapitoly o dělitelnosti, prvočíslech a počítání modulo, s logickou návazností na řešení rovnic v oboru celých čísel. Prvočísla je možné vynechat či odsunout, to potřebné je v kapitole o dělitelnosti.

Rovněž kapitoly o relacích patří k sobě v přirozené posloupnosti. Pořadí mezi ekvivalencemi a uspořádáními je možné obojí.

Tyto dva celky jsou zároveň navzájem provázány. Nejsilnější vazba je v definicích a důkazech o dělitelnosti, kde je využívána existence nejmenších a největších prvků. Tím vzniká závislost na kapitole o uspořádání. Logicky by se tedy mělo začít blokem o relacích. Na druhou stranu se existence největších a nejmenších prvků dá pojmout intuitivně a dělitelnost tak lze bez probémů vyložit jako první; výhodou takového postupu je snažší téma pro rozjezd. To je podstatné zejména pokud je součástí předmětu také úvod do matematického uvažování, protože dělitelnost (a kongruence) nabízí jednodušší důkazy.

Vzájemná provázanot těchto dvou bloků je vidět na méně zásadní úrovni. Relace využívají dělitelnost jako základní příklad, naopak při probírání dělitelnosti je zajímavé poukazovat na souvislost s vlastnostmi relací. Kongruence může být zajímavá motivace pro ekvivalence, naopak ekvivalence potřebujeme, pokud se rozhodneme zavést prostor zbytkových tříd $\mathbb{Z}_n$ abstraktně.

• Kapitola o indukci nic nepředpokládá, zároveň je využívána v téměř všech ostatních tématech. Měla by tedy být logicky na začátku, ovšem zkušenost ukazuje, že její správné pochopení je pro začátečníka obtížné. Zároveň platí, že v blocích dělitelnosti a relací se indukce využívá minimálně a jen v pobočných tématech.

Existuje významná provázanost s kapitolou o uspořádání, týká se ekvivalence Principu dobrého uspořádání a Principu indukce. Ta kapitola, která přijde dřív, by měla zahrnout pasáž o axiomech.

• Kapitolou o kombinatorice se dá klidně i začít a může sloužit jako motivace pro později zařazenou kapitolu o rekurentních rovnicích, která také může být samostatně hned na začátku. Používá sice indukci, ale jen zlehka, mnohý čtenář ji již zná v dostatečné míře.

• Grafy jsou čistě přehledová kapitola jen pro úplnost a nemá na zbytek kapitol vazbu kromě toho, že využívá indukci a inspiraci uspořádáním.

• Kapitola o binárních operacích používá relace a prostory modulo jako příklady, ale obejde se bez nich, dá se tedy touto kapitolou klidně i začít. Existuje jedna obousměrná vazba, výsledky z teorie grup jsou využívány při abstraktním zavedení prostoru $\mathbb{Z}_n$, což ale nemusí vadit, pokud není cílem přednášky dokazovat Eulerovu větu (či malého Fermata). Naopak prostor $\mathbb{Z}_n$ může sloužit jako inspirace k tomu, abychom binární operace začali zkoumat.

Výslednou podobu ovlivní řada faktorů, například vstupní úroveň studentů, pedagogický záměr vyučujícího a obsahové zaměření, zejména nakolik přednášející hodlá věci dokazovat. Vyzkoušeny jsou tyto verze:

• Z pohledu teoretické struktury se nabízí začít množinami (případně zobrazeními včetně kardinality, pokud nechceme dokazovat věty o konečných množinách), pak kapitolou o indukci, která nic nepředpokládá a naopak je široce použita, případně probrat kardinalitu včetně konečných množin. Pak by mohla přijít dělitelnost, která je následně bohatě využívána v kapitole o relacích jako klíčový příklad. Po probrání obou kapitol o relacích a binárních operací je možné se vrátit k počítání modulo (kde jsou potřeba poznatky o grupách) a následují další sekce. Tento přístup je korektní (vše je probráno dříve, než se to potřebuje), buduje matematiku od základních struktur k rozvinutějším, ale vyžaduje dobře připravené a kvalitní studenty, které nezaskočí abstrakce. Další nevýhodou je ne zcela příjemná struktura, kdy se po dělitelnosti nejde hned přirozeně k počítání modulo.

• Je možné začít relacemi, za ně vnořit indukci, možná poté zobrazení a kardinalitu, pak dělitelnost, počítání modulo a pokračovat dále. Tento přístup je pro studenty snazší než předchozí a nevyžaduje příliš velké mlžení v důkazech. Pro začátečníky nicméně mohou být relace na úvod příliš abstraktní, zejména pokud má kurs ambice učit i dokazování. Je také třeba se smířit s tím, že se v úvodní kapitole pracuje s dělitelnsotí, která ještě nebyla oficiálně probrána.

• Pro přátelskou verzi se nabízí začít dělitelností, která pracuje s konkrétními pojmy, a přejít na počítání modulo v konkrétní podobě. Pak mohou následovat relace a posléze návrat k počítání modulo, tentokráte z abstraktního pohledu ekvivalencí. Poté se probere indukce a udělají se zobrazení a kardinalita. Následuje zbytek. Tento přístup jde od konkrétního k abstraktnímu a vyhovuje začínajícím studentům. Nevýhodou je, že ve chvíli, kdy probíráme dělitelnost a počítání modulo, ještě nemůžeme poukazovat na souvislost s relacemi. Dalším problémem je umístění prvočísel. Tématicky by měla přijít hned za dělitelostí, ovšem důkazy závisejí na indukci. Je možné předpokládat, že jednoduchou indukci již studenti znají, a brát to naopak jako motivaci se na ni blíže podívat.

Alternativou je zařadit indukci před relacemi, čímž se podpoří trend postupného rozvíjení abstrakce.