

5. Binární relace

Z kapitoly 1d známe pojem množiny, který nám v zásadě umožní vyjádřit, že něco máme či nemáme. Často jsme také v situaci, že máme nějaké objekty a určitý vztah, který mezi těmito objekty někdy je a někdy není. Některá čísla se rovnají a jiná ne, někdy jedno číslo dělí jiné, někteří lidé se spolu znají a jiní ne, některé jídlo vyžaduje jistou surovinu a jinou ne. Takové situace se teď naučíme zachycovat a zkoumat matematickým jazykem.

5a. Binární relace a operace s nimi

Představme si, že máme dva typy objektů, třeba různé druhy ovoce a vitamíny. Matematicky řečeno máme dvě množiny, A jsou druhy ovoce a B jsou vitamíny. Jak zachytíme, že jistý druh ovoce obsahuje určitý vitamín? Nabízí se přirozená myšlenka vytvořit si dvojici „ovoce-vitamín“, na což je v matematice standardní nástroj v podobě uspořádaných dvojic, jinak řečeno budeme pracovat s prvky z kartézského součinu $A \times B$. Když shromáždíme všechny dvojice (ovoce, vitamín), které opravdu platí, dostaneme množinu dvojic neboli podmnožinu $A \times B$, která přesně popisuje zkoumaný vztah. Že nějaké ovoce jistý vitamín nemá, poznáme podle toho, že příslušná dvojice v naší množině chybí.

Obecně řečeno, tím, že zvolíme nějakou podmnožinu množiny $A \times B$, již jednoznačně vzniká určitý vztah mezi prvky z A a B (mezi konkrétními prvky $a \in A$, $b \in B$ buď je, nebo není).

Definice.

Nechť A, B jsou množiny. Libovolná podmnožina R kartézského součinu $A \times B$ se nazývá **binární relace** z A do B .

Jestliže $(a, b) \in R$, pak to také značíme aRb a řekneme, že **a je v relaci s b** vzhledem k R .

Jestliže $(a, b) \notin R$, pak řekneme, že **a není v relaci s b** vzhledem k R .

By a **relation** from a set A to a set B we mean an arbitrary subset R of the Cartesian product $A \times B$.

When $(a, b) \in R$, we also denote it aRb for short and say that **a is related to b** by R .

Oba způsoby značení, aRb i $(a, b) \in R$, jsou zcela rovnocenné a autor obvykle volí to, o kterém si myslí, že v daném kontextu rychleji předá čtenáři sdělovanou myšlenku. První značení je kratší a v mnoha situacích výrazně snazší, jsou ale věci, které se jím vyjadřují obtížně. Občas tedy nezbyde než si připomenout, že vlastně „ aRb “ není nic jiného než pohodlná zkratka pro $(a, b) \in R$, protože konec konců z matematického hlediska relace nejsou nic jiného než množiny dvojic, práce s dvojicemi je tedy pro relace primárním jazykem. Je dobré mít na paměti, že „ aRb “ je zkratka pro logický výrok „platí $(a, b) \in R$ “, čímž je dáno, jakými matematickými nástroji s tímto symbolem pracujeme. Pokud například chceme vyjádřit opak (prvky a, b spolu nejsou v relaci R), tak to napíšeme $\neg(aRb)$. V primárním (množinovém) jazyce bychom napsali $(a, b) \notin R$.

Příklad 5a.a: Nechť A je množina všech lidí žijících v určité zemi (městě atd., vyberte si sami) a B je množina přirozených čísel. Definujeme relaci R jako množinu všech dvojic (a, b) takových, že a má b jako číslo mobilního telefonu.

R tedy obsahuje dvojice jako je třeba (Jenny, 8675309). Pokud bychom chtěli použít ten druhý zápis, naše ukázková dvojice by se zapsala $JennyR8675309$. Zdá se, že v tomto případě je první zápis lepší.

V situacích, kdy preferujeme zápis aRb , tomu obvykle přizpůsobíme už definici relace. V našem příkladě by to vypadalo třeba takto:

- Uvažujme relaci R z A do B danou touto podmínkou: pro $a \in A, b \in B$ platí aRb právě tehdy, když a má číslo mobilu b .

Pak už se automaticky rozumí, že relace R vznikne jako množina všech dvojic (a, b) , pro které aRb dle dané podmínky.

Na tomto příkladě je pěkně vidět, že od relace jako množiny dvojic nelze obecně čekat nějaké pravidelnosti. Mohou být lidé, kteří v žádné dvojici nevystupují (nemají mobil), ale také lidé, kteří jich mají více a tudíž se budou vyskutovat ve více dvojicích. Podobně pravděpodobně existují čísla, která v žádných dvojicích nenajdeme, a nelze vyloučit, že některé číslo může být ve více dvojicích (třeba když děti sdílejí jeden mobil).

Proto jako relaci připouštíme zcela libovolnou podmnožinu $A \times B$, nechceme předem nic vylučovat.

△

Obvykle se slovo „binární“ vynechává, protože vidíme z kontextu, že relace spojuje dva prvky. Je samozřejmě možné spojovat více rozdílných dat, například pracovat s trojicí (jméno, číslo, PSČ) atd., tyto relace se studují méně a my se jim budeme stručně věnovat v příslušné sekci 5d.3.

Často si relace z A do B přibližujeme tak, že je znázorníme orientovaným grafem: Nakreslíme prvky množiny A , prvky množiny B a za každou dvojici $(a, b) \in R$ uděláme orientovanou šipku z a do b .

Evidentně budeme mít problém, když je některá z množin nekonečná. Jsou nicméně případy, kdy alespoň konečný kus nekonečného grafu ledacos naznačí, reprezentace relací pomocí grafů totiž hovoří přímo k naší intuici.

Relace (s konečnými množinami) se dá také reprezentovat **tabulkou**. Každý prvek z A má svůj řádek, sloupce jsou pro prvky z B a pokud relace aRb existuje, tak uděláme křížek.

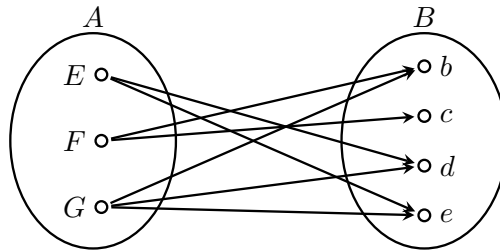
Příklad 5a.b: Uvažujme malou školu se studenty **Elrond**, **Frodo** a **Gandalf**, škola nabízí kurzy **bylinkářství**, **cestování**, **diskrétní matematiky** a **evil studies**. Elrond si zapsal diskrétní matematiku a evil studies, Frodo bylinkářství a cestování a Gandalf si zapsal bylinkářství, diskrétní matematiku a evil studies.

Zapišeme to jako relaci. Uvažujme množinu studentů $A = \{E, F, G\}$ a množinu předmětů $B = \{b, c, d, e\}$, informace zachytíme v následující relaci R z A do B :

$$R = \{(E, d), (E, e), (F, b), (F, c), (G, b), (G, d), (G, e)\}.$$

Vyjádření tabulkou a orientovaným grafem:

	b	c	d	e
E			×	×
F	×	×		
G	×		×	×



△

Často porovnáváme objekty stejného typu, tedy množiny A a B jsou stejné. Pak říkáme, že máme **relaci na množině** A . Jak brzy uvidíme, dá se s nimi dělat víc než u relací obecných. Jedno zjednodušení zmíníme hned, pokud si chceme takovou relaci zachytit obrázkem, pak nemusíme kreslit množinu A dvakrát, ale spojujeme příslušné prvky šipkami přímo v jedné kopii.

Příklad 5a.c: Uvažujme určitou množinu A lidí. Definujme relaci R jako množinu všech dvojic (a, b) , kde $a, b \in A$ a člověk a je (biologickým) rodičem člověka b .

Když si pro tuto relaci vyrobíme graf, dostaneme vlastně rodokmeny (či jejich části, záleží na tom, jak jsme zvolili A , pro lepší rodokmeny by asi bylo dobré do A zahrnout i lidi již nežijící). Výsledná relace evidentně závisí na množině A , například pokud bychom vzali jako A žáky nějaké první třídy, tak nejspíše žádná dvojice dle předpisu nebude existovat, tedy $R = \emptyset$.

Pokud bychom chtěli používat značení aRb , nabízí se alternativní definice:

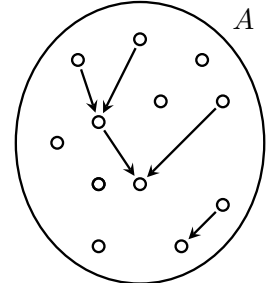
- Uvažujme následující relaci R na množině A : pro $a, b \in A$ platí aRb právě tehdy, když a je (biologický) rodič b .

Protože jsme už v úvodní větě napsali, na jaké množině R definujeme, lze považovat příslušnost $a, b \in A$ za zjevnou a definici udělat stručnější:

- Uvažujme následující relaci R na množině A : aRb právě tehdy, když a je (biologický) rodič b .

△

Matematika nám nabízí spoustu relací.



Příklad 5a.d: Reálná čísla umíme porovnávat podle pozice na reálné ose. Ukážeme si tři typické příklady relací.

1. Zvolme množiny $A = B = \mathbb{R}$ a uvažujme relaci

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \leq b\}.$$

Takže například $(2, 7) \in R$, $(-1, \sqrt{7}) \in R$, ale $(3, 1) \notin R$. Pokud bychom chtěli ten druhý zápis, mohla by definice vypadat třeba takto:

- Uvažujme relaci R na \mathbb{R} definovanou aRb právě tehdy, když $a \leq b$.

Psal bychom pak třeba $2R7$, $-1R\sqrt{5}$, ale $\neg(1R0.3)$. Pro známé relace pak máme velmi krátkou verzi definice.

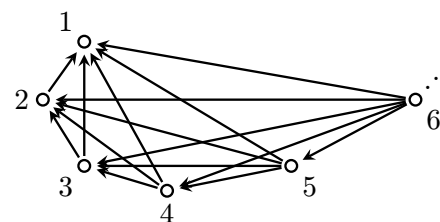
- Uvažujme relaci \leq na množině \mathbb{R} .

Tento způsob umožňuje jednoduše modifikovat množinu objektů A . Tato definice se od předchozích dvou liší v tom, že pro relaci nezavádí speciální písmeno R , takže normálně píšeme $3 \leq 4$. To vypadá rozumně, proč zavádět nový symbol, když už máme \leq . Jsou ale situace, kdy myšlenku vyjádříme lépe písmenem, zejména pokud jde o teoretičtější úvahy, kde přecházíme zpět k primárnímu pohledu na relace coby množiny dvojic. Pro čtenáře asi bude příjemnější číst $(3, 3) \in R$ než $(3, 3) \in \leq$. Podobně u skládání relací vypadá $S \circ R$ poněkud přehledněji než $S \circ \leq$. Je to tedy jako obvykle, volíme takové značení, které nejlépe předá čtenáři myšlenku.

2. Teď uvažujme relaci $>$ na \mathbb{N} . Formálně vzato by její definice měla vypadat takto:

$$> = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : m > n\}.$$

Pokud bychom byli nuceni pracovat s dvojicemi, asi by v tomto případě zase bylo lepší si pro značení relace zavést písmenko. Pro zajímavost si ukážeme část grafu, budou tam dvojice typu $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$, ...



3. Můžeme také uvažovat relaci T rovnosti třeba na \mathbb{Q} , ve skutečnosti to bude množina

$$T = \{(x, x) : x \in \mathbb{Q}\}.$$

Samozřejmě obvykle je výrazně snazší pracovat s touto relací v přirozeném značení typu $3 = 3$.

△

Příklad 5a.e: V kapitole 1d jsme pracovali s rovností množin, rádi bychom se na ni podívali pohledem relací. Totéž platí o dalším množinovém vztahu, o inkluzi $M \subseteq N$. Jak bychom toto oblékli do relačního kabátku?

Měli bychom přijít s množinou \mathcal{A} objektů, které porovnáváme (to budou množiny), a na ní pak pomocí podmínky zadat relaci. Nabízí se prostě říct, že \mathcal{A} je množina všech možných množin, a na \mathcal{A} pak uvažujme relaci $A \subseteq B$. Nápad to není špatný, ale naráží na podstatný problém související s pojmem množiny (viz také diskuse na začátku části 1d). Množinová teoretici dokázali, že když do jedné kolekce sesypeme všechny existující množiny, tak ten výsledný objekt nemůže být množinou.

Naštěstí v praktických i teoretických úvahách nikdy nepotřebujeme všechny množiny, vždy je vybíráme z nějakého menšího tématického okruhu. Nejjednodušší by tedy bylo shromáždit všechny množiny, které hodláme používat, do kolekce \mathcal{A} a doufat, že tím vznikla množina. Pokud ano (když tam těch množin nedáme příliš mnoho), tak můžeme definovat relaci

$$R = \{(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} : A \subseteq B\}.$$

Tím jsme přivedli vztah inkluze do světa relací a můžeme s ním pracovat.

Tento přístup ale není častý, například proto, že dopředu nemusí být jasné, jaké množiny budeme potřebovat. Obvykle ale víme velmi dobře, z jakých prvků je budeme sestavovat, třeba v této knize obvykle pracujeme s množinami celých čísel. Postupujeme proto jinak.

Zvolíme si universum U prvků, se kterými chceme pracovat. Všechny množiny, které lze z těchto prvků vytvořit, jsou pak podmnožinami U . Je známo, že množina všech podmnožin daného universa U je zase množina a máme pro ni dokonce standardní značku $P(U)$. Na ní pak definujeme relaci.

Pokud například zvolíme $U = \mathbb{R}$, pak množina $\mathcal{A} = P(U)$ obsahuje všechny množiny poskládané z reálných čísel, třeba intervaly, množinu všech prvočísel a podobně. Můžeme je pak porovnávat pomocí rovnosti a inkluze. Oficiálně bychom řekli, že na množině \mathcal{A} uvažujeme relaci $=$, popřípadě \subseteq .

V této knize nás bude více zajímat trochu jiný svět, nejčastěji budeme pracovat s celými čísly a množinami z nich utvořenými. Volíme tedy $U = \mathbb{Z}$ a budeme pracovat s relacemi $=$ a \subseteq na množině $\mathcal{A} = P(\mathbb{Z})$ všech podmnožin celých čísel.

△

Změnou množiny, na které daná relace pracuje, získáme formálně novou relaci. Často ale ta nová vychází ze stejné myšlenky, stejného vztahu, například čistě formálně jsou relace rovnosti na \mathbb{N} , na \mathbb{Z} či na \mathbb{R} tři různé relace, ale jde stále o tentýž proces. Dá se čekat, že vlastnosti těchto tří relací spolu nějak budou souviset. Selský rozum naznačuje, že když relaci prozkoumáme na velké množině, bude možné některé závěry přenést i na její podmnožiny. Dále se ukáže, že to tak opravdu funguje, proto se vyplatí zavést si matematický popis pro situaci, kdy přecházíme od „větší“ množiny k „menší“.

Definice.

Nechť R je relace z množiny A do množiny B , nechť $C \subseteq A$ a $D \subseteq B$. Definujeme **restrikci** (restriction) relace R na $C \times D$ jako relaci $R \cap (C \times D)$. Značí se $R|_{C \times D}$.

Jinými slovy, z relace R prostě vyhodíme všechny dvojice, ve kterých se objevují prvky mimo C a D . Sice je to formálně jiná relace, ale protože funguje podle stejné vnitřní logiky, obvykle se proto pro ni používá stejné písmenko. Pokud je R relace na množině A neboli je to podmnožina $A \times A$, pak by čistě formálně mělo smysl vzít dvě podmnožiny $C, D \subseteq A$ a pracovat s restrikcí R na $B \times C$, ale to má málokdy praktický smysl. Obvykle vezmeme jen jednu podmnožinu $C \subseteq A$ a pracujeme s restrikcí R na $C \times C$. Říkáme, že uvažujeme restrikci R na množinu C či že uvažujeme relaci R na množině C . Příklad: „relace \leq na \mathbb{Z} “, „relace \subseteq na podmnožinách \mathbb{N} “ a podobně.

Příklad 5a.f: Nechť A je množina všech počítačů na světě. Definujeme relaci R na A takto: aRb pro $a, b \in A$ jestliže jsou spolu a, b přímo propojeny tak, aby si mohly vyměňovat informace.

Pokud bychom si nakreslili graf, viděli bychom, jak je svět zasíťovaný. Pomocí restrikce na různé podmnožiny A bychom se mohli zaměřovat na jednotlivé podsítě.

△

Příklad 5a.g: Uvažujme množinu A všech žáků v nějaké konkrétní třídě, vytvoříme na ni relaci R takto: $(a, b) \in R$ právě tehdy, pokud jsou a a b spolu kamarádi. Něco takového řeší sociologové a mimo jiné pracují s grafem, určitě si umíte nějaký představit: za každého žáka kolečko a mezi nimi porůznu spojnice.

Co se stane, když se žák c přestěhuje do jiného města? Přestane být kamarádem ostatních, tedy všechny dvojice, ve kterých figuroval, zmizí z relace. Formálně máme novou množinu objektů $B = A \setminus \{c\}$ a nová vztahová relace S je přesně restrikce R na B .

Vraťme se do původní třídy. Jistí d a e byli velcí kamarádi (tedy platilo $(d, e) \in R$) a pak se rozhádali, vznikla tak nová relace T , která je rovna $R - \{(d, e)\}$, je to tedy podmnožina R . Nevzniká ale coby restrikce, protože d i e mohli být v dalších dvojicích a tyto dvojice (zatím) v relaci zůstaly.

Všimněte si, že v těchto souvislostech je lepší vidět relaci jako množinu dvojic, ve značení aRb by se nám vyřazování dvojic hůře formulovalo.

△

Narážíme tady na zajímavou věc. Relace jsou množiny, takže je možné dvě relace porovnávat pomocí inkluze. Jakou informaci tím získáme? Představme si, že pro jisté dvě relace zjistíme $R_1 \subseteq R_2$. Jak to přeložíme do alternativního relačního jazyka? Vyjdeme z definice inkluze, prvky R_1 (tedy relační dvojice) musí být také v R_2 . To už snadno přepíšeme:

- $R_1 \subseteq R_2$ znamená, že pro všechna a, b platí $aR_1b \implies aR_2b$.

Relace R_1 tedy vynutí splnění R_2 , intuitivně řečeno je relace R_1 „silnější“. Klasickým případem je rovnost na reálných číslech, která již vynucuje nerovnost, $x = y \implies x \leq y$. Pokud bychom tyto symboly brali jako označení relace v původním smyslu, tedy množiny dvojic, tak bychom mohli napsat $= \subseteq \leq$, ale asi to není nejlepší nápad. Jiný příklad: relace „býti synem/dcerou“ je podmnožinou relace „býti příbuzný“.

Je zjevné, že přechod k restrikci vytvoří podmnožinu původní relace, tedy formálně řečeno $R|_{C \times D} \subseteq R$. Jak ukázal příklad s žáky, podmnožiny relací umíme vytvářet i jinak, prostým vyřazením určitých dvojic. Je tu ovšem zajímavá otázka: Co kdyby se c neodstěhoval, ale jen se se všemi rozhádal? Pak by množina objektů A zůstala stejná a dostali bychom novou relaci, která je ale vlastně stejná jako $S = R|_B$, měla by totiž stejné dvojice. Narážíme tím na zajímavý jev, že množina objektů vlastně není z relace poznat, víme jen, že musí obsahovat všechny prvky, které se ve dvojicích objeví. Může mít prvky navíc, ty ale fungování relace nikterak neovlivní, proto je z hlediska praktického i teoretického jedno, jestli jsme k relaci S došli restrikcí R nebo odebráním dvojic. Ne každou podmnožinu relace umíme získat restrikcí, ale pokud se tak stalo, tak se takto vzniklá podmnožina chová lépe, než lze obecně čekat. Formálně to uvidíme dále.

Brzy se s relacemi naučíme dělat i jiné věci než restrikce. Při práci s konkrétní relací velmi pomůže, pokud si její chování umíme nějak představit. Důležité je pochopit princip, na základě kterého vybírá, koho propojí. Ukážeme si to na dalším příkladě, kde relaci schválně označíme jinak než R , abychom připomněli, že to není nikde vyžadováno.

Příklad 5a.h: Uvažujme relaci W na \mathbb{N} definovanou takto: aWb právě tehdy, když existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující $a + bk = 17$.

Jak tato relace funguje? Například $5W2$ neboli $(5, 2) \in W$, protože pro $k = 6$ máme $5 + 2 \cdot 6 = 17$, tedy podmínka z definice aWb je splněna. Také $2W5$, protože tentokrát volba $k = 3$ dává $2 + 5 \cdot 3 = 17$. Nenápadně tím upozorňujeme na logiku definice, kde k není globální, ale pro každá dvě čísla a, b se znovu testuje pravdivost podmínky „ $\exists k \in \mathbb{Z}: a + bk = 17$ “, takže to k má každá dvojice své (a nebo žádné, když někdy neexistuje).

Máme také $23W3$, protože volba $k = -2$ splní podmínku: $23 + 3 \cdot (-2) = 17$. Platí i $3W23$? To by muselo existovat nějaké $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby $3 + 23k = 17$. Snadno si rozmyslíme, že toto nelze udělat, protože jediný kandidát na k je necelé číslo $\frac{14}{23}$, takže $3W23$ neplatí, tady je výstižné značení $(3, 23) \notin W$.

Umíme nějak poznat, které dvojice jsou v relaci, aniž bychom se odvolávali na řešení rovnice pro k ? Zde je jeden možný pohled. Číslo b musí splňovat $bk = 17 - a$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, což by mělo připomenout pojem dělitelnosti. Dostáváme tak alternativní specifikaci relace W : Dané přirozené číslo a je v relaci se všemi přirozenými čísly b , které dělí $17 - a$.

Například když zvolíme $a = 3$, tak se díváme na dělitele čísla $17 - 3 = 14$. Vidíme tedy, že dvojice $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 7)$ a $(3, 14)$ všechny leží ve W a jiné dvojice s $a = 3$ už nebudou. Vypadá to, že ke každému a existuje jen konečně mnoho dvojic ve W , ale je tu jedna výjimka. Je jedno číslo, které má nekonečně mnoho dělitelů, jmenovitě nula. Opravdu, pokud vezmeme $a = 17$, tak pro libovolné $b \in \mathbb{N}$ máme $17 + b \cdot 0 = 17$.

Obrazně řečeno, ze všech $a \in \mathbb{N}$ vede konečně mnoho šipek s výjimkou $a = 17$, z toho vedou šipky do všech $b \in \mathbb{N}$.

Relace se dívají „zleva doprava“, ale u tohoto příkladu získáme zajímavý pohled na celou množinu W při pohledu „odzadu“. Když si zvolíme $b \in \mathbb{N}$, tak jsou s ním v relaci taková $a \in \mathbb{N}$, která splňují $a + bk = 17$ neboli $a = 17 - bk$. Dostáváme tak přímý vzorec, který pro dané b vyrábí a , která jsou s nimi v relaci! Kolik jich je? Protože $b \neq 0$, bude jich vždy nekonečně mnoho, jen si musíme hlídat, aby $17 - bk$ bylo kladné.

Můžeme tedy přesně napsat, jak W vypadá coby množina:

$$W = \left\{ (17 - kb, b) : b \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge k < \frac{17}{b} \right\}.$$

Teď už máme dobrou představu, jak tato relace funguje. Pomůže nám to k něčemu? Dobrá otázka, nevíme totiž, co bychom s ní potřebovali dělat. Příznám se, že jsem si ji vymyslel jen tak, na protrénování matematického myšlení, takže nečekám, že by k něčemu byla.

△

5a.1 Operace

Operace jsou matematický způsob, jak zachytit skutečnost, že s objekty všelijak zacházíme. Co bychom mohli chtít dělat s relacemi? Relace zachycuje, že existuje nějaký vztah. Zajímavé by bylo podívat se na „opak“, tedy situace, kdy vztah není.

Další inspiraci přináší příklad 5a.b. Relace se na onen vztah dívá zleva doprava, ve směru šipky, tedy u studenta ukáže, co studuje. Já jako učitel se ale na věci dívám z opačné strany, u předmětu vidím, kdo na něj chodí. Tento alternativní pohled se nám také docela osvědčil i v příkladu 5a.h. Chtěli bychom tedy také mít možnost „obrátit šipky“.

Definice.

Nechť R je relace z nějaké množiny A do nějaké množiny B .

Definujeme její **doplňěk** či **komplementární relaci** (**complementary relation**) jako relaci

$$\bar{R} = \{(a, b) \in A \times B : (a, b) \notin R\}.$$

Definujeme **relaci inverzní k** R , značeno R^{-1} , jako relaci z B do A danou

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}.$$

Let R be a relation from a set A to a set B . We define its **inverse relation**, denoted R^{-1} , as the relation from B to A defined by

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}.$$

Pokud se na inverzní relaci podíváme alternativním jazykem, tak $bR^{-1}a$ právě tehdy, když aRb . Jde tedy opravdu o obrácení šipek v grafu, například pro relaci R s dvojicemi (dítě, rodič) bude inverzní relace R^{-1} obsahovat dvojice (rodič, dítě).

Příklad 5a.i (pokračování 5a.b): Připomeňme, že $A = \{E, F, G\}$ jsou studenti, $B = \{b, c, d, e\}$ kursy a relace $R = \{(E, d), (E, e), (F, b), (F, c), (G, b), (G, d), (G, e)\}$ říká, který student si zapsal jaký kurs. Inverzní relace je

$$R^{-1} = \{(b, F), (b, G), (c, F), (d, E), (d, G), (e, E), (e, G)\}$$

a u každého kursu ukazuje, kdo se jej zapsal.

△

Příklad 5a.j: Připomeňme si relaci \leq na \mathbb{R} , označme ji písmenem R .

Podle definice se \bar{R} sestává ze všech dvojic, které nepatří do \mathbb{R} , tedy z dvojic (a, b) takových, že neplatí $a \leq b$. Na reálné ose to ovšem znamená, že $a > b$. Vidíme, že doplňkem relace \leq je relace $>$.

Co se týče inverze, podle definice $(a, b) \in R^{-1}$ právě tehdy, pokud $(b, a) \in R$ neboli pokud $b \leq a$ neboli pokud $a \geq b$. Shrnuto, R^{-1} se skládá ze všech dvojic (a, b) splňujících $a \geq b$, tedy inverzní relace k \leq je \geq .

△

Příklad 5a.k:

Uvažujme množinu $A = C(\mathbb{R})$ všech reálných funkcí spojitých na \mathbb{R} . Definujme relaci R na A podmínkou fRg právě tehdy, když má f na \mathbb{R} derivaci a $f' = g$. Je to tedy relace, která spojuje funkce a jejich derivace, například $\sin(x)R\cos(x)$ nebo x^2R2x . Zde asi bude lepší to „pravé“ značení, $(\sin, \cos) \in R$ a $(x^2, 2x) \in R$. Ano, budeme se jej držet. Co se v relaci děje?

Víme, že ne každý prvek z A je v nějaké dvojici na prvním místě, protože jsou spojité funkce, které nelze na \mathbb{R} derivovat, třeba $f(x) = |x|$. Může se také stát, že derivovat lze, ale výsledkem není spojitá funkce, takové případy naše relace také nezahrnuje.

Na druhou stranu matematická analýza říká, že každá spojitá funkce je derivací nějaké spojité funkce, takže obrazně řečeno do každé funkce v A vede nějaká šipka. Dokonce víme, že jich vede víc, například $(2x, 2) \in R$, ale také $(2x + 13, 2) \in R$. Na druhou stranu se nemůže stát, že by jedna funkce f existovala ve více dvojicích na první pozici, protože derivaci má funkce nejvýše jedinou.

Máme tedy jasno, jak se naše relace chová. Jak vypadá relace inverzní? Podle definice,

$$fR^{-1}g \iff gRf \iff g' = f \iff g \in \int f.$$

Inverzní relace k R tedy spojuje funkce s jejich primitivními funkcemi.

△

Selský rozum říká, že když dvakrát obrátíme směr šipek, měli bychom dostat zpět ty původní. Přeloženo do matematictiny, čekáme, že platí pravidlo $(R^{-1})^{-1} = R$. Důkaz je snadný, proto to necháváme jako cvičení 5a.5.

Doplňek relace je vlastně běžná množinová operace aplikovaná na množinu dvojic R v universu $A \times B$. Podobně můžeme pomocí dalších známých množinových operací spojovat dvě či více relací. Bude to mít nějaký praktický význam z pohledu relací?

Uvažujme dvě relace působící na stejných množinách, tedy relace R_1, R_2 z A do B . Definice říkají následující:

$$\begin{aligned} R_1 \cap R_2 &= \{(a, b) \in A \times B : (a, b) \in R_1 \wedge (a, b) \in R_2\}, \\ R_1 \cup R_2 &= \{(a, b) \in A \times B : (a, b) \in R_1 \vee (a, b) \in R_2\}. \end{aligned}$$

Přeložme to do alternativního jazyka:

- $a(R_1 \cap R_2)b$ právě tehdy, když aR_1b a aR_2b ,
- $a(R_1 \cup R_2)b$ právě tehdy, když aR_1b nebo aR_2b .

Příklad 5a.1: Nechť je A množina všech měst (v České republice, aby jich nebylo tolik). Nechť R_1 je relace definovaná tak, že aR_1b právě tehdy, když se dá z a do b dostat autobusem, a R_2 je relace definovaná tak, že aR_2b právě tehdy, když se dá z a do b dostat vlakem.

Pak relace $R_1 \cup R_2$ udává, zda se dá z a do b dostat autobusem či vlakem, z pohledu cestujícího je nám tedy jedno, jak pojedeme, hlavně abychom se tam dostali.

Relace $R_1 \cap R_2$ udává, zda se dá z a do b dostat vlakem i autobusem, tedy jde o spoje, kde si můžeme vybrat, kterým prostředkem pojedeme.

Je vidět, že tyto operace mají ve světě relací dobrý smysl a mohou být i užitečné. Snadno si dále rozmyslíme, že relace $R_1 - R_2$ udává, zda se dá z a do b dostat autobusem, ale ne vlakem.

△

Zvídavého čtenáře napadne, že se může stát, že potřebujeme aplikovat operaci inverzní relace na nějaký komplikovanější výraz, třeba na relaci $R \cup S$. Platí pak nějaká pravidla, která by nám situaci ulehčila, v ideálním případě pomohla získat $(R \cup S)^{-1}$ čistě na základě znalosti R^{-1} a S^{-1} ? Právě takovéto věci matematiky velmi zajímají.

Věta 5a.2.

Nechť R a S jsou relace z nějaké množiny A do nějaké množiny B . Pak platí následující:

- (i) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;
- (ii) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
- (iii) $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$.

Jsou to vlastně „počítací pravidla“, umožňují nám manipulovat s výrazy vytvořenými z relací podobně, jako když upravujeme algebraické výrazy pomocí algebraických identit. Tato ale nejsou zase tak důležitá, rozhodně nestojí za to se je učit nazpaměť. Pokud člověk rozumí relacím, dokáže si v případě potřeby pravidlo tohoto typu vymyslet sám a hned i dokázat. Ukazujeme je tu ze dvou důvodů, jednak jako typickou ukázkou, co matematici zkoumají (když si něco vymyslí, tak chtějí vědět, jak se to chová), a také jako výbornou příležitost procvičit si tvoření důkazů.

S Rozbor: Jak dokážeme, že jsou si dvě relace rovny? Napoví definice. Relace jsou vlastně množiny dvojic. Posunuli jsme se tedy k otázce, jak dokázat rovnost dvou množin. I na to je definice, je třeba ukázat, že prvky jedné množiny jsou v té druhé, a také naopak. Tím je dán celkový plán důkazu.

Jak bude vypadat jeho klíčová část, tedy důkaz, že prvky jedné relace jsou v druhé? Standardně začínáme tím, že si vezmeme libovolný (ale ne konkrétní) prvek z té první relace, potřebujeme ukázat, že je v té druhé. Vcelku spolehlivě zabírá, když si o tom prvku nejprve zjistíme co nejvíce informací, přičemž se vychází z definic použitých pojmů, popřípadě z informací, které jsme již o nich dokázali.

Obvykle pak nastává okamžik, kdy už dál nic nového neumíme zjistit, je zapotřebí nashromážděná data poskládat tak, abychom se dostali k cíli. Pokud se zadržneme, tak obvykle pomůže, když si připomeneme, kam se vlastně chceme dostat, to by mělo napovědět další směr argumentu.

Důkaz (rutinní, poučný): (i): 1) Nejprve dokážeme, že $(R \cup S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cup S^{-1}$. Mějme nějaké $(a, b) \in (R \cup S)^{-1}$. Podle definice inverzní relace to znamená, že $(b, a) \in R \cup S$. Definice sjednocení pak říká, že musí být pravdivý výrok „ $(b, a) \in R$ nebo $(b, a) \in S$ “.

Potřebujeme se dostat k inverzím jednotlivých relací. Definice inverzní relace napovídá, že poslední výrok výše lze přepsat jako „ $(a, b) \in R^{-1}$ nebo $(a, b) \in S^{-1}$ “. Z něj podle definice sjednocení vyplývá $(a, b) \in R^{-1} \cup S^{-1}$, což jsme přesně potřebovali.

2) Teď dokážeme opačnou inkluzi $R^{-1} \cup S^{-1} \subseteq (R \cup S)^{-1}$. Vezměme si libovolné $(a, b) \in R^{-1} \cup S^{-1}$. Pak platí, že $(a, b) \in R^{-1}$ nebo $(a, b) \in S^{-1}$. Podíváme se na tyto dvě možnosti.

V případě $(a, b) \in R^{-1}$ máme $(b, a) \in R$ a tedy $(b, a) \in R \cup S$, proto $(a, b) \in (R \cup S)^{-1}$.

Druhá a poslední možnost je, že $(a, b) \in S^{-1}$. Pak platí $(b, a) \in S$ a tedy $(b, a) \in R \cup S$, proto $(a, b) \in (R \cup S)^{-1}$.

Potvrdili jsme, že $(a, b) \in (R \cup S)^{-1}$.

Tvrzení (ii) a (iii) se dokazují obdobně, proto to necháme jako cvičení 5a.6. □

Každou část jsme dokazovali jiným způsobem, v 1) jsme pracovali s celým výrokem, což bylo stručnější, ale vyjde to málokdy. V části 2) jsme použili rozbor případů, což je delší, ale obecně má tento přístup větší šance na úspěch. Rozmyslete si ještě, že pokud bychom chtěli i druhou část dokazovat tím prvním způsobem, pak bychom použili přesně stejné zastávky, jen se jimi prochází v opačném směru. Jednotlivé kroky jsou totiž ekvivalence, dají se použít v obou směrech. Šlo tedy dokázat oba směry najednou, jmenovitě dokázat, že $(a, b) \in (R \cup S)^{-1}$ právě tehdy, když $(a, b) \in R^{-1} \cup S^{-1}$. Důkaz by se tím zkrátil na polovinu.

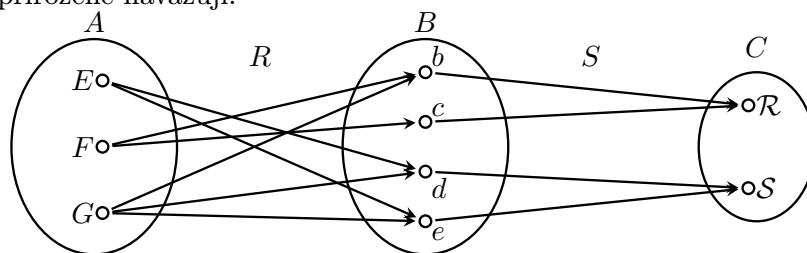
Relace jsou ovšem víc než jen množiny, nesou konkrétní význam (vztah), mají tedy i vlastní speciální operaci.

Příklad 5a.m (pokračování 5a.b): Připomeňme, že $A = \{E, F, G\}$ jsou studenti, $B = \{b, c, d, e\}$ kursy a relace $R = \{(E, d), (E, e), (F, b), (F, c), (G, b), (G, d), (G, e)\}$ říká, který student si zapsal jaký kurs.

Teď přidejme do situace učitele Radagasta a Saurona, tedy množinu $C = \{\mathcal{R}, \mathcal{S}\}$, a relaci

$S = \{(b, \mathcal{R}), (c, \mathcal{R}), (d, \mathcal{S}), (e, \mathcal{S})\}$, která říká, který kurs je učen kterým učitelem.

Relace R a S na sebe přirozeně navazují:



V této situaci je zajímavé podívat se jen na začátky a konce dvojkroků, tedy ignorovat mezistupně. Například z dvojkroku $F \xrightarrow{R} b \xrightarrow{S} \mathcal{R}$ si můžeme vzít jen informaci $F \rightarrow \mathcal{R}$, která nám říká, že Froda bude v tomto semesru učit (mimo jiné) Radagast. Vidíme, že takovýmto napojením dvou relací dostáváme užitečnou informaci.

Vypíšeme si zkráceným zápisem všechny možné dvojkroky:

$ERdSS, EReSS, FRbSR, FRcSR, GRbSR, GRdSS, GReSS$.

Z nich pak dostáváme následující dvojice:

$$\{(E, \mathcal{S}), (F, \mathcal{R}), (G, \mathcal{R}), (G, \mathcal{S})\}.$$

Tato relace popisuje přiřazení učitelů k jednotlivým žákům.

△

Z příkladu je zjevná myšlenka a také omezení, které je nutné respektovat. Abychom mohli dvě relace napojit, tak ta druhá musí začínat ve stejné množině, v jaké skončila ta první.

Definice.

Nechť R je relace z nějaké množiny A do nějaké množiny B a S je relace z B do nějaké množiny C . Definujeme jejich **složení** $S \circ R$ jako relaci z A do C definovanou pro $a \in A$, $c \in C$ jako

$$(a, c) \in S \circ R \text{ právě tehdy, když existuje } b \in B \text{ takové, že } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S.$$

If R is a relation from a set A to a set B and S is a relation from B to a set C , we define the **composite** of R and S , denoted $S \circ R$, as the relation consisting of ordered pairs (a, c) such that there exists $b \in B$ so that $(a, b) \in R$ and $(b, c) \in S$.

Množinově řečeno,

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B: (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}.$$

Když skládáme v pořadí nejprve R , pak S , tak v grafu výše i v zápisu dvojkroku $aRbSc$ je R nalevo (což je přirozené, čteme zleva doprava), ale v zápisu složené relace je R vpravo, jakoby až druhé. Je to přesně naopak, než by člověk čekal, a začátečníkům se to plete. Není to schválně, abychom studenty trápili, vyplývá to z tradičního pohledu na skládání, ale i matematici připouštějí, že to není nejšťastnější. Někteří proto trucují a používají značení $R \circ S$, není jich mnoho, ale stačí to na to, aby v tom byl navíc ještě zmatek.

Lidé od computer science to často řeší tak, že si pro jistotu zavedou vlastní značení pro skládání, například toto: $R;S$. Protože ale žádné z těch značení není vnímáno jako všeobecně přijímané, budeme se (s nechutí) držet toho asi standardního $S \circ R$. Pro čtenáře je podstatné, že by měl být ostražitý a při studiu dalších textů se v případě skládání vždy podívat, jak to autor myslí s pořadím.

Příklad 5a.n: Uvažujme relaci R na \mathbb{Z} danou podmínkou aRb právě tehdy, když $b = 2a$, a relaci S na \mathbb{Z} danou vztahem \leq . Jak vypadá $S \circ R$?

Aby dvojice (a, c) patřila do $S \circ R$, musí se najít nějaké číslo $b \in \mathbb{Z}$ tak, aby $aRbSc$. To znamená, že $b = 2a$ a $b \leq c$. Když to spojíme, dostáváme $c \geq 2a$.

Právě jsme ukázali implikaci, že jestliže $(a, c) \in S \circ R$, tak $c \geq 2a$. Je to opravdu podmínka popisující složenou relaci? Abychom si byli jisti, musíme ověřit opačný směr, tedy že libovolná dvě čísla a, c splňující $c \geq 2a$ tvoří dvojici $(a, b) \in S \circ R$. Musíme tedy pro ně najít přestupní stanici b podle předpisu. Nabízí se číslo $b = 2a$. Pak opravdu $b \in \mathbb{Z}$ a platí $b = 2a$ a $b \leq c$ neboli aRb a bSc .

Potvrdili jsme, že relace $S \circ R$ je přesně množina všech dvojic (a, c) splňujících $c \geq 2a$.

△

Máme teď dvě speciální operace pro relace, skládání a pojem inverzní operace. Nejen matematika jistě zajímá, zda mezi těmito dvěma operacemi existuje nějaký vztah.

Věta 5a.3.

Nechť R je relace z množiny A do množiny B a S je relace z B do množiny C .

Pak $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Důkaz (rutinní): Relace $S \circ R$ jde z A do C , takže $(S \circ R)^{-1}$ jde z C do A . To je stejný směr, kterým jde složená relace $R^{-1} \circ S^{-1}$, vznikla totiž z řetízku $C \xrightarrow{S^{-1}} B \xrightarrow{R^{-1}} A$. Množiny tedy souhlasí a víme, s jakými relacemi budeme pracovat.

Relace jsou množiny dvojic, takže jejich rovnost dokážeme argumentem, že mají stejné prvky (dvojice). Zkusíme to dokázat oběma směry najednou, tedy ekvivalentními kroky.

$(c, a) \in (S \circ R)^{-1}$ právě tehdy, když $(a, c) \in S \circ R$, což je právě tehdy, když $\exists b \in B: aRb$ a bSc . Podle definice inverzních relací to je právě tehdy, když $\exists b \in B: cS^{-1}b$ a $bR^{-1}a$, což je právě tehdy, když $(c, a) \in R^{-1} \circ S^{-1}$. □

Věta nám říká, že $(S \circ R)^{-1}$ nemusíme počítat přímo, ale dokážeme to získat z informací, které máme o jednotlivých složkách. V matematice je tento typ vět docela častý. Všimněte si, že jsme v rovnosti museli změnit pořadí relací. Podobný vztah se v matematice vyskytuje pokaždé, když přecházíme k inverzi, čtenář se s tímto jevem mohl setkat u násobení matic.

→ Opakovaný výskyt stejného pravidla naznačuje, že tento jev ve skutečnosti neplyne z nějakého speciálního talentu relací či matic, ale bude za tím nějaký hlubší důvod, související už s tím, že vůbec provádíme operace. Právě hledání skutečných důvodů, tedy prvotních principů, je jedním ze zajímavých úkolů matematiky.

V tomto případě je ono prohazování pořadí konkrétní inkarnací obecného principu, který dokážeme jako větu 8a.9 v kapitole o binárních relacích. Dokonce důkaz bude mít podobnou myšlenku. Z čistě matematického

pohledu by tedy bylo lepší nejprve probrat binární relace a pak teprve ostatní kapitoly, protože bychom se v případech jako tento mohli odvolávat na již dokázaná obecnější tvrzení. Takto je matematika vystavěna z pohledu čistého matematika. Nejprve se dokáže, co se dá, o velice abstraktních, obecných objektech. Pak se přechází k více a více specializovaným pojmům, přičemž už ledacos vyplyne automaticky z obecnějších vět. Šetří se tak práce, navíc obecnější důkazy jsou často (možná překvapivě) jednodušší, protože se v nich pracuje přímo s dotyčnými principy. Další výhodou tohoto pohledu na matematiku je, že je dobře vidět, odkud které chování pochází.

Začátečník by ovšem u takto podané matematiky dlouho nepřežil. Aby pochopil a ocenil abstraktní teorie, potřebuje na to nejprve připravit svůj mozek tím, že se pracuje s objekty sice matematickými, ale přesto bližšími naší zkušenosti. Jinými slovy, jsme i zde věrni zásadám Komenského (od speciálního k obecnému, od jednoduchého ke složitému, od známého k neznámému) a čtenáře k onomu abstraktnímu světu spíš pomalu přibližujeme. Vrcholem našeho snažení bude již zmíněná kapitola o binárních operacích, kde se opravdu ← vyřadíme ve zcela umělých světech.

Potkávat se mohou i jiné operace než skládání a inverze. Jak to dopadne, když se potká skládání a množinové operace? I zde se dají vymyslet zajímavá pravidla, která se také nestojí za to učit. Odkážeme proto na cvičení 5a.13. Některé jeho části vyžadují opatrnější zamyslení, určitě si to nenechte ujít.

S 5a.4 Poznámka: Co vlastně matematik dělá, když přemýšlí, zda platí nějaké pravidlo? Vyzkouší si to na konkrétních příkladech. Určitě pomůže, když si člověk dobře rozumí s dotyčnými pojmy, „cítí“ intuitivně, jak věci fungují. Často se i u abstraktních pojmů dají najít vizuální interpretace, které pomohou, u relací bývá oblíbený graf.

Pokud se rozhodnete testovat platnost pravidel na grafech relací, pak je třeba si nejprve ujasnit, jak se vlastně v řeči grafů ukazují rozličné operace. Umíte si třeba představit, jak vznikne graf relace, která je sjednocením dvou relací, tedy grafů? Není samozřejmě nutné nutit se zrovna do grafů, lidé se liší a pro některé bývá příjemnější jiná představa, třeba přímo práce s dvojicemi prvků. Důležité je tomu dobře rozumět.

Při experimentování obvykle člověka nejprve napadají „pěkné“ příklady, třeba když si máte představit reálné číslo, málokoho napadne $\sqrt{\pi}$. To je přirozené, ale má to malý zádrhel, pro pěkné příklady často platí i to, co obecně nefunguje. Když tedy začneme mít pocit, že by nějaké pravidlo mohlo platit, je důležité vyzkoušet jej i na méně příjemných příkladech. V případě relací budeme chtít, aby se v relaci objevily všechny možné situace: Prvky, ze kterých šipky nikam nevedou, naopak body, ze kterých jich vede hodně a tak podobně.

Matematika má výhodu, že experimenty bývají obvykle velmi levné. Není třeba budovat miliardové urychlovače pod kusem Evropy, stačí tužka a papír. Když nějaký nápad přežije tuto experimentální fázi, tak nastane čas na pořádnou matematiku—je třeba najít důkaz.

△

5a.5 Reprezentace relac v potach

V příkladu 5a.b jsme předvedli reprezentaci relace tabulkou. Když si křížky a prázdná pole nahradíme jedničkami a nulami, dostáváme populární matematický objekt—matici. Tu lze snadno uložit v počítači. Abychom ale onu matici mohli vytvořit, museli jsme se nejprve rozhodnout, v jakém pořadí budeme brát prvky množin A a B . Je zjevné, že bez této informace bychom z pouhé matice relací nedokázali zpětně rekonstruovat. Matematicky řečeno, je třeba zvolit očíslování prvků množin A a B a pak se ho držet.

Definice.

Nechť $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ a $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ jsou množiny. Pro relaci R z A do B definujeme **matici relace** $M_R = (m_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ předpisem

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R; \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

Příklad 5a.o (pokračování 5a.b): Vrátime se k naší malé třídě. Pokud zachováme přirozené pořadí studentů

$A = \{E, F, G\}$ a předmětů $B = \{b, c, d, e\}$, pak se diskutovaná relace zachytí maticí $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

△

Příklad 5a.p: Uvažujme relaci R z $A = \{1, 3, 4\}$ do $B = \{2, 3, 4, 5\}$ definovanou předpisem $(a, b) \in R$ právě tehdy, když $a > b$. Rozmyslíme si, že pak dostáváme relaci $R = \{(3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$.

Jestliže si k ní chceme udělat matici, tak si musíme uvědomit, že při tom používáme pořadového čísla prvku v množině. To například znamená, že dvojice $(3, 2)$ je vlastně druhý prvek z A spojený s prvním prvkem z B , takže se to v matici objeví jako 1 na pozici $(2, 1)$. Podobně si rozmyslíme další dvojice a dostáváme $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Je to vlastně lehké, je to jako bychom dělali tabulku, představíme si prvky z A napsané podél levé hrany matice a prvky z B podél horní hrany matice a pak už je to jasné.

△

Je zjevné, že když máme relaci na množině A (tedy z A do A), tak bude její matice čtvercová. V takovém případě je dobrým zvykem používat stejné pořadí prvků v A pro řádky i sloupce (ačkoliv to definice nevyžaduje).

Všimněte si, že hodnota prvku $a_{i,j}$ je přesně rovna logické hodnotě výroku „ $(a_i, b_j) \in R$ “. Je tedy vhodnější nemyslet na tyto matice jako na číselné, ale jako logické.

Definice.

Jako **booleanovské matice** budeme označovat matice, které mají pouze prvky 1 či 0 a chápeme je jako obvyklé logické hodnoty (true/false).

By a **Boolean matrix** we mean a matrix whose elements are only 1 or 0 and these are understood to represent the usual logical values (true/false).

Někteří autoři takovýmto maticím říkají „01-matice“ (zero-one matrix).

Jak mohou matice pomoci při práci s relacemi? Začneme tím, že při pohledu na ně snadno odpovíme na otázku typu: Je každý prvek s někým v relaci? Je nějaký prvek součástí více dvojic v relaci? Další podobné otázky jistě vymyslíte sami.

Matice si také velmi pěkně rozumějí s operacemi, které jsme probrali.

Fakt 5a.6.

Nechť A, B jsou konečné množiny s pevně zvoleným pořadím prvků. Uvažujme relaci R z A do B s reprezentující maticí M_R .

(i) Relace R^{-1} je reprezentovaná transponovanou maticí M_R^T .

(ii) Relace \bar{R} je reprezentovaná maticí s prvky $m_{\bar{R},ij} = 1 - m_{R,ij}$.

Důkaz (rutinní): (i): Předpokládejme, že $|A| = m$ a $|B| = n$, takže M_R je matice $m \times n$. Relace R^{-1} jde z B do A , proto bude mít její matice rozměr $n \times m$, což M_R^T má. Teď ukážeme shodnost prvků matic.

Protože matice M_R^T a $M_{R^{-1}}$ obsahují pouze jedničky a nuly, tak stačí dokázat, že se shodují jedničky, a nuly už budou automaticky také souhlasit. Takže:

$$m_{R^{-1},ij} = 1 \iff (b_i, a_j) \in R^{-1} \iff (a_j, b_i) \in R \iff m_{R,ji} = 1.$$

Důkaz (ii) je snadný a necháme jej jako cvičení 5a.15. □

Prvky matice $M_{\bar{R}}$ jsou vlastně logickými negacemi prvků z matice M_R . Nabízí se zavést značení $\neg M$, což by byla operace, která zneguje všechny prvky M . Není to ale zvykem. Pro další základní logické operace už se to dělává.

Definice.

Nechť M, N, P jsou Booleanovské matice typu $m \times n$.

Řekneme, že P je **join** matic M a N , značeno $P = M \vee N$, jestliže $p_{ij} = m_{ij} \vee n_{ij}$ pro všechna i, j .

Řekneme, že P je **meet** matic M a N , značeno $P = M \wedge N$, jestliže $p_{ij} = m_{ij} \wedge n_{ij}$ pro všechna i, j .

Není těžké ukázat, že se tyto operace chovají tak dobře, jak bychom si mohli přát a jak jsme zvyklí třeba z běžných algebraických operací. Matematicky řečeno, operace jsou komutativní a asociativní a spojuje je distributivní zákon:

- $M \vee N = N \vee M$, $M \wedge N = N \wedge M$;
- $(M \vee N) \vee P = M \vee (N \vee P)$, $(M \wedge N) \wedge P = M \wedge (N \wedge P)$;
- $M \wedge (N \vee P) = (M \wedge N) \vee (M \wedge P)$, $M \vee (N \wedge P) = (M \vee N) \wedge (M \vee P)$.

Databázové systémy (třeba i SAP) mívají tyto operace implementovány.

Fakt 5a.7.

Nechť A, B jsou konečné množiny. Nechť R_1, R_2 jsou relace z A do B s maticemi M_1, M_2 . Pak $M_1 \wedge M_2$ je matice relace $R_1 \cap R_2$ a $M_1 \vee M_2$ je matice relace $R_1 \cup R_2$.

Důkaz je velmi snadný. Zbývá nám skládání relací, na to potřebujeme ještě jednu operaci.

Definice.

Nechť M je Booleanovská matice typu $m \times k$ a N je Booleanovská matice typu $k \times n$. Definujeme **Booleanovský součin (Boolean product)** těchto matic jako matici $P = M \odot N$ typu $m \times n$ danou

$$p_{ij} = (m_{i1} \wedge n_{1j}) \vee (m_{i2} \wedge n_{2j}) \vee \dots \vee (m_{ik} \wedge n_{kj}).$$

Všimněte si, že je to vlastně stejný vzorec jako pro běžné maticové násobení, jen se místo násobení dala konjunkce a místo sčítání disjunkce.

Věta 5a.8.

Nechť A, B, C jsou konečné množiny s pevně zvoleným pořadím prvků. Nechť R je relace z A do B s maticí M_R a S je relace z B do C s maticí M_S . Pak $M_R \odot M_S$ je matice relace $S \circ R$.

Důkaz (z povinnosti): Předpokládejme, že $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, \dots, b_k\}$, $C = \{c_1, \dots, c_n\}$. Pak M_R je matice $m \times k$ a M_S je matice $k \times n$, proto má smysl je násobit v pořadí $M_R \odot M_S$. Dále máme $m_{R,il} = 1$ jestliže $a_i R b_l$ a $m_{S,lj} = 1$ jestliže $b_l S c_j$.

Ukážeme, že $M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$. Protože jde o Booleanovské matice, stačí ukázat, že obě matice mají 1 na stejných místech.

Vezměme prvek m_{ij} matice $M_R \odot M_S$. Tento prvek je 1 právě tehdy, jestliže je

$$(m_{R,i1} \wedge m_{S,1j}) \vee (m_{R,i2} \wedge m_{S,2j}) \vee \dots \vee (m_{R,ik} \wedge m_{S,kj}) = 1.$$

Jde o logickou disjunci mnoha členů, ta je rovna jedné právě tehdy, když existuje $l \in \{1, \dots, k\}$ takové, že $m_{R,il} \wedge m_{S,lj} = 1$. To je podle definice těchto matic právě tehdy, pokud $\exists b_l \in B: (a_i R b_l \wedge b_l S c_j)$. Toto zase nastane právě tehdy, pokud $(a_i, c_j) \in S \circ R$, což je právě tehdy, pokud $m_{S \circ R,ij} = 1$. Rovnost matic je dokázána. \square

Booleanovský součin je tedy ta správná operace. Má všechny vlastnosti jako běžné maticové násobení:

- $(M \odot N) \odot P = M \odot (N \odot P)$;
- $M \odot (N \wedge P) = (M \odot N) \wedge (M \odot P)$ a $M \odot (N \vee P) = (M \odot N) \vee (M \odot P)$;
- není obecně komutativní.

Dokonce má i jednotkový prvek, jmenovitě standardní jednotkovou $n \times n$ matici $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Platí tedy následující:

- Jestliže je M nějaká Booleanovská matice typu $m \times n$, pak $M \odot E_n = E_m \odot M = M$.

Z pohledu matematiky tedy do sebe všechno krásně zapadá. Z pohledu praktického už to tak úžasné není. Jeden problém je v tom, že zejména Booleanovský součin je výpočetně náročná operace, u matic $n \times n$ je potřeba udělat řádově n^3 logických operací.

Další problém je v tom, že takovýto způsob ukládání relací nemusí být nejekonomičtější.

Příklad 5a.q: Nechť A je množina všech současných Pražáků, řekněme, že jich je 10^6 . Pro $a, b \in A$ definujeme $a R b$ jestliže je b (biologický) rodič a .

Pokud bychom chtěli tuto relaci uložit v podobě matice, potřebovali bychom schovat $10^6 \times 10^6 = 10^{12}$ dat. Ve skutečnosti ale tato relace obsahuje nejvýše 2×10^6 dvojic, pravděpodobně i méně vzhledem k tomu, že u spousty lidí jsou rodiče mrtví či mimo Prahu.

\triangle

Pokud má matice relativně málo jedniček, tak řekneme, že je „řídká“. Řídké matice se objevují v mnoha aplikacích a obvykle pro ně hledáme specializované nástroje, protože ty standardní vycházejí výrazně zbytečně pracně. V případě relací se nabízí ukládat je jinak, třeba pomocí spojového seznamu. Tyto alternativní způsoby zase mívají nevýhodu v tom, že se u nich komplikovaněji implementují rozličné operace. Další detaily necháme odborníkům na databáze.

5a.9 Skládání více relací, mocniny

V příkladě ze školy 5a.m jsme skládali relaci, spojující studenty a kursy, s relací spojující kursy a vyučující. Neměl by být problém na to navázat ještě třetí relaci spojující učitele a umístění jejich komnat, výsledkem by byla relace ukazující, kam má který student chodit za svými vyučujícími. V principu není problém navázat libovolný počet relací, ale nemáme na to definici. Je načase to napravit, nabízí se v zásadě dvě možnosti. Jedna je přímo zachytit myšlenku zkracování delších řetězců, ale je zvykem preferovat jiný přístup.

My totiž vlastně nějaký nový skládací princip nepotřebujeme. Pokud nám navazují tři relace, můžeme zkusit předstírat, že jsou dvě, na to máme v matematice oblíbený nástroj zvaný závorky. K vyhodnocení výrazu $T \circ (S \circ R)$ je třeba nejprve spočítat $S \circ R$, což umíme, a pak se tato výsledná relace skládá s relací T , tedy zase jde o skládání dvou relací.

Podobně v případě čtyř relací můžeme zkusit například $(U \circ T) \circ (S \circ R)$ a opět to lze postupně spočítat čistě pomocí definice skládání pro dvě relace. Zrovna tohle ale není perspektivní, my budeme chtít obecný přístup a tam je lepší závorkování $U \circ (T \circ (S \circ R))$, protože teď je jasné, jak se bude závorkovat třeba sedm skládaných relací.

Ovšem tohle zase není vždy nejlepší z hlediska praktického. Bylo by skvělé, kdyby bylo vlastně jedno, jak se závorkuje. Naštěstí je tomu tak, ukážeme, že skládání jako operace je „asociativní“.

Fakt 5a.10.

Nechť R je relace z nějaké množiny A do nějaké množiny B , S je relace z B do nějaké množiny C a T je relace z C do nějaké množiny D . Pak $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

Důkaz (rutinní): 1) Dokážeme, že $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$.

Uvažujme $(a, d) \in (T \circ S) \circ R$. Podle definice to znamená, že $\exists b \in B: aRb$ a $(b, d) \in T \circ S$. Z toho druhého pak máme, že $\exists c \in C: bSc$ a cTd . Jsme tedy v situaci, kdy máme prvky $b \in B$, $c \in C$ a trojkrok $aRbScTd$.

Z dvojice aRb a bSc vyplývá, že $(a, c) \in S \circ R$, spolu s $(c, d) \in T$ dostaneme $(a, d) \in T \circ (S \circ R)$.

2) Opačnou inkluzi dokážeme obdobně. □

Jsme připraveni k obecné definici, vhodným jazykem je zde indukce.

Definice 5a.11.

Nechť $n \geq 3$, uvažujme množiny A_0, A_1, \dots, A_n . Pro $i = 1, \dots, n$ nechť R_i je relace z A_{i-1} do A_i .

Pak definujeme skládání $R_n \circ R_{n-1} \circ \dots \circ R_2 \circ R_1$ předpisem $R_n \circ (R_{n-1} \circ \dots \circ R_2 \circ R_1)$.

Například skládání čtyř relací je podle definice dáno takto: $U \circ (T \circ S \circ R)$. Skládají se tam dvě relace, U a $T \circ S \circ R$, takže potřebujeme zjistit, co je zač ta relace $T \circ S \circ R$. To nám zase ukáže definice: $T \circ S \circ R = T \circ (S \circ R)$. Po dosazení dostáváme, že skládání čtyř relací je vlastně $U \circ (T \circ (S \circ R))$, přesně jak jsme zamýšleli.

Opakovaným používáním faktu 5a.10 pak snadno ukážeme, že se dá přejít na spousty jiných závorkování, třeba $(U \circ T) \circ (S \circ R)$ nebo $U \circ ((T \circ S) \circ R)$, a dostáváme vždy totéž. Na konkrétním závorkování tedy nezáleží, což naznačuje i oficiální značení $U \circ T \circ S \circ R$. Je to podobné jako u násobení, tam také na pozici závorek nezáleží, takže píšeme třeba $3 \cdot 5 \cdot 13$ a je nám jedno, v jakém pořadí si to kdo vynásobí.

Možná teď čtenáře napadlo, že sčítání a násobení má ještě jednu vlastnost, jmenovitě komutativitu, například $x + y = y + x$. U skládání relací něco takového rozhodně nelze očekávat. Abychom mohli relace skládat, musí na sebe navazovat příslušné množiny: $A \xrightarrow{R} B \xrightarrow{S} C$. Když se na tyto relace podíváme v opačném pořadí, vidíme $B \xrightarrow{S} C$, $A \xrightarrow{R} B$. Protože obecně nelze zaručit, že $A = C$, tak nelze jednotlivé kroky ani navázat, tudíž skládání $R \circ S$ ani nemá smysl. Může se stát, že náhodou platí $A = C$. Pak lze složenou relaci $R \circ S$ vytvořit, ale obecně nemusí být stejná jako $S \circ R$. U skládání tedy komutativitu neřešíme.

Vraťme se ke skládání více relací. Matematickou indukci se snadno ukáže, že vícenásobnému skládání odpovídá Booleanovské násobení příslušných matic relací, i to splňuje asociativní zákon, takže není problém je spolu takto násobit.

Jak taková složenina n relací vypadá? Ukážeme, že přesně tak, jak bychom chtěli, tedy její dvojice vzniknou „sklapnutím“ n -kroků.

Lemma 5a.12. (o řetízích)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, uvažujme množiny A_0, A_1, \dots, A_n . Pro $i = 1, \dots, n$ nechť R_i je relace z A_{i-1} do A_i .

Dvojice $(a, c) \in A_0 \times A_n$ je v relaci $R_n \circ \dots \circ R_1$ právě tehdy, když pro $i = 0, 1, \dots, n$ existují $b_i \in A_i$ takové, že $b_0 = a$, $b_n = c$ a pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $(b_{i-1}, b_i) \in R_i$.

Když prvky b_i splňují $(b_{i-1}, b_i) \in R_i$, tak vlastně máme n -krok $b_0 R_1 b_1 R_2 \dots b_{n-1} R_n b_n$. Takovéto posloupnosti prvků $\{b_i : i = 0, \dots, n\}$ pak budeme v důkazu, který následuje, říkat „řetízek délky n z b_0 do b_n “.

Důkaz: Důkaz povedeme indukcí.

(0) Případ $n = 2$: Dvojice (a, c) leží v $R_2 \circ R_1$ podle definice právě tehdy, pokud existuje $b \in A_1$ splňující $(a, b) \in R_1$ a $(b, c) \in R_2$. Tento výrok ovšem popisuje řetízek délky 2 z a do b .

(1) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Předpokládejme, že platí tvrzení, že pro libovolných n relací je $R_n \circ \dots \circ R_1$ tvořeno právě dvojicemi pocházejícími z krajních bodů řetízků o délce n . Potřebujeme ukázat, že obdobné tvrzení platí i pro libovolných $n + 1$ relací.

Uvažujme proto nějaké množiny $A_0, A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ a relace R_1, \dots, R_n, R_{n+1} , přičemž pro každé $i = 1, \dots, n + 1$ je R_i relace z A_{i-1} do A_i . Potřebujeme ukázat, že prvky relace $R_{n+1} \circ R_n \circ \dots \circ R_1$ jsou přesně ty pocházející z řetízků délky $n + 1$.

1) Vezměme nějaké $a \in A_0$, $c \in A_{n+1}$ takové, že $(a, c) \in R_{n+1} \circ R_n \circ \dots \circ R_1$. Podle definice skládání $(a, c) \in R_{n+1} \circ (R_n \circ \dots \circ R_1)$, proto musí existovat prvek $b \in A_n$ takový, že $(b, c) \in R_{n+1}$ a $(a, b) \in R_n \circ \dots \circ R_1$.

Teď aplikujeme indukční předpoklad na dvojici $(a, b) \in R_n \circ \dots \circ R_1$ a dostáváme řetízek délky n z a do b , označme jej b_0, b_1, \dots, b_n . Víme, že $b_0 = a$ a $b_n = b$. Když označíme $b_{n+1} = c$, tak získáme prvky $b_0, b_1, \dots, b_n, b_{n+1}$ a snadno ověříme, že jde o řetízek délky $n + 1$ z a do c . Ukázali jsme, že každý prvek z $R_{n+1} \circ \dots \circ R_1$ lze získat pomocí nějakého příslušného řetízku.

2) Nyní musíme naopak ukázat, že všechny prvky získané jako krajní body řetízků délky $n + 1$ tvoří dvojice z $R_{n+1} \circ R_n \circ \dots \circ R_1$.

Vezměme nějaký řetízek $b_0, b_1, \dots, b_n, b_{n+1}$ délky $n + 1$. Snadno se ověří, že prvky b_0, b_1, \dots, b_n pak nutně tvoří řetízek délky n z $b_0 = a$ do b_n . Podle indukčního předpokladu proto musí dvojice krajních bodů (a, b_n) ležet v $R_n \circ \dots \circ R_1$. Podmínka řetízku také říká, že $(b_n, c) \in R_{n+1}$, podle definice skládání dvou relací proto $(a, c) \in R_{n+1} \circ (R_n \circ \dots \circ R_1)$. To ale znamená, že $(a, c) \in R_{n+1} \circ \dots \circ R_1$, přesně jak jsme potřebovali. \square

Charakterizace skládání relací pomocí řetízků se nám bude v následujících částech opakovaně hodit. Když se dohodneme, že výraz $R_n \circ \dots \circ R_1$ má pro $n = 1$ hodnotu R_1 , tak lemma platí i pro $n = 1$, protože řetízky délky 1 jsou právě dvojice b_0, b_1 splňující $(b_0, b_1) \in R_1$.

Velice často pracujeme s relací na množině A , tedy s relací z A do A . Tu je pak možné libovolně napojovat za sebe: $A \xrightarrow{R} A \xrightarrow{R} \dots \xrightarrow{R} A \xrightarrow{R} A$. Zapsalo by se to $R \circ R \circ \dots \circ R$, inspirování násobením tomu říkáme mocnina.

Definice.

Nechť R je relace na nějaké množině A . Pak definujeme její **mocninu** rekurzivně jako

(0) $R^1 = R$;

(1) $R^{n+1} = R \circ R^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Let R be a relation on some set A . We define **powers** of R recursively by $R^1 = R$ and $R^{n+1} = R \circ R^n$ for $n \in \mathbb{N}$.

Protože je to jen speciální případ skládání více relací, platí i zde naše úvahy o asociativitě a Lemma o řetízích. Dá se také indukci zavést Booleanovská mocnina matice předpisem $M^{[1]} = M$ a $M^{[n+1]} = M \odot M^{[n]}$ pro $n \in \mathbb{N}$, načež dostaneme $M_{R^n} = M_R^{[n]}$.

Příklad 5a.r: Vraťme se k relaci na množině A všech lidí danou jako aRb jestliže je b rodič a . Co je R^2 ?

Aby $(a, c) \in R^2$, musí existovat člověk $b \in A$ takový, že aRb a bRc , tedy b je rodič a a c je rodič b . Vidíme, že R^2 je relace, která spojuje vnu(č)ky a s jejich dědy a babičkami c . Obdobně si rozmyslíme, že R^3 spojuje pravnu(č)ky s prarodiči atd.

\triangle

Příklad 5a.s: Uvažujme množinu A všech autobusových zastávek v Opavě a relace R nám říká, kam se dostaneme přímým spojem. Přesně, aRb jestliže existuje linka, která staví nejprve v a a někdy poté v b . Pak nám R^2 říká, kam se dostaneme s přesně jedním přestupem, R^3 nám říká, kam se dostaneme s přesně dvěma přestupy, a tak dále. Když to dáme všechno dohromady, tak vidíme, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ je relace, která říká, odkud kam se nějakým způsobem dostaneme autobusem.

△

Relace udávající všechna možná spojení bývá v některých aplikacích velmi užitečná. Studentům computer science asi bude bližší příklad, kdy relace R popisuje přímé spojení mezi počítači. Mocnina R^n pak popisuje propojení počítačů přes $n - 1$ přestupních routerů a relace $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ udává, které počítače jsou spolu nějakým způsobem propojeny. Tím je inspirováno názvosloví.

Definice.

Nechť R je relace na nějaké množině A . Relace $R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ se nazývá **connectivity relation** relace R .

Dobrá otázka samozřejmě je, jak takovou relaci najít v praxi, kde jsou nekonečna trochu problém. Dá se ukázat, že pokud má množina A m prvků, pak se dá libovolný řetězec (viz Lemma o řetězcích) zkrátit tak, aby nebyl delší než m . To znamená, že dostaneme $R^* = \bigcup_{n=1}^m R^n$. Pokud bychom toto chtěli počítat přímo, například přes reprezentující matice (viz výše), vyžadovalo by to hrůzných $2m^3(m - 1)$ operací. Existuje algoritmus, který to zvládne za $2m^3$ operací, což je pořád ještě docela dost, ale o řád lepší než přímý útok. Tím už se ale dostáváme nebezpečně blízko k algoritmizaci, tak to vysvětlování necháme odborníkům.

Co se od takové mocniny R^n dá čekat? V zásadě cokoliv. Všimněte si například, že nikde není zaručeno, že v $R \circ R$ zůstanou původní dvojice z R . Z prvků $(a, b) \in R$ se do $R \circ R$ dostanou jen ty, u kterých lze krok $a \mapsto b$ udělat i přes prostředníka $aRxRb$. Klidně se může stát, že začneme s relativně bohatou relací, ale po umocnění už zbyde velice málo.

Jednoduchý extrémní příklad: Uvažujme relaci R na množině $A = \{1, 2, 3\}$ danou jako $R = \{(1, 2), (3, 2)\}$. Pak nelze vytvořit žádný navazující řetězec $aRbRc$, takže $R^2 = \emptyset$.

Je ovšem také možný jev přesně opačný: Začneme s relací, párkrát umocníme a dostaneme maximální možnou relaci $A \times A$, kdy je každý s každým v relaci. Někdy se stane, že se výsledek s každou mocninou změní, jindy zase po určité mocnině již k ničemu novému nedojdeme a všechny další mocniny vypadají stejně (viz cvičení 5a.14). Jsou dokonce relace, které se umocňováním vůbec nemění, viz například věta 5c.3.

Velikost mocniny tedy v jistém smyslu říká, jak dobře na sebe dvojice v R navazují. Někdy hodně napoví už první skládání.

Fakt 5a.13.

Nechť R je relace na nějaké množině A . Jestliže $R^2 \subseteq R$, pak $R^n \subseteq R$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz (poučný): Předpokládejme, že platí $R^2 \subseteq R$. Důkaz tvrzení „ $\forall n \in \mathbb{N}: R^n \subseteq R$ “ provedeme indukcí.

(0) Pro $n = 1$ máme zkoumat inkluzi $R \subseteq R$, ta evidentně platí.

(1) Uvažujme libovolné $n \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že $R^n \subseteq R$. Chceme dokázat, že $R^{n+1} \subseteq R$.

Nechť $(a, b) \in R^{n+1}$. Protože $R^{n+1} = R \circ R^n$, musí existovat $x \in A$ takové, že $(a, x) \in R^n$ a $(x, b) \in R$. Podle indukčního předpokladu ovšem také $(a, x) \in R$, takže jak (a, x) , tak (x, b) leží v R . Proto $(a, b) \in R^2$, tedy podle předpokladu tvrzení také $(a, b) \in R$. □

Zajímavou roli zde hrají smyčky, viz cvičení 5a.12

Cvičení

Cvičení 5a.1 (rutinní): Uvažujme relace na množině $A = \{0, 2, 4, 6\}$ definované pro $a, b \in A$ takto:

(i) aR_0b jestliže $a < b$; (ii) aR_1b jestliže $a + 10 < 3b$; (iii) aR_2b jestliže $2a \leq b$.

Pro každou z nich napište danou relaci (tedy jako množinu s výpisem prvků), nakreslete její graf a napište její reprezentující matici. Pak pro každou z nich najděte inverzní relaci. Na závěr najděte $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$ a $R_2 - R_1$.

Cvičení 5a.2 (rutinní, poučné): Uvažujme relaci R z množiny $A = \{1, 7, 8, 10, 20\}$ do množiny $B = \{a, d, s, t\}$ definovanou pro $a \in A$ a $b \in B$ takto: $(a, b) \in R$ jestliže se písmeno b objeví ve slovním vyjádření čísla a .

Napište danou relaci (tedy jako množinu s výpisem prvků) a nakreslete její graf, pak najděte její reprezentující matici a na závěr její inverzní relaci.

Cvičení 5a.3 (rutinní): Uvažujme množinu A studentů a množinu B učitelů určitého ústavu (vzdělávacího). Pro $a \in A$, $b \in B$ definujme relaci R předpisem aRb jestliže a měl učitele b na přednášku a relaci S předpisem aSb jestliže a měl učitele b na cvičení. Interpretujte relace $R \cup S$, $R \cap S$, $R - S$, \overline{R} a $\overline{R \cup S}$.

Cvičení 5a.4 (poučné): Uvažujme relaci R na \mathbb{N} danou pro $a, b \in \mathbb{N}$ předpisem aRb právě tehdy, když existuje $k \in \mathbb{N}_0$ takové, že $b = a^k$.

(i) Najděte všechna $a \in \mathbb{N}$ taková, že $aR64$.

(ii) Najděte všechna $b \in \mathbb{N}$ taková, že $3Rb$.

(iii) Uvažujme relaci S na \mathbb{N} danou pro $a, b \in \mathbb{N}$ předpisem aSb právě tehdy, když existují $k, l \in \mathbb{N}_0$ takové, že $a^l = b^k$. Platí $R = S$?

Cvičení 5a.5 (poučné): Nechť R je relace z množiny A na množinu B . Dokažte, že $(R^{-1})^{-1} = R$.

Cvičení 5a.6 (rutinní): Nechť R, S jsou relace z množiny A do množiny B . Dokažte, že pak

(i) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$; (ii) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$; (iii) $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$.

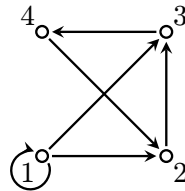
Cvičení 5a.7 (rutinní): Uvažujme dvě relace na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$, relaci $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (3, 4)\}$ a relaci $S = \{(1, 3), (1, 4), (3, 2), (4, 3)\}$.

Najděte relace $S \circ R$ a $R \circ S$.

Cvičení 5a.8 (rutinní):

Uvažujte relaci danou následujícím grafem:

Zapište ji seznamem prvků a najděte R^2 .



Cvičení 5a.9 (dobré): Nechť A je množina lidí. Definujme relaci R na A předpisem aRb jestliže je a rodič b a relaci S předpisem aSb jestliže je a je sourozencem b . Co je $S \circ R$ a $R \circ S$?

Poznámka: Není zvykem považovat sebe za svého vlastního sourozence, tak to tady také nebudeme dělat.

Cvičení 5a.10 (poučné): Uvažujme následující relace na \mathbb{N} : aRb právě tehdy, když $b \geq 3a$ a aSb právě tehdy, když $b > a + 1$.

Najděte $R \circ S$ a $S \circ R$. Jsou si tyto relace rovny?

Cvičení 5a.11 (rutinní, poučné, *dobré): Uvažujme následující relace na \mathbb{R} : R_1 je relace $>$, R_2 je relace \geq , R_3 je relace $=$, R_4 je relace \neq , R_5 je relace $<$, R_6 je relace $|x| = |y|$.

Určete, čemu se rovnají složené relace

- | | | |
|-------------------------|------------------------|---------------------------|
| (i) $R_2 \circ R_1$; | (iv) $R_1 \circ R_4$; | (vii)* $R_4 \circ R_4$; |
| (ii) $R_1 \circ R_2$; | (v) $R_1 \circ R_5$; | (viii)* $R_1 \circ R_6$; |
| (iii) $R_1 \circ R_3$; | (vi) $R_2 \circ R_2$; | (ix)* $R_6 \circ R_1$. |

Cvičení 5a.12 (poučné): Nechť relace R na množině A obsahuje (a, a) pro všechna $a \in A$. Dokažte, že pak pro libovolnou relaci S na A platí $S \subseteq S \circ R$ a $S \subseteq R \circ S$.

Cvičení 5a.13 (poučné, drsné):

a) Nechť S je relace z množiny A do množiny B , necht' R_1, R_2 jsou relace z B do množiny C . Dokažte, že pak

- (i) $(R_1 \cup R_2) \circ S = (R_1 \circ S) \cup (R_2 \circ S)$;
- (ii) $(R_1 \cap R_2) \circ S \subseteq (R_1 \circ S) \cap (R_2 \circ S)$;
- (iii) $(R_1 \circ S) - (R_2 \circ S) \subseteq (R_1 - R_2) \circ S$.

b) Nechť R_1, R_2 jsou relace z množiny A do množiny B , necht' S je relace z B do množiny C . Dokažte, že pak

- (i) $S \circ (R_1 \cup R_2) = (S \circ R_1) \cup (S \circ R_2)$;
- (ii) $S \circ (R_1 \cap R_2) \subseteq (S \circ R_1) \cap (S \circ R_2)$;
- (iii) $(S \circ R_1) - (S \circ R_2) \subseteq S \circ (R_1 - R_2)$.

Cvičení 5a.14 (poučné, *dobré): Pro následující relace R si nejprve rozmyslete, jak vlastně fungují (příklady dvojic z R). Pak určete, jak vypadají R^2 a R^3 , případně R^4 , poté uhadněte R^n a R^* .

(i) $R = \{(k, k) \in \mathbb{Z} : k \in \mathbb{Z}\}$;

(ii) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} : a \leq b\}$;

(iii) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} : b = a + 1\}$;

(iv) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} : a \text{ liché}, b \text{ sudé}\}$;

(v) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} : |b - a| \leq 1\}$;

(vi)* $R = \{(k, k) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(3k, 3k + 1) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(3k + 1, 3k + 2) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(3k + 2, 3k) : k \in \mathbb{Z}\}$.

(vii)* $R = \{(k, k) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(4k, 4k + 1) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(4k + 1, 4k + 2) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(4k + 2, 4k + 3) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(4k + 3, 4k) : k \in \mathbb{Z}\}$.

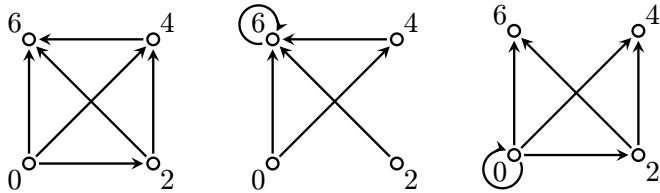
Cvičení 5a.15 (rutinní): Uvažujme relaci R na množině A s reprezentující maticí M_R . Dokažte, že relace \bar{R} je reprezentovaná maticí danou $m_{\bar{R},ij} = 1 - m_{R,ij}$.

Řešení:

5a.1: $R_0 = \{(0, 2), (0, 4), (0, 6), (2, 4), (2, 6), (4, 6)\}$, $R_0^{-1} = \{(2, 0), (4, 0), (6, 0), (4, 2), (6, 2), (6, 4)\}$;

$R_1 = \{(0, 4), (0, 6), (2, 6), (4, 6), (6, 6)\}$, $R_1^{-1} = \{(4, 0), (6, 0), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$;

$R_2 = \{(0, 0), (0, 2), (0, 4), (0, 6), (2, 4), (2, 6)\}$, $R_2^{-1} = \{(0, 0), (2, 0), (4, 0), (6, 0), (4, 2), (6, 2)\}$.



$$M_{R_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{R_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$R_1 \cup R_2 = \{(0, 0), (0, 2), (0, 4), (0, 6), (2, 4), (2, 6), (4, 6), (6, 6)\}$, $R_1 \cap R_2 = \{(0, 4), (0, 6), (2, 6)\}$,

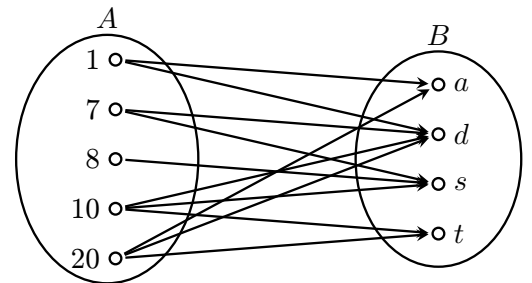
$R_1 - R_2 = \{(4, 6), (6, 6)\}$, $R_2 - R_1 = \{(0, 0), (0, 2), (2, 4)\}$.

5a.2:

$R = \{(1, a), (1, d), (7, d), (7, s), (8, s), (10, d), (10, s), (10, t), (20, a), (20, d), (20, t)\}$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R^{-1} = \{(a, 1), (a, 20), (d, 1), (d, 7), (d, 10), (d, 20), (s, 7), (s, 8), (s, 10), (t, 10), (t, 20)\}$



5a.3: $R \cup S$: a potkal b coby vyučujícího, $R \cap S$: a měl b jako cvičícího i přednášejícího, $R - S$: a měl b jako přednášejícího, ale ne cvičícího, \bar{R} : a neměl b jako přednášejícího, $\overline{R \cup S}$: a vůbec oficiálně neměl b , takže může předstírat, že ho nezná, a nemusí ho zdravít.

5a.4: (i): Hledáme $a \in \mathbb{N}$ takové, že $a^k = 64$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Protože $64 = 2^6$, $64 = 4^3$, $64 = 8^2$ a $64 = 64^1$, řešení jsou $a = 2$, $a = 4$, $a = 8$ a $a = 64$.

(ii) Hledaná b splňují $b = 3^k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Proto množina všech b je $\{3^k : k \in \mathbb{N}\} = \{3, 9, 27, 81, \dots\}$.

(iii) Relace nejsou stejné. Například $4^3 = 8^2$, proto $4S8$, ale nelze vyjádřit $8 = 4^k$ pro $k \in \mathbb{N}$, takže neplatí $4R8$.

Platí nicméně inkluze $R \subseteq S$. Důkaz: $(a, b) \in R \implies \exists k \in \mathbb{N} : b = a^k$. Pak $a^k = b^1$, zde $k \in \mathbb{N}$ a $l = 1 \in \mathbb{N}$, proto $(a, b) \in S$.

5a.5: Necht' $a \in A, b \in B$. $(a, b) \in (R^{-1})^{-1} \iff (b, a) \in R^{-1} \iff (a, b) \in R$.

5a.6: (i): Necht' $a \in A, b \in B$. $(b, a) \in (R \cup S)^{-1} \iff (a, b) \in R \cup S \iff [(a, b) \in R \vee (a, b) \in S] \iff [(b, a) \in R^{-1} \vee (b, a) \in S^{-1}] \iff (b, a) \in R^{-1} \cup S^{-1}$;

(ii): Necht' $a \in A, b \in B$. $(b, a) \in (R \cap S)^{-1} \iff (a, b) \in R \cap S \iff [(a, b) \in R \wedge (a, b) \in S] \iff [(b, a) \in R^{-1} \wedge (b, a) \in S^{-1}] \iff (b, a) \in R^{-1} \cap S^{-1}$;

(iii): Necht' $a \in A, b \in B$. $(b, a) \in (R - S)^{-1} \iff (a, b) \in R - S \iff [(a, b) \in R \wedge (a, b) \notin S] \iff [(b, a) \in R^{-1} \wedge (b, a) \notin S^{-1}] \iff (b, a) \in R^{-1} - S^{-1}$.

5a.7: Najdeme řetězce $1R1S3$, $1R1S4$, $1R4S3$, $2R1S3$, $2R1S4$, $3R4S3$, proto

$S \circ R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3)\}$; najdeme řetězce $1S3R4$, $3S2R1$, $4S3R4$, proto $R \circ S = \{(1, 4), (3, 1), (4, 4)\}$.

5a.8: $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 2)\}$; $R^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 2), (4, 3)\}$.

5a.9: $(a, c) \in R \circ S$ znamená aSb a bRc pro nějakého člověka b . Takže a je strýc nebo teta c .

$(a, c) \in S \circ R$ znamená aRb a bSc pro nějakého člověka b . Takže c je rodič sourozence a . Že by to byl jeho rodič? Často ano, ale zaručit to nejde, jsou různé rodinné konstelace. Takže lepší vyjádření než „ c je rodič sourozence a “ nenajdeme.

5a.10: $(a, c) \in S \circ R \iff aRbSc \iff [b \geq 3a \wedge c > b + 1]$. To dává podmínku $c > 3a + 1$. Opačný směr: pro $c > 3a + 1$ stačí zvolit $b = 3a$ a je $aRbSc$. Závěr: $S \circ R = \{(a, c) : c > 3a + 1\}$.

$(a, c) \in R \circ S \iff aSbRc \iff [b > a + 1 \wedge c \geq 3b]$. To dává podmínku $c > 3(a + 1)$. Opačný směr: pro $c > 3(a + 1)$ stačí zvolit $b = a + 1$ a je $aSbRc$. Závěr: $S \circ R = \{(a, c) : c > 3a + 3\}$.

Protože $3a + 3 > 3a + 1$, máme implikaci $c > 3a + 3 \implies c > 3a + 1$, proto platí $S \circ R \subseteq R \circ S$. Rovny si nebudou, najdeme protipříklad: $(1, 5) \in S \circ R$, ale neplatí $(1, 5) \in R \circ S$.

5a.11: (i): $(x, z) \in R_2 \circ R_1 \implies \exists y: xR_1y \wedge yR_2z \implies \exists y: x > y \wedge y \geq z \implies x > z$. Naopak: Když $x > z$, volíme nějaké y mezi x a z a máme $x > y > z$ neboli xR_1yR_2z , proto $(x, z) \in R_2 \circ R_1$. Závěr: $R_2 \circ R_1 = R_1$;

(ii): $R_1 \circ R_2 = R_1$, důkaz obdobný; (iii): $R_1 \circ R_3 = R_1$, důkaz obdobný; (iv): $(x, z) \in R_1 \circ R_4 \iff \exists y: x \neq y \wedge y > z$, to lze pro libovolnou dvojici (x, z) , proto $R_1 \circ R_4 = \mathbb{R}^2$;

(v): \mathbb{R}^2 ; (vi): R_2 ; (vii): \mathbb{R}^2 ; (viii): $|x| = |y|$ dává $y = x$ nebo $y = -x$, proto $R_1 \circ R_6 = \{(x, z) : x > z \vee -x > z\}$, dokonce lze napsat $R_1 \circ R_6 = \{(x, z) : |x| > z\}$; (ix): $\{(x, z) : x > z \vee x > -z\}$ či $\{(x, z) : x > -|z|\}$.

5a.12: $S \subseteq S \circ R$: Nechť $(a, b) \in S$. Platí $(a, a) \in R$, tedy $aRaSb$, proto $(a, b) \in S \circ R$. $S \subseteq S \circ R$: Nechť $(a, b) \in S$. Platí $(b, b) \in R$, tedy $aSbSb$, proto $(a, b) \in R \circ S$.

5a.13: Nechť $a \in A, c \in C$.

a)(i): 1) $(R_1 \cup R_2) \circ S \subseteq (R_1 \circ S) \cup (R_2 \circ S)$: $(a, c) \in (R_1 \cup R_2) \circ S \implies \exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_1 \cup R_2]$

$\implies \exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge ((b, c) \in R_1 \vee (b, c) \in R_2)]$
 $\implies \exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_1] \vee [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_2]$
 $\implies (\exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_1]) \vee (\exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_2])$
 $\implies [(a, c) \in R_1 \circ S \vee (a, c) \in R_2 \circ S] \implies (a, c) \in (R_1 \circ S) \cup (R_2 \circ S)$;

2) $(R_1 \circ S) \cup (R_2 \circ S) \subseteq (R_1 \cup R_2) \circ S$: $(a, c) \in (R_1 \circ S) \cup (R_2 \circ S) \implies [(a, c) \in (R_1 \circ S) \vee (a, c) \in (R_2 \circ S)]$

$\implies [\exists b_1 \in B: ((a, b_1) \in S \wedge (b_1, c) \in R_1) \vee \exists b_2 \in B: ((a, b_2) \in S \wedge (b_2, c) \in R_2)]$

$\implies \exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_1 \cup R_2] \implies (a, c) \in (R_1 \cup R_2) \circ S$.

a)(ii): $(a, c) \in (R_1 \cap R_2) \circ S \implies \exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_1 \cap R_2]$

$\implies \exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge ((b, c) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2)]$

$\implies \exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_1] \wedge [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_2] \implies$

$(\exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_1]) \wedge (\exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_2]) \implies [(a, c) \in R_1 \circ S \wedge (a, c) \in R_2 \circ S]$

$\implies (a, c) \in (R_1 \circ S) \cap (R_2 \circ S)$;

Poznámka: Rovnost nastat nemusí, třeba pro $S = \{(a, b_1), (a, b_2)\}$, $R_1 = \{(b_1, c)\}$, $R_2 = \{(b_2, c)\}$, kde $b_1 \neq b_2$, dostáváme $(R_1 \cap R_2) \circ S = \emptyset \circ S = \emptyset$, ale $(R_1 \circ S) \cap (R_2 \circ S) = \{(a, c)\}$.

a)(iii): $(R_1 \circ S) - (R_2 \circ S) \subseteq (R_1 - R_2) \circ S$: $(a, c) \in (R_1 \circ S) - (R_2 \circ S)$

$\implies [(a, c) \in (R_1 \circ S) \wedge (a, c) \notin (R_2 \circ S)]$

$\implies [\exists b_1 \in B: ((a, b_1) \in S \wedge (b_1, c) \in R_1) \wedge \neg \exists b_2 \in B: ((a, b_2) \in S \wedge (b_2, c) \in R_2)]$

$\implies \exists b_1 \in B: [(a, b_1) \in S \wedge (b_1, c) \in R_1 \wedge (b_1, c) \notin R_2] \implies \exists b_1 \in B: [(a, b_1) \in S \wedge (b_1, c) \in R_1 - R_2]$

$\implies (a, c) \in (R_1 - R_2) \circ S$.

Poznámka: Rovnost nastat nemusí, třeba pro $S = \{(a, b_1), (a, b_2)\}$, $R_1 = \{(b_1, c)\}$, $R_2 = \{(b_2, c)\}$, kde $b_1 \neq b_2$, dostáváme $(R_1 - R_2) \circ S = \{(a, c)\}$, ale $(R_1 \circ S) \cap (R_2 \circ S) = \{(a, c)\} - \{(a, c)\} = \emptyset$.

b) Důkazy jsou obdobné.

5a.14: (i): Jediné dvojkroky jsou $kRkRk$, proto $R^2 = \{(k, k)\} = R$. Obdobně $R^3 = R$. Odhad: $R^n = R$ a $R^* = R$.

(ii): Dvojkrok $aRbRc$ znamená $a \leq b \leq c$ neboli $a \leq c$, platí i naopak, každé $a \leq c$ lze udělat jako dvojkrok $a \leq a \leq c$. Proto $R^2 = R$. Obdobně $R^3 = R^n = R^* = R$.

(iii): Platí $R = \{(a, a + 1)\}$. Dvojkrok navazuje, tedy musí být $(a, a + 1)$ a $(a + 1, a + 2)$, proto R^2 je množina dvojic $(a, a + 2)$. Formálně: $R^2 = \{(a, b) \in \mathbb{Z} : b = a + 2\}$. Obdobně $R^3 = \{(a, b) \in \mathbb{Z} : b = a + 3\}$. Odhad: $R^n = \{(a, b) \in \mathbb{Z} : b = a + n\}$. Pak $R^* = \{(a, b) \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{N} : b = a + n\}$. Díky diskretním hodnotám v \mathbb{Z} se to dá zapsat $R^* = \{(a, b) \in \mathbb{Z} : b \geq a + 1\} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} : b > a\}$.

(iv): Nelze vyrobit navazující dvojice, proto $R^2 = \emptyset$. Závěr: $R^1 = R$, $R^n = \emptyset$ pro $n \geq 2$. $R^* = R$.

(v): Tři typy dvojic v R : (a, a) , $(a, a - 1)$, $(a, a + 1)$. Devět možností, jak navázat dvojkrok, do R^2 vyjdou dvojice (a, a) , $(a, a \pm 1)$ a $(a, a \pm 2)$. Proto $R^2 = \{(a, b) \in \mathbb{Z} : |b - a| \leq 2\}$, obdobně $R^3 = \{(a, b) \in \mathbb{Z} : |b - a| \leq 3\}$. Odhad: $R^n = \{(a, b) \in \mathbb{Z} : |b - a| \leq n\}$. Proto $R^* = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

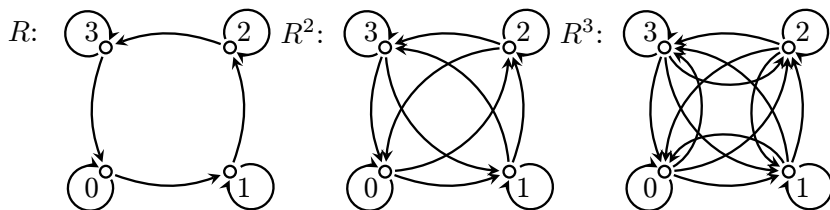
(vi): Úvodní pozorování: R obsahuje smyčky, proto $R \circ R^n$ obsahuje R^n , viz cvičení 5a.12, tedy $R^n \subseteq R^{n+1}$.

Relace propojuje čísla po trojicích. V trojici 0, 1, 2 jsou relace (0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 0), tedy tři smyčky a zacyklená obřížďka neboli cyklus. V trojici 0, 1, 2 jsou relace (3, 3), (4, 4), (5, 5), (3, 4), (4, 5), (5, 3), zase tři smyčky a cyklus. Atd.

Dvojkroky, odtud R^2 : v první trojici 0, 1, 2 opět smyčky, původní cyklus a přibude cyklus s kroky „ob vrchol“ neboli vlastně cyklus v opačném směru (0, 2), (1, 0), (2, 1). Takže vlastně R^2 obsahuje všechny možné šipky v rámci trojice 0, 1, 2, ditto ostatní. $R^2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{3k, 3k+1, 3k+2\} \times \{3k, 3k+1, 3k+2\}$.

Protože jsou trojice zcela propojeny a mezi trojicemi naopak žádné spojnice nejsou, nic nového dalšími trojkroky nevznikne. Proto $R^n = R^2$ pro $n \geq 2$.

(vii): Relace propojuje čísla po čtveřicích. V trojici 0, 1, 2, 3 jsou smyčky a cyklus (0, 1), (1, 2), (2, 3) a (3, 0). Pomocí dvojkroků získáme zase R a ještě k ní přidáme útvar (0, 2), (1, 3), (2, 0), (3, 1), tedy chodí se ob prvek, už se ale nenavazuje, není to cyklus, ale větrník.



Když toto R^2 složíme s R , získáme R^2 a navíc větrník chodící ob dva (0, 3), (1, 0), (2, 1), (3, 2), čímž se trojice zcela propojí a nic dalšího v nich vzniknout nemůže, tedy

$$R^3 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3\} \times \{4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3\} = R^n \text{ pro } n \geq 3.$$

Je zjevné, že pro dané n lze pracovat se skupinami po n číslech založených na dvojicích $(nk, nk+1)$ atd, pak bude platit, že R^2 bude větší než R , R^3 větší než R^2 atd., relace R^{n-1} zcela propojí n -tice a další mocniny už budou rovny R^{n-1} .

5a.15: $m_{\bar{R},ij} = 1 \iff (a_i, a_j) \in \bar{R} \iff (a_i, a_j) \notin R \iff m_{R,ij} = 0$, obdobně $m_{\bar{R},ij} = 0 \iff m_{R,ij} = 1$.

5b. Základní vlastnosti binárních relací

Ted' omezíme pouze na relace na množině A , tedy případ $B = A$. Používají se často a lidé si brzy všimli, že velice ocení, pokud se jejich relace chová tím či oním způsobem. Nejoblíbenějším vlastnostem dali jména, nejčastěji se zkoumají tyto čtyři:

Definice.

Nechť R je relace na množině A .

Řekneme, že R je **reflexivní**, jestliže pro všechna $a \in A$ platí aRa .

Řekneme, že R je **symetrická**, jestliže pro všechna $a, b \in A$ platí $aRb \implies bRa$.

Řekneme, že R je **antisymetrická**, jestliže pro všechna $a, b \in A$ platí $[aRb \wedge bRa] \implies a = b$.

Řekneme, že R je **tranzitivní**, jestliže pro všechna $a, b, c \in A$ platí $[aRb \wedge bRc] \implies aRc$.

V anglické verzi si procvičíme ten druhý zápis relací.

Consider a relation R on a set A .

It is called **reflexive** if $(a, a) \in R$ for all $a \in A$.

It is called **symmetric** if for all $a, b \in A$ we have $(a, b) \in R \implies (b, a) \in R$.

It is called **antisymmetric** if for all $a, b \in A$ we have $[(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R] \implies a = b$.

It is called **transitive** if for all $a, b, c \in A$ we have $[(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R] \implies (a, c) \in R$.

Poznamenejme, že někteří čeští autoři používají namísto „antisymetrie“ termínu „slabá antisymetrie“, pro silnou viz část 5d Další vlastnosti.

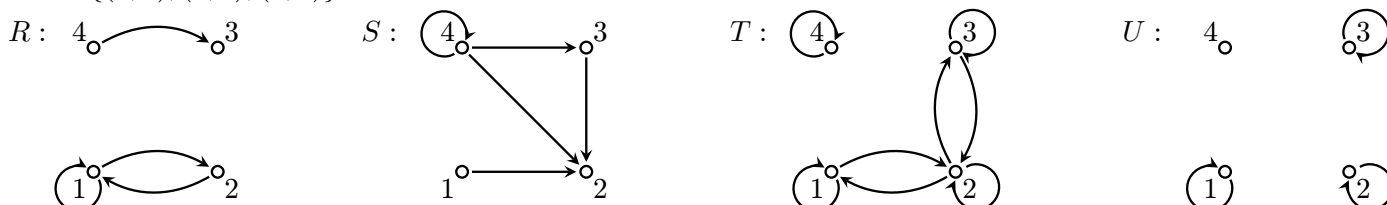
Významu těchto definic nejlépe porozumíme, když se podíváme na několik relací na konečných množinách, které si znázorníme grafy. Uvažujme proto následující tři relace na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\bullet R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (4, 3)\};$$

$$\bullet S = \{(1, 2), (3, 2), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\};$$

$$\bullet T = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\};$$

$$\bullet U = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}.$$



Reflexivita je jasná, aby byla relace reflexivní, musí být každý prvek množiny A v relaci sám se sebou („reflexe“ je odraz, třeba v zrcadle), což snadno ověříme ve výpisu dvojic výše, vyhovuje jen relace T . V grafu to znamená, že pro reflexivitu vyžadujeme smyčky u všech bodů, což opravdu splňuje právě T .

Symetrie znamená podívat se na všechny možné dvojice prvků z A a pro každou z nich ověřit platnost jisté vlastnosti, která má formu implikace. V případech, kdy není splněn její předpoklad, tedy pokud prvky a, b nejsou v spolu relaci, tak implikace automaticky platí a tudíž nemůže symetrii pokazit. To znamená, že je zbytečné takové dvojice zkoumat. Kritické je, co se stane s dvojicemi, kdy $(a, b) \in R$. U těchto dvojic pak potřebujeme, aby vždy byla v R i dvojice v opačném pořadí.

U relace R se tedy budeme ptát třeba na dvojici $a = 1$ a $b = 2$, která splňuje předpoklad $1R2$. Splňuje i závěr, takže zatím je symetrie v pořádku. Ani s dvojicí $a = b = 1$ nejsou potíže, splňuje předpoklad $1R1$ a také závěr $1R1$ (teď jsme ty jedničky prohodili). Smyčky jsou již z podstaty obousměrné, proto je také u symetrie nemusíme zkoumat. Čtenář se už asi těšil na dvojici $a = 4, b = 3$, která splňuje předpoklad $4R3$, ale nespĺňuje závěr $3R4$. Protože prokaždítka v definici symetrie nepřipouští výjimky, tato dvojice se stává protipříkladem na symetrii, relace R symetrická není.

Teď už bychom měli symetrii rozumět, vyžaduje následující: Pokud je v grafu někde šipka (a stačí hlídat šipky mezi různými body, smyčky nás nezajímají), pak tam musí být i šipka v opačném směru. Je to tedy informace „podmíněná“, mimé jiné tedy symetrii nevádí, když někde šipky nejsou vůbec. Pokud bychom chtěli mít jednoduchou (nepodmíněnou) informaci typu reflexivity (všude jsou smyčky), tak musíme přejít k záporu: Symetrie říká, že nikde nejsou pouze jednosměrné šipky.

Teď už bychom měli vědět, jak to dopadne u ostatních relací. Relace S symetrická také není, protože dvojice $a = 1, b = 2$ představuje protipříklad. Naopak relace T symetrická je, ke každé dvojici aTb má i opačnou dvojici bTa .

I relace U je symetrická. Jediné dvojice splňující předpoklad aUb jsou ty smyčky, které automaticky splňují žádanou implikaci. Všimněte si, že U by zůstala symetrickou, i kdybychom umazali ty smyčky, čímž by vznikla relace prázdná, bez dvojic.

Někdy studenti omylem napíší místo implikace podmínku „ $aRb \wedge bRa$ “. To je samozřejmě něco úplně jiného, nutili bychom relaci mít všude obousměrné šipky. Není to ani dobrý kandidát na nějakou zajímavou pátou vlastnost, protože tuto podmínku splňuje jediná relace, jmenovitě $A = R \times R$ (každý s každým).

Antisymetrie má také formu implikace, takže už víme, že nás budou zajímat jen takové dvojice a, b , které splňují aRb a bRa . V relaci R například vidíme dvojici $a = 1, b = 2$, která splňuje aRb a bRa , ale nespĺňuje závěr $a = b$, relace R proto není antisymetrická.

V relaci S je jediná dvojice splňující předpoklad, $a = b = 4$. V tomto případě je ale splněn i závěr implikace $a = b$, implikace je tedy pravdivá. Další dvojice bodů nespĺňují předpoklady, například pro $a = 1, b = 2$ sice platí $1R2$, ale neplatí $2R1$. Ve všech těchto případech tedy implikace platí automaticky. Závěr je, že relace S je antisymetrická.

Tyto příklady ukázaly podstatu antisymetrie: Nevadí jí, když dvojice bodů není propojena vůbec či je spojena jednosměrně, taky jí nevadí smyčky (a ani je nevyžaduje). Chce jediné: V relaci nesmí být obousměrné šipky mezi různými dvojicemi. Je to ostatně pěkně vidět z obměny její definiční podmínky:

- Pokud $a \neq b$, tak nesmí platit $aRb \wedge bRa$.

Pak už je jasné, že relace T není antisymetrická, zatímco relace U antisymetrická je. Zde jde opět o poněkud netypický případ.

Mimoходом, také vám přijde, že ta obměna vyjadřuje podstatu antisymetrie mnohem lépe? Proč se tedy nepoužívá v definici? Protože podmínka z definice se v praxi lépe ověřuje, takže se kdysi matematici rozhodli dát do definice rovnou to, co pak používají. Nabízí se také podoba „pokud $a \neq b$ a aRb , pak nesmí platit bRa “, ale i tato je nešikovnější pro praktické ověřování.

Poznamenejme, že intuitivně antisymetrie zní jako popření symetrie, takže se nabízí také definice typu „pokud je šipka aRb , pak nesmí být šipka bRa “. Není to zas tak špatný nápad, viz asymetrie v části 5d, ale taková definice by vyloučila smyčky. To se v aplikacích příliš nehodí, proto se používá definice, kterou jsme tu uvedli a která smyčky připouští.

To ovšem znamená, že antisymetrie a symetrie **nejsou** doplňkové vlastnosti. Vidíme to výše, U je zároveň symetrická i antisymetrická, tedy vlastnosti se navzájem nevyklučují, nejsou svým opakem. Naopak R není ani symetrická, ani antisymetrická, takže obecně nelze očekávat, že když jedna z těchto vlastností nevyjde, tak už druhá platí.

Mimoходом je zajímavé, že souběh symetrie a antisymetrie je vzácný, viz cvičení 5b.9, zatímco porušení obou vlastností najednou je velice snadné, stačí do relace zařadit jednu šipku dvojitou (obousměrnou) a jednu jednoduchou, čímž se pokazí antisymetrie i symetrie. Pokud bychom vytvářeli relace náhodně, tak právě takovýto případ

vzniká nejčastěji. V praxi ovšem obvykle potkáváme relace vytvářené nějakým předpisem, takže je obvyklé, že platí právě jedna z těchto dvou vlastností. To ve studentech posiluje mylný dojem, že jde o doplňkové vlastnosti.

Tranzitivita také znamená, že ověřujeme platnost implikace, tedy zajímají nás jen situace, kdy nám tři body dávají navazující šipky aRb a bRc . Pak potřebujeme, aby existovala i zkratka aRc .

Jak je na tom relace R ? Na první pohled tam navazující šipky nejsou, ale definice připouští i situace, kdy se některé z bodů a, b, c rovnají. Vidíme tedy navazující dvojici $1R1$ a $1R2$, u které musíme ověřit existenci zkratky. A samozřejmě ji najdeme, je to $1R2$. Formálně, výrok „ $[1R1 \wedge 1R2] \implies 1R2$ “ je pravdivý. Obdobně si rozmyslíme dvojkrok $2R1R1$ a dokonce $1R1R1$, ve všech případech je existence zkratky zjevná.

Z praktického pohledu se při testování tranzitivity nemá smysl zdržovat uvažováním dvojkroků se smyčkami, těmi se implikace nedá porušit.

Je tedy relace R tranzitivní? Nikoliv, ještě tam máme dva možné dvojkroky. Pokud zvolíme $a = 1, b = 2, c = 1$, tak máme splněný předpoklad implikace z definice, $1R2$ a $2R1$, což nás nutí hledat zkratku $1R1$. Je tam, takže zatím v pořádku. Pak tam máme možnost $a = 2, b = 1, c = 2$, v tomto případě je splněn předpoklad $2R1R2$, ale není splněn závěr $2R2$. Dostáváme se tedy k tomu, že relace R není tranzitivní.

Jistě vidíte, že kdybychom doplnili smyčku $2R2$, tak už by výsledná relace tranzitivní byla.

Smysl tranzitivity je tedy v tom, že kdykoliv se v grafu vyskytuje navazující dvojkrok, pak tam musí existovat také zkratka jedním krokem, přičemž musíme být opatrní, abychom něco nevynechali, zejména je třeba pamatovat na kroky tam a zpět. Je zjevné, že při hledání pohledem v houštinovitějším grafu se snadno něco přehlédne, takže tranzitivitu jako jedinou z vlastností nevidíme na první pohled. Ani tranzitivita neřeší, co se děje, pokud dvojkroky nejsou, stejně jako jí nevdají smyčky.

Zatímco v relaci R byly všechny dvojkroky trochu trikové, v relaci S už vidíme dvojkrok tak, jak si je lidé obvykle představují. Navazující trojice $4R3$ a $3R2$ splňuje předpoklad, v tomto případě ovšem platí i závěr $4R2$ a tranzitivita je (zatím) zachráněna. Ještě bychom měli ověřit trojici $a = b = 4, c = 3$ a trojici $a = b = 4, c = 2$, ale už víme, že dvojkroky se smyčkou implikaci splňují. Závěr: S je tranzitivní.

V relaci T se nabízí dvojkroků více. Například trojice bodů $a = 1, b = 2, c = 3$ nabízí splněný předpoklad $1R2$ a $2R3$. V tomto případě ale neplatí $1R3$, čímž jsme našli protipříklad. Relace T není tranzitivní.

Těch protipříkladů je tam hodně, například $3R2R1$ nebo třeba $3R2R3$.

Jak to vypadá s U ? Jediné dvojkroky jsou opakované smyčky, například $a = b = c = 2$, tam už víme, že tranzitivitu nelze porušit. Relace U je tranzitivní.

Teď už bychom měli intuitivně rozumět základním vlastnostem relací a vidět je v grafech (s výjimkou tranzitivity) na první pohled. Příklady také naznačují, že mezi jednotlivými vlastnostmi není žádný vztah, což je pravda, Dokonce i když mícháme více vlastností, tak máme téměř svobodu. Pokud si zvolíme u našich čtyř vlastností, kterou chceme a kterou nechceme, tak (s dvěma výjimkami) existují relace, které se tak chovají, viz cvičení 5b.9 a 5b.10 (to zvlášť doporučujeme). To znamená, že pokud chceme u dané relace rozhodnout, které vlastnosti platí a které ne, tak určujeme všechny čtyři individuálně (ty dva speciální případy se nevyplácí pamatovat).

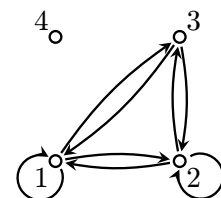
Právě toto je hlavním tématem této části. U dané relace rozhodneme, které vlastnosti jsou a nejsou splněny, své odpovědi také dokážeme. Říkáme tomu „vyšetřování vlastností relace“.

Příklad 5b.a: Uvažujme množinu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a na ní relaci

$$R = \{(a, b) \in A^2 : a^2 + b^2 \leq 13\}.$$

Vyšetříme její vlastnosti. Protože je relace zadána jako množina dvojic, budeme se tohoto zápisu držet.

Hravě si rozmyslíme, které dvojice v této relaci jsou a které ne, zachytíme to v grafu. Obrázek ukazuje, že relace není reflexivní, protože například chybí smyčka $(3, 3)$, viz $3^2 + 3^2 > 13$. Je symetrická a není antisymetrická, zde je protipříkladem třeba dvojice $(1, 2)$ a $(2, 1)$. Co se týče tranzitivity, je třeba procházet dvojkroky. Skoro všechny mají i zkratky, takže bychom si mohli chybně myslet, že relace je tranzitivní, pokud nás nenapadne jeden trikový: v relaci máme dvojice $(3, 1)$ a $(1, 3)$, tedy $a = 3, b = 1, c = 3$, ale neplatí $(3, 3) \in R$. Pro tento dvojkrok tedy v R neexistuje zkratka, proto relace R není tranzitivní.



Dokázali bychom zjistit totéž bez obrázku? Je to otázka velmi dobrá, protože stejným vzorcem je možné definovat relaci i na větší množině čísel, třeba i nekonečné jako \mathbb{Z} nebo \mathbb{R} . Pak už graf nepomůže a musíme umět rozhodnout o platnosti vlastností čistě ze zadání. Vyšetříme tedy vlastnosti znovu, tentokrát čistě podle definice. Vyzkoušíme si i zadání relace v alternativním jazyce:

• Uvažujme relaci R na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$ danou předpisem, že aRb právě tehdy, když $a^2 + b^2 \leq 13$. Jdeme vyšetřovat, vždy vyjdeme z definice vlastnosti a budeme používat značení aRb .

Reflexivita: Máme rozhodnout, zda pro všechna $a \in A$ platí aRa neboli $a^2 + a^2 \leq 13$ neboli $a^2 \leq \frac{13}{2}$.

Toto nevypadá jako podmínka, která platí „vždy“. Na druhou stranu teď máme malou množinu, třeba to vyjde. Vyzkoušíme čísla z A a zjistíme, že ne. Závěr: R není reflexivní.

Důkaz: Protipříklad je třeba $a = 3$, neboť neplatí $3^2 + 3^2 \leq 13$.

Symetrie: Máme ověřit, zda pro všechna $a, b \in A$ platí implikace $aRb \implies bRa$, což v našem konkrétním případě zní $a^2 + b^2 \leq 13 \implies b^2 + a^2 \leq 13$. Na první pohled vidíme, že tyto dvě nerovnosti jsou vlastně stejné, čili toto opravdu platí. Závěr: R je symetrická.

Důkaz: Vezměme libovolné $a, b \in A$. Jestliže aRb , tak $a^2 + b^2 \leq 13$. Pak také $b^2 + a^2 \leq 13$, proto bRa .

Všimněte si, že podtržené části důkazu přesně dávají definici symetrie. Ještě se k tomu vrátíme.

Antisymetrie: Máme ověřit obecnou platnost implikace, která v našem případě vypadá takto: Jestliže $a^2 + b^2 \leq 13$ a $b^2 + a^2 \leq 13$, pak $a = b$.

V zásadě jde o řešení soustavy nerovnic, v tomto případě jde vlastně o nerovnici jedinou, jen napsanou rozdílnými způsoby. Zkušenost nám říká, že pomocí takového odhadu nelze přinutit a, b , aby se rovnaly. To naznačuje, že máme začít přemýšlet nad protipříkladem. Experimenty brzy jeden dodají. Závěr: R není antisymetrická.

Důkaz: Protipříkladem je $a = 1, b = 2$. Platí $1R2$ a $2R1$, ale neplatí $1 = 2$.

Tranzitivita: Máme ověřit, zda pro všechny trojice $a, b, c \in A$ platí implikace, která v našem případě vypadá takto: Je dáno aRb a bRc neboli $a^2 + b^2 \leq 13$ a $b^2 + c^2 \leq 13$. Potřebujeme ukázat, že $a^2 + c^2 \leq 13$, abychom tím dostali aRc . V zásadě je to otázka řešení soustavy dvou nerovnic, což je typ úlohy, na kterou nemáme příliš nástrojů.

Protože potřebujeme získat informaci jen o a a c , nabízí se myšlenka, že bychom zkusili b eliminovat. Z první rovnice získáme odhad $b^2 \leq 13 - a^2$, který bychom rádi „dosadili“ do druhé nerovnice, ale to obecně nelze. Algebra je zde slepá ulička, je načase se zamyslet.

Potřebujeme $a^2 + c^2 \leq 13$, tedy čísla by neměla být moc velká. Podmínka $a^2 + b^2 \leq 13$ může znamenat, že jsou to středně malá čísla, ale také se může stát, že jedno číslo je spíš velké a druhé malé, nemáme zde žádnou kontrolu. Totéž platí o druhé nerovnosti, což nabízí inspiraci, jak hledat protipříklad: co nejvíce zvětšit a a c . Ukáže se, že to jde, takže máme závěr: R není tranzitivní.

Důkaz: Platí $3R1$ a $1R3$, neboť $3^2 + 1^2 = 1^2 + 3^2 \leq 13$, ale neplatí $3^2 + 3^2 \leq 13$, tedy ani $3R3$.

△

Tento příklad byl podrobnější, protože jsme chtěli ukázat, jak při vyšetřování vlastností přemýšlíme. Shrňme si to do několika dobrých rad.

S 5b.1 Jak vyšetřovat vlastnosti

1. Bývá dobré si relaci nejprve „ohmatat“, zejména pokud je komplikovanější. Při jejím zkoumání pomůže, když máme intuitivní představu, jak vlastně relace funguje. Je dobré si vyjasnit, s jakými objekty relace funguje (tedy co je množina A), pak si najít nějaké dvojice, které v relaci jsou, a naopak dvojice, které v relaci nejsou.

2. U relací zadaných vzorcem se osvědčil následující postup pro zkoumání určité vlastnosti.

Nejprve si přepíšeme její obecnou definici do aktuálního znění, tedy místo obecných výrazů typu aRb píšeme konkrétní podmínky z definice R . Když se pak člověk na takový konkrétní prepis podívá, většinou vidí, zda je schopen dokázat jeho pravdivost. Pokud to nevypadá nadějně, je to znamení, že je načase hledat protipříklad.

Někdy se vyplatí rovnou zkusit hledanou vlastnost dokázat. Buď se to povede, pak známe odpověď a máme i důkaz, nebo se důkaz z nějakého důvodu zadrhne, což nás často nasměruje přímo k protipříkladu.

3. Pokud je příklad snadný, vznikne často důkaz již během přemýšlení. Někdy je ale lepší nakonec úvahy pročistit a napsat důkaz znovu načisto. Je třeba zejména pohlídat, že má správnou logickou strukturu a formální náležitosti.

Vyvrácení vlastnosti je snadné, stačí ukázat protipříklad. Důkaz platnosti vlastnosti pak vychází její z definice. Na začátku je vždy obecný kvantifikátor, proto je třeba pracovat s libovolnou volbou prvku. U reflexivity rovnou dokazujeme aRa . U ostatních tří vlastností dokazujeme implikaci, obvykle přímým důkazem. Předpokládáme tedy, že platí určité věci o prvcích, a pomocí toho se snažíme dostat k závěru. U tranzitivity to většinou probíhá tak, že máme dvě rovnosti či nerovnosti s proměnnými a, b, c a my se snažíme eliminovat b .

Když si myslíme, že je důkaz hotov, vyplatí se (alespoň v duchu) udělat následující kontrolu: Pokusíme se vytvořit definici dokazované vlastnosti tím, že podtrhneme vhodně vybrané části vašeho pokusu o důkaz, viz předchozí příklad. Pokud to nejde, je důkaz nejspíše špatně. Pokud to jde, tak je možná chyba ještě jinde, ale alespoň to má správnou strukturu.

Poslední poznámka: Čtenář by měl z našeho zápisu poznat, co jsou naše úvahy a co je výsledný důkaz. Je dobré je výrazně oddělit a vůbec čtenáři pomci v navigaci naším textem.

△

Vyzkoušíme si to na bohatěji komentovaném příkladě.

Příklad 5b.b: Necht $A = \mathbb{N}$. Uvažujme relaci R na A danou následující podmínkou: $(a, b) \in R$ právě tehdy, když existuje $k \in \mathbb{N}$ splňující $b = a^k$. Jaké má vlastnosti?

Nejprve se ujistíme, že definici dobře rozumíme. Jak jsme již diskutovali v příkladě 5a.h, to k je individuální pro každý testovací pár (a, b) . Takže třeba víme, že $(3, 9) \in R$, protože existuje $k = 2 \in \mathbb{N}$ splňující $9 = 3^2$, a také $(2, 16) \in R$, to má zase své $k = 4 \in \mathbb{N}$ splňující $16 = 2^4$. Naopak $(4, 2) \notin R$, protože nenajdeme $k \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo $2 = 4^k$ (sice najdeme $k = \frac{1}{2}$, ale to není z \mathbb{N}). Relaci už rozumíme, podívejme se na vlastnosti.

R: Uvažujme nějaké $a \in \mathbb{N}$. Aby byla relace reflexivní, muselo by platit $(a, a) \in R$, tedy $a = a^k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. To umíme zařídit.

Odpověď: R je reflexivní, protože pro každé $a \in \mathbb{N}$ existuje $k = 1 \in \mathbb{N}$ splňující $a = a^1$, tedy $(a, a) \in R$.

S: Uvažujme nějaká čísla $a, b \in \mathbb{N}$. Symetrie vyžaduje, aby v případě, že splňují $(a, b) \in R$, platilo nutně i $(b, a) \in R$.

Podmínka $(a, b) \in R$ znamená, že $b = a^k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Potřebujeme z toho nějakým způsobem odvodit, že pak $a = b^l$ pro nějaké $l \in \mathbb{N}$ (musíme zvolit jiné písmeno, protože dvojice (b, a) má právo na svůj vlastní exponent). Z dané rovnice $b = a^k$ hravě odvodíme $a = b^{1/k}$, takže bychom museli mít $l = \frac{1}{k}$, ale pak nevypadá nadějně, že by platilo $l \in \mathbb{N}$. To nás inspiruje k nalezení protipříkladu.

Odpověď: S není symetrická, protože dvojice $a = 2, b = 4$ splňuje $4 = 2^2$ neboli $(2, 4) \in R$, ale nespĺňuje $(4, 2) \in R$.

A: Antisymetrie vyžaduje, aby pro $a, b \in \mathbb{N}$ platilo, že když $b = a^k$ a $a = b^l$ pro nějaká $k, l \in \mathbb{N}$, pak nutně $a = b$. Všimněte si, že jsme při překládání definice do naší situace každé z dvojic $(a, b) \in R, (b, a) \in R$ dali možnost mít svůj vlastní exponent. Pokud bychom v obou případech použili k , tak by byl důkaz špatně, protože by nevyčerpal všechny možné případy. Zpět k otázce, je splněna? Poslechneme radu a rovnou začneme psát důkaz, třeba to vyjde.

Vezmeme libovolné $a, b \in \mathbb{N}$ takové, že $(a, b) \in R$ a $(b, a) \in R$. Pak pro nějaká $k, l \in \mathbb{N}$ platí $b = a^k$ a $a = b^l$. Dosazením první rovnice do druhé dostaneme $a = a^{kl}$. Toto je pro $a \in \mathbb{N}$ možné jedině tehdy, když $kl = 1$. Toto je zase pro $k, l \in \mathbb{N}$ možné jedině tehdy, když $k = l = 1$. Dostáváme proto $b = a^1 = a$. Ukázali jsme, že R je antisymetrická.

Poznámka: Pokud nám důkaz vznikne za pochodu, obvykle zahrnuje i rozličné pomocné úvahy. Bývá dobré pak pro čtenáře zvýraznit, která místa tvoří důkaz samotný.

Poznámka: Šel by i jiný důkaz. Můžeme si všimnout, že pro $a, k \in \mathbb{N}$ platí $a^k \geq a$. Pro dvojici $(a, b) \in R$ proto platí $b \geq a$. Z předpokladů $[(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R]$ tak dostáváme $[b \geq a \wedge a \geq b]$, odkud hned máme $a = b$.

T: Mějme $a, b, c \in \mathbb{N}$. Tranzitivita vyžaduje, aby v případě, že $b = a^k$ a $c = b^l$ pro nějaká $k, l \in \mathbb{N}$, také platilo, že $c = a^m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$.

Tradiční přístup je eliminovat z daných rovnic b , což se snadno povede dosazením první rovnice do druhé. Dostáváme $c = (a^k)^l$, což vypadá téměř jako to, co chceme dokázat.

Odpověď: R je tranzitivní: Vezmeme libovolné $a, b, c \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že $(a, b) \in R$ a $(b, c) \in R$. To znamená, že existují $k, l \in \mathbb{N}$ splňující $b = a^k$ a $c = b^l$. Dosazením získáme $c = a^{kl}$ a také platí $kl \in \mathbb{N}$, proto dle definice $(a, c) \in R$.

△

S 5b.2 Poznámka: Nejčastější chyby v důkazech jsou vynechaný kvantifikátor na začátku důkazu či špatný směr úvahy. Problém nastává zejména v situaci, kdy student zkouší ušetřit čas a místo slov používá symboly. Obzvláště svůdné je nahradit slova jako „protože“ implikací v situaci, kdy se zpětně dovysvětluje. Jako typický příklad uvedeme chybný důkaz reflexivity pro relaci R danou na \mathbb{Z} předpisem $aRb \iff a^2 = b^2$. Česky lze říct „pro všechna $a \in A$ platí aRa , protože $a^2 = a^2$ “. Problém nastane, když to student napíše takto:

$$\bullet \forall a \in A: aRa \implies a^2 = a^2.$$

Problém je v toku informací, implikace jde zleva doprava. V té úvaze tedy rovnou tvrdíme, že platí aRa (aniž bychom to nějak odůvodnili), a z toho pak odvodíme, že $a^2 = a^2$. Tu českou větu by vystihl obrázek „ $aRa \iff a^2 = a^2$ “, ale „zpětná implikace“ neexistuje, v logice je zvykem psát a číst zleva doprava. Je proto nutné jednotlivé složky přeorganizovat, správný důkaz vypadá takto:

$$\bullet \forall a \in A: a^2 = a^2 \implies aRa.$$

Teď už jdeme od známého k tomu, co chceme dokázat. Když si nejsme jisti, jak úvahu správně zachytit, bývá nejjistější se obětovat a použít nějaké vhodné české slovo (jelikož, protože, anžto, ...).

Tento typ chyby (špatný tok informací) bývá u důkazových začátečníků obvyklý a to nejen u relací, chvíli trvá, než se člověk naučí nový jazyk. Dá se říct, že tato kapitola o vlastnostech je pro nás jen další záminka pro nácvik sestavování důkazů.

△

Podíváme se teď na některé relace, které už vlastně známe. Budou to příklady vysoce poučné, protože je využijeme k zajímavých odbočkám. Řešení i důkazy budeme postupně psát stále stručnější, u důkazů platnosti vlastností budeme stále podtrhávat části, z nichž vznikne definice.

Příklad 5b.c: Uvažujme na množině $A = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$ relaci R danou podmínkou aRb právě tehdy, když a dělí b .

protože jde o známý vztah, mohli bychom tuto relaci uvést i méně formálně, třeba takto: „Uvažujme relaci $a|b$ na množině $A = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$.“

Nyní vyšetříme vlastnosti. Vždy ukážeme úvahu a pak napíšeme oficiální odpověď.

R: Platí, že a dělí a pro každé $a \in A$? Ano.

R je reflexivní: Pro všechna $n \in A$ platí $a|a$, viz fakt 2a.1, tedy aRa .

S: Platí obecně, že když a dělí b , tak také b dělí a ? Určitě ne. My ale máme malou množinu, musíme být opatrní. Nakonec protipříklad najdeme.

Dokážeme, že R není symetrická: Dvojice $a = 1, b = 2$ je protipříkladem, neboť $1|2$, ale neplatí $2|1$.

A: Platí obecně, že když a dělí b a b dělí a , tak $a = b$? Věta 2a.6 to potvrzuje jen pro nezáporná čísla, což je podezřelé.

Dokážeme, že R není antisymetrická: Dvojice $a = 1, b = -1$ je protipříkladem, neboť $1|(-1)$ a $(-1)|1$, ale neplatí $-1 = 1$.

T: Platí obecně, že když a dělí b a b dělí c , tak a dělí c ? Už víme, že ano.

Dokážeme, že R je tranzitivní: Nechť $a, b, c \in A$ jsou libovolné. Pokud splňují aRb a bRc neboli $a|b$ a $b|c$, tak podle věty 2a.2 platí $a|c$ neboli aRc .

Pro zajímavost uvádíme obrázek naší relace.

Poznámka: Tento příklad krásně ukazuje, že na platnost vlastností může mít vliv nejen mechanismus, jakým relace funguje, ale také množina, na které ji uvažujeme. Neplatí to ale vždy stejně.

Když jsme dokazovali tranzitivitu, tak jsme nikterak neřešili, z jaké množiny čísla bereme, hlavně aby byla celá. Tranzitivita je tedy dána podstatou relace, podobně to platí u reflexivity.

Na druhou stranu při vyvracení symetrie a antisymetrie jsme byli závislí na tom, zda najdeme protipříklad. Pokud by množina byla chytře vybrána, nemuselo by se to podařit.

Co se týče antisymetrie, stačí se vyvarovat existence párů čísel s opačnými znaménky. Nejjednodušší je volit A jako podmnožinu \mathbb{N}_0 , pak lze k důkazu antisymetrie rovnou použít větu 2a.6, ale jsou i jiné možnosti, třeba množina $A = \{-3, -1, 2, 4\}$.

I symetrii můžeme získat chytrou volbou množiny A , například $A = \{-1, 1\}$ nebo $A = \{-5, -3, 3, 5, 7\}$. Rozmyslete si to, popřípadě si pro tyto příklady nakreslete graf. Zvláštní volba je třeba $A = \{3, 5\}$. Na této množině je relace vytvořená dělitelostí prázdná. V takovém případě platí symetrie, antisymetrie i tranzitivita automaticky, protože nedokážeme splnit předpoklady implikací z jejich definic. Je to ovšem značně nezajímavý případ.

△

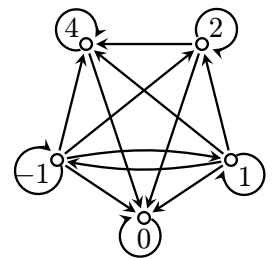
Podle definice vzniká relace tak, že si vybereme množiny A, B (popřípadě jednu množinu A) a z odpovídajícího kartézského součinu pak vybíráme dvojice. V praxi to ale bývá naopak, máme nějaký princip pro výběr dvojic a podle okolností jej aplikujeme na vhodné množiny, přičemž díky tomu, že jde pořád o stejný princip, nečekáme podstatné rozdíly v chování takto vzniklých relací. Například o dělitelnosti víme, že je reflexivní a tranzitivní na \mathbb{Z} , selský rozum pak říká, že kdybychom se rozhodli používat stejnou podmínku, ale s menší množinou čísel, tak se v ní nemohly najednou odněkud vynořit protipříklady. Podobně je dělitelnost antisymetrická na \mathbb{N}_0 , tak by měla být antisymetrická i na podmnožinách \mathbb{N}_0 . Jak jsme viděli, může se stát, že se při nějaké zvláštní volbě množin objeví i další vlastnosti (ta symetrie), ale to je nejisté a proto na to obvykle nespolehnáme. Důležitá je pro nás dědičnost platných vlastností.

Pro přechod k menší podmnožině při zachování principu výběru dvojic jsme v první části zavedli pojem restrikce relace, pomocí něj naše pozorování potvrdíme formálně.

Fakt 5b.3.

Nechť R je relace na množině A , nechť S je restrikce R na nějakou $B \subseteq A$. Jestliže má R některou z výše definovaných čtyř vlastností, tak ji má S také.

S Rozbor: Důkazy s relacemi bývají pro začátečníky obtížnější, než si zvyknou na jazyk. Jako obvykle hodně pomůže, když si nejprve rozmyslíme, že rozumíme základním pojmům. Zde jde o pojem restrikce relace. Víme, že



S vznikne tak, že se z R vynechají všechny dvojice, ve kterých se vyskytují prvky mimo B . To naznačuje, že v naší situaci je asi lepší vnímat relace coby množiny dvojic, čímž je dán doporučený jazyk pro důkaz. Relace S je pak podmnožinou R , obsahuje přesně ty dvojice $(a, b) \in R$, pro které platí $a, b \in B$. Tím jsme si také připomněli mechanismus, pomocí kterého budeme prvky relace S poznávat.

Teď si rozmyslíme, jakou bude mít důkaz strukturu, ukážeme to pro tranzitivitu.

Chceme dokázat, že platí implikace „jestliže je R tranzitivní, tak je i S tranzitivní“. Obvykle dobře funguje přímý důkaz, my zde nevidíme důvod, proč to zkusit jinak. Náš důkaz tedy bude mít následující strukturu:

- Nechť R je (libovolná) relace na nějaké množině A a S je její restrikce na nějakou množinu B . Předpokládejme, že R je tranzitivní. Pak ...

- ... a proto je S tranzitivní.

Teď postoupíme o úroveň hlouběji. Jak dokážeme, že je S tranzitivní? Podíváme se na definici, je to zase kvantifikátor (tentokrát s množinou B , na ní S žije) a pak implikace, pro ni opět zkusíme přímý důkaz. Nová verze důkazu:

- Nechť R je (libovolná) relace na nějaké množině A a S je její restrikce na nějakou množinu B . Předpokládejme, že R je tranzitivní. Ukážeme, že i S je tranzitivní. Vezměme libovolné $a, b, c \in B$ a předpokládejme, že splňují $(a, b) \in S$ a $(b, c) \in S$. Pak ...

- ... tedy $(a, c) \in S$. Potvrdili jsme, že S je tranzitivní.

Zbývá doplnit část uprostřed. Abychom se dostali od $[(a, b) \in S \text{ a } (b, c) \in S]$ k závěru $(a, c) \in S$, určitě použijeme hlavní předpoklad, že je R tranzitivní. Ten ale nelze aplikovat na dvojice z S , takže budeme muset tuto informaci přenést do světa R , jinými slovy budou se nám hodit naše úvodní úvahy o vztahu R a S . Máme hotov plán důkazu.

Důkaz (rutinní, poučný): Předpokládejme, že R je tranzitivní. Ukážeme, že i S je tranzitivní.

Nechť $a, b, c \in B$ jsou takové, že $(a, b) \in S$ a $(b, c) \in S$. Protože $S \subseteq R$, pak $(a, b) \in R$ a $(b, c) \in R$ a z tranzitivity R plyne $(a, c) \in R$. Protože také $a, c \in B$, dostáváme $(a, c) \in S$. Tedy i S je tranzitivní.

Ostatní vlastnosti viz cvičení 5b.11. □

Zjednodušeně řečeno, přechodem k podmnožině se vlastnosti relace nepokazí. Když jsme tedy dokázali, že dělitelnost je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní jako relace na \mathbb{N}_0 , pak má tyto vlastnosti i tehdy, když ji uvažujeme na \mathbb{N} , na $\{13, 14, 23\}$ nebo třeba na množině všech prvočísel.

Intuitivně funguje restrikce jako zoomování v grafu. Představíme si graf relace R na množině A (kolečka, mezi nimi šipky). Představme si dále, že množina B tvoří jakoby samostatnou část tohoto grafu (její body jsou pohromadě a body mimo B nejsou mezi ně zamíchané), takže je možné použít funkci zoom a zaměřit svůj pohled pouze na část grafu odpovídající množině B . V našem zorném poli pak zůstanou pouze šipky, které vedou mezi prvky B , tedy vidíme přesně restrikci R na B . Kdybychom tam viděli nějaký protipříklad proti vlastnosti, tak tam zůstane i poté, co zase odzoomujeme a vidíme celý graf R . Vlastně jsme se teď odkazovali na obměnu tvrzení z faktu 5b.3: Jestliže nějaká vlastnost neplatí pro restrikci S , pak nesmí platit ani pro původní relaci R . Zdá se, že dotýčný fakt by šel dokázat i touto cestou, tedy nepřímým důkazem, viz cvičení 5b.11.

Všimněte si, že tvrzení o restrikci nemá tvar ekvivalence, čili klidně se může stát, že R nějakou vlastnost nemá, ale přechodem k S ji získáme. Je to tím, že jsme zmenšením množiny A mohli přijít o protipříklady, jak už jsme ostatně několikrát viděli. Není v tom ale nějaká pravidelnost, takže se s vylepšováním vlastností tímto způsobem nepracuje.

5b.4 Poznámka: V důkazu hrálo klíčovou roli, že restrikce S je z množinového pohledu podmnožinou R . Víme také, že podmnožiny R lze vytvářet i jinak než restrikcí, prostě odebráním dvojic. Pak už ale nelze garantovat zachování vlastností.

Příklad: $A = \{1, 2, 3\}$, uvažujme relaci $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$, která je symetrická. Když se omezíme na množinu $B = \{1, 2\}$, tak z relace zbyde její restrikce $S = \{(1, 2), (2, 1)\}$. I ta je symetrická, to souhlasí.

Pokud ale začneme mluvit o podmnožinách relace obecně, pak si z relace R můžeme vybrat třeba podmnožinu $T = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$ a máme relaci, která už není symetrická.

Příklad ze života: Snadno si rozmyslíme, že relace “být příbuzný” je symetrická na libovolné množině lidí, ale jako podmnožinu má relaci “být rodičem”, která obvykle (na velkých souborech lidí, aby tam nějaký pár rodič-dítě byl) symetrická není.

Naopak relace $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$ symetrická není, ale přechodem k její podmnožině $S = \{(1, 2), (2, 1)\}$ již získáme relaci symetrickou. Takže stát se může cokoliv, při přecházení k obecné podmnožině mohou vlastnosti zanikat i začít platit. Je tu jedna výjimka, antisymetrie vyžaduje nepřítomnost obousměrných šipek, odebráním dvojic toto nelze pokazit. Můžete si dokázat, že když je relace antisymetrická, tak její libovolná podmnožina je zase antisymetrická relace.

Přechod k podmnožině relace se obvykle neprobírá, protože to není praktická operace, uvedli jsme to zde spíš jako příležitost pro procvičení matematického přemýšlení. Je tu ale proces opačný: Máme relaci, které chybí určitá vlastnost, a my se ji snažíme zachránit tím, že do relace nějaké dvojice přidáme, tedy přejdeme k nadmnožině. Tento pohled je zajímavější a dokonce se k němu váže trocha teorie, viz sekce 5c.12.

△

Praktickým závěrem těchto úvah je, že se relace snažíme dělat na co největších množinách a platné vlastnosti pak máme zaručenu i při přechodu k restrikci. Tímto způsobem vznikne většina počítacích příkladů v kapitolách o relacích. Podívejme se tedy na další profláklou relaci.

Příklad 5b.d: Vyšetříme základní čtyři vlastnosti pro relaci $R = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \leq b\}$. Méně formálně bychom ji zadali třeba takto:

- Uvažujme relaci R na \mathbb{R} definovanou jako aRb právě tehdy, když $a \leq b$.

Ještě méně formálně bychom mohli říct toto:

- Uvažujme relaci \leq na \mathbb{R} .

Při zápisu řešení vyjdeme z první, formální podoby definice.

R: Pro všechna $a \in \mathbb{R}$ platí $a \leq a$, tedy i $(a, a) \in R$. Relace R je reflexivní.

S: Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$ jsou takové, že aRb neboli $a \leq b$. Platí pak bRa neboli $b \leq a$? Zkušenost říká, že obecně určitě ne. Protipříklad: Určitě $(13, 23) \in R$, neboť $13 \leq 23$, ale neplatí $23 \leq 13$ a tudíž $(23, 13) \notin R$. Relace R není symetrická.

A: Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ splňují $(a, b) \in R$ a $(b, a) \in R$. To podle definice relace znamená $a \leq b$ a $b \leq a$, z čehož hned plyne $a = b$. Antisymetrie relace R je dokázána.

T: Vezměme libovolné $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Předpokládejme, že aRb a bRc . To znamená, že $a \leq b$ a $b \leq c$, odtud $a \leq c$ a tedy aRc . Relace R je tranzitivní.

Všimněte si, že jsme v důkazu antisymetrie nepoužili při výběru prvků slovo „libovolné“. To se u důkazů psaných slovy toleruje; pokud napíšeme „nechť $m \in M$ “, tak se tomu rozumí tak, že je voleno libovolně. Bývá dobré to „libovolně“ pro jistotu psát, ale když se to tu stylově nehodilo, tak jsme si nedělali násilí. I v dalších důkazech si to občas odpustíme.

Ovšem pozor, pokud bychom ten důkaz chtěli zapsat pomocí logických symbolů, tak už jsme na poli formální logiky a to „prokaždítka“ tam být musí.

△

Je zase zajímavé si všimnout, že při důkazech reflexivity, antisymetrie a tranzitivity jsme nikde nepoužili fakt, že čísla vybíráme zrovna z \mathbb{R} . Stejně důkazy by platily na libovolné podmnožině reálných čísel, má tedy smysl rovnou dokazovat pro množinou největší a přechod k menším množinám řešit restrikcí.

Příklad 5b.e: Uvažujme relaci $a < b$ na \mathbb{R} . Vyšetříme pro ni základní čtyři vlastnosti.

Miimochodem, použili jsme asi nejstručnější způsob zadání relace, dokonce jsme pro ni ani nezavedli písmenné označení R . To jistě ovlivní zápis úvah a důkazů.

R: Nechť $a \in \mathbb{Z}$. Chceme, aby platilo $a < a$, ale to nejde. Protipříklad lze zvolit náhodně, třeba tento: neplatí $\pi < \pi$. Relace $<$ není reflexivní na \mathbb{R} .

S: Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$ splňují $a < b$. Pro symetrii potřebujeme dojít k opačné nerovnosti $b < a$, ale to určitě nepůjde. Pro úplnost protipříklad: $1 < 3$, ale neplatí $3 < 1$. Proto relace $<$ není symetrická na \mathbb{R} .

A: Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$ splňují $a < b$ a $b < a$. Rádi bychom z toho odvodili $a = b$, ale to evidentně nejde. To ovšem ještě nepohrývá antisymetrii. My totiž nejsme schopni najít protipříklad, protože nám žádná dvě reálná čísla neudělají předpoklad $[a < b \wedge b < a]$ pravdivým.

Jinak řečeno, pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ má implikace $[aRb \wedge bRa] \implies a = b$ nepravdivý předpoklad a jako celek proto automaticky platí. Relace $<$ je tedy antisymetrická.

T: Nechť $a, b, c \in \mathbb{Z}$ splňují $a < b$ a $b < c$. Pak $a < c$ a tedy relace $<$ je tranzitivní.

△

5b.5 Poznámka: Platnost implikace díky nespelnitelnému předpokladu je něco, co je třeba vést stále v patrnosti. Dobrou kontrolou je náš zvyk uvádět důsledně protipříklady, a to i pro „jasně neplatná“ tvrzení. Vědomi si této závislosti na množině jsme proto v příkladě 5b.e zdůrazňovali, že ta či ona vlastnost „neplatí na \mathbb{R} “. Pokud bychom například zkoumali relaci $<$ na jednoprvkové množině $A = \{13\}$, tak už bude symetrická, protože předpoklad symetrie $a < b$ nelze u jednoprvkové množiny splnit. Samozřejmě jde opět o patologický případ.

△

Příklad 5b.f: Vyšetříme základní čtyři vlastnosti pro relaci R na \mathbb{R} danou předpisem aRb právě tehdy, když $a = b$.

Zadání naznačuje, že máme používat symboly aRb , tak to uděláme.

R: Nechť $a \in \mathbb{Z}$ je libovolné. Pak $a = a$, proto aRa .

S: Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$ jsou takové, že aRb neboli $a = b$. Platí také $b = a$ neboli bRa . Proto je R symetrická.

A: Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ splňují aRb a bRa . To znamená $a = b$ a $b = a$, prostě $a = b$. Tato relace je antisymetrická.

T: Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$ splňují aRb a bRc neboli $a = b$ a $b = c$. Pak $a = c$ a tedy aRc . Tato relace je tranzitivní.

Vidíme, že rovnost splňuje všechny čtyři vlastnosti. Proto se nám s ní dobře pracuje.

△

Opět se podívejme, co jsme vlastně v důkazech potřebovali. Kromě samotné myšlenky rovnosti nic, dokonce ani to, že jsme pracovali s čísly. Stejně důkazy by potvrdily všechny čtyři vlastnosti, ať už testujeme shodu jakýchkoliv objektů, třeba rovnost množin, rovnost lidí, rovnost lineárních prostorů, cokoliv chcete. Jaká vlastně vznikne při testování shody relace? Dá se velice snadno zapsat a zároveň má některá zajímavá využití.

Definice.

Nechť A je množina. Definujeme její **diagonální relaci (diagonal relation)** jako relaci

$$\Delta(A) = \{(a, a) \in A \times A : a \in A\}.$$

Je to tedy relace ze všech „smyček“ a lze ji také vyjádřit předpisem $(x, y) \in \Delta(A) \iff x = y$. Její reprezentace maticí je jednotková matice E_n . Je velice specifická, například je to v zásadě jediný typ relace, který je zároveň symetrický i antisymetrický, viz cvičení 5b.9. Ještě ji v této kapitole několikrát potkáme.

Zbývá nám ještě jeden důležitý vztah.

Příklad 5b.g: Mezi množinami máme vztah býti podmnožinou. V příkladě 5a.e jsme jej zasadili do teorie relací. Je třeba zvolit nějakou množinu \mathcal{A} množin, se kterými chceme pracovat, a na \mathcal{A} uvažujeme relaci býti podmnožinou. To přesně řečeno znamená, že dvojice množin $(A, B) \in \mathcal{A}$ je v naší relaci právě tehdy, když $A \subseteq B$. Připomeňme, že obvykle máme universum prvků U a pracujeme s $\mathcal{A} = P(U)$. Formality máme za sebou a můžeme se podívat na vlastnosti, odpovědi už vlastně známe z kapitoly 1d.

Podle faktu 2a.1 (i) je inkluze reflexivní, podle faktu 2a.2 je tranzitivní. Fakt 2a.3 ukazuje antisymetrii. Zbývá vyšetřit symetrii. Platí vždy, že $A \subseteq B$ implikuje $B \subseteq A$? Obecně ne, třeba $\{13\} \subseteq \{13, 23\}$, ale neplatí $\{13, 23\} \subseteq \{13\}$, relace \subseteq tedy obecně není symetrická. To je ovšem specifický protipříklad, který třeba v naší \mathcal{A} vůbec není.

To nás přivádí k nejzajímavější části tohoto příkladu. Budeme vždy schopni najít protipříklad na symetrii? Vzato z opačného pohledu, mohla by být inkluze symetrická pro nějaké speciální \mathcal{A} ? K vytvoření protipříkladu nám stačí mít dvě množiny tak, aby $A \subseteq B$ a zároveň $A \neq B$. Pokud soubor množin \mathcal{A} takovéto množiny neobsahuje, pak by relace \subseteq byla symetrická. Takovýchto situací existuje mnoho. Nejjednodušší je vzít jako \mathcal{A} soubor jen s jednou množinou. Například $\mathcal{A} = \{\{13\}\}$ obsahuje jedinou množinu, $\{13\}$, relace \subseteq pak splňuje všechny čtyři vlastnosti.

Abyste to nebyla taková nuda, i na souboru $\mathcal{A} = \{\{13\}, \{23\}\}$ je inkluze symetrickou relací, protože v tomto souboru nenajdeme dvě různé množiny, pro které by byl splněn předpoklad $A \subseteq B$. Rozmyslete si, že relace \subseteq je symetrická i na nekonečném souboru množin

$$\mathcal{A} = \{\{n, n+1\} : n \in \mathbb{N}\} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \dots\}.$$

To jsou ovšem velmi speciální \mathcal{A} . Mohlo by se stát, že i v obvyklém případě, tedy při práci s $\mathcal{A} = P(U)$, bude relace \subseteq symetrická? Pro vytvoření protipříkladu nám stačí mít jediný prvek $u \in U$, protože pak lze vzít $A = \emptyset$, $B = \{u\}$ a máme protipříklad. To znamená, že jediná možnost, jak mít \subseteq symetrickou, je $U = \emptyset$, což v praxi nepotkáváme. V typickém případě tedy inkluze bude reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, ale nebude symetrická.

△

Ted představíme relaci, která předznamená kapitolu 9.

Příklad 5b.h: Uvažujme nějakou množinu \mathcal{M} obsahující nějaké množiny s konečným počtem prvků. Pro takovou množinu $A \in \mathcal{M}$ označme symbolem $|A|$ počet prvků, které M obsahuje.

1. Uvažujme relaci \mathcal{R} na \mathcal{M} definovanou předpisem ARB právě tehdy, když $|A| \leq |B|$.

Snadno si rozmyslíme, že tato relace je reflexivní a také tranzitivní, později to i dokážeme, viz fakt 9c.2 (i) a fakt 9c.3 (i).

Se symetrií to nevypadá dobře, například $|\{13\}| \leq |\{13, 23\}|$, ale neplatí $|\{13, 23\}| \leq |\{13\}|$. My ovšem nevíme, zda zrovna tyto množiny jsou v \mathcal{M} . Rozmyslete si, že zkoumaná relace je symetrická právě v případě, že všechny množiny z \mathcal{M} mají stejný počet prvků. V oblíbeném případě $\mathcal{M} = P(U)$, kde $U \neq \emptyset$, tedy symetrii určitě nemáme.

Jak je na tom antisymetrie? Taky to nevypadá dobře, neboť $|\{13, 23\}| \leq |\{13, 14\}|$ a $|\{13, 14\}| \leq |\{13, 23\}|$, ale neplatí $\{13, 14\} = \{13, 23\}$. Opět se zaměříme na \mathcal{M} a dojdeme k následujícímu závěru: Aby byla zkoumaná relace antisymetrická, nesměla by v \mathcal{M} být více než jedna množina každé velikosti. V tradičním případě $\mathcal{M} = P(U)$ toto nastane v případech $U = \emptyset$ a $|U| = 1$. My ovšem obvykle bereme universa alespoň dvouprvková (typicky dokonce nekonečná, třeba \mathbb{Z}), pak relace \mathcal{R} určitě nebude antisymetrická.

2. Uvažujme relaci \mathcal{R} na \mathcal{M} definovanou předpisem ARB právě tehdy, když $|A| = |B|$.

Snadno si rozmyslíme, že je reflexivní, symetrická a tranzitivní, důkazy v obecnějším kontextu najdeme jako fakt 9c.2 (i) a (iii) a fakt 9c.3 (iii). Není ale obecně antisymetrická, například máme $|\{13, 23\}| = |\{13, 14\}|$ a $|\{13, 14\}| = |\{13, 23\}|$, ale neplatí $\{13, 14\} = \{13, 23\}$. Zkuste si zase udělat rozbor, pro jaké soubory množin \mathcal{M} bychom zde antisymetrii dostali.

Vyšla vám stejná situace jako u předchozí relace? V pořádku. Mimochodem, před chvílí jsme říkali, že rovnost objektů je vždy symetrická i antisymetrická. Tento příklad tomu neprotiřečí, protože zde neporovnáváme přímo objekty, ale nějaké jejich vlastnosti (počet prvků). Jde tedy o něco jiného.

△

Ted' něco ze života.

Příklad 5b.i: Nechť A je množina všech (živých) lidí. Definujme relaci aRb jestliže a a b mají stejného otce či stejnou matku.

Protože každý má stejného otce či matku sám se sebou, je tato relace reflexivní. Evidentně je také symetrická, protože ve výroku „ a a b mají stejnou matku/otce“ je role a a b symetrická. V principu antisymetrická nebude: Jestliže mají a a b stejnou matku/otce a také b a a mají stejnou matku/otce, pak rozhodně nemusí jít o stejnou osobu, tedy neplatí $a = b$. Otázka ovšem je, zda se nám podaří v množině A najít protipříklad. Kdybychom například nebrali všechny lidi, ale jen jedináčky, pak už by R na takovémto A byla antisymetrická. Závěr tedy je, že relace R antisymetrická obecně není, ale pro konkrétní volbu A být může.

Tranzitivita: Nechť aRb a bRc . Pak mají a a b stejného rodiče a také b a c mají stejného rodiče. Znamená to, že pak i a a c sdílejí nějakého rodiče? Neznamená. Představme si následující situaci. Paní M_1 má s panem O_1 dítě a . Poté si pan O_1 udělá dítě b s paní M_2 a stává se tak spojovacím můstkem, díky kterému aRb (mají shodného otce O_1). Paní M_2 už má z předchozího manželství s panem O_2 dítě c , takže mají b a c společnou matku M_2 a tudíž bRc . Jenže a a c nemají ani společnou matku, ani společného otce a tudíž neplatí aRc , tato relace tedy není tranzitivní.

Což jen ukazuje, že když nám mezi zkoumané objekty proniknou lidé, začnou potíže, protože si dělají, co je napadne. Není divu, že v oborech jako psychologie, medicína či ekonomika zdaleka nedosáhli spolehlivosti závěrů, jaké nabízí třeba fyzika.

△

Další vyšetřování relací si vyzkoušejte ve cvičeních, začněte snažšími a propracujte se k zajímavějším, viz cvičení 5b.6.

Dokázali jsme, že vlastnosti se přechodem k restrikci nemohou ztrácet. Je ještě jedna věc, kterou jsme se s relací naučili dělat, a to obrácení směřů šipek. Pokud se na jednotlivé vlastnosti podíváme skrz graf relace (existence smyček, všechny šipky obousměrné atd.), snadno si rozmyslíme, že se jejich splnění nepokazí, pokud u všech šipek otočíme směr. Potvrdíme si to formálně.

Fakt 5b.6.

Nechť R je relace na množině A . Jestliže má některou ze čtyř základních vlastností, tak ji má R^{-1} také.

S Rozbor: Rozmyslíme si strukturu důkazu, že se přenáší tranzitivita. Chceme dokázat, že platí implikace „jestliže je R tranzitivní, tak je i R^{-1} tranzitivní“. Zkusíme přímý důkaz:

- Nechť R je relace na nějaké množině A . Předpokládejme, že je tranzitivní. Pak ...
... a proto je R^{-1} tranzitivní.

Ted' doplníme kostru důkazu, že R^{-1} je tranzitivní. Zvolíme jazyk, s inverzní relací se pracuje dobře jak prostřednictvím dvojic, tak značení aRb , zvolíme tedy ten druhý (kratší) způsob. Nová verze důkazu:

• Nechť R je relace na nějaké množině A . Předpokládejme, že je tranzitivní. Vezměme libovolné $a, b, c \in A$ a předpokládejme, že splňují $aR^{-1}b$ a $bR^{-1}c$. Pak ...

... tedy $aR^{-1}c$. Potvrdili jsme, že R^{-1} je tranzitivní.

Zbývá doplnit část uprostřed. K odvození $aR^{-1}c$ využijeme předpoklady, které ale nevyužívají stejného jazyka, u prvků víme něco o R^{-1} , jmenovitě $aR^{-1}b$ a $bR^{-1}c$, zatímco hlavní předpoklad je o R (je tranzitivní). Aby to šlo spojit, je třeba informaci o prvcích přenést do světa R . To ale není problém, jdeme na to.

Důkaz (rutinní, poučný): Nechť je R tranzitivní. Vezměme $a, b, c \in A$ takové, že $aR^{-1}b$ a $bR^{-1}c$. Pak ale bRa a cRb neboli cRb a bRa , tudíž podle tranzitivity R platí cRa . Odtud $aR^{-1}c$. Závěr: R^{-1} je tranzitivní.

Ostatní vlastnosti jsou snad ještě lehčí a necháme je jako cvičení 5b.12. □

Ve skutečnosti platí ekvivalence, R má nějakou z vlastností právě tehdy, pokud ji má R^{-1} . Důkaz opačné implikace vznikne poskládáním již známých věcí: Pokud má R^{-1} některou z vlastností, pak ji podle právě dokázaného tvrzení má i $(R^{-1})^{-1} = R$, viz cvičení 5a.5, takže tu vlastnost má i R .

Než se dostaneme k další kapitole, podíváme se ještě na tranzitivní relace. Vlastnost jim umožňuje zkrátit dvojkroky na jednokroky. Tuto myšlenku je možné aplikovat opakovaně, takže i trojkroky, čtyřkroky a podobně lze postupně zkracovat na jednokroky. Dostáváme tak silnější podmínku.

Fakt 5b.7.

Nechť R je relace na množině A . Je tranzitivní právě tehdy, když pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ a prvky $a_1, \dots, a_n \in A$ takové, že $a_i R a_{i+1}$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, n-1$, platí také $a_1 R a_n$.

Všimněte si, že prvky a_0, a_1, \dots, a_n tvoří řetízek délky n , viz Lemma o řetízích 5a.12. Tvrzení je ekvivalence, takže tradičně dokážeme dvě implikace.

Důkaz (rutinní): 1) \Leftarrow : Předpokládejme, že daná podmínka platí. Pak ji lze použít pro $n = 2$, což říká, že kdykoliv $a_1 R a_2 R a_3$, pak $a_1 R a_3$. To je přesně definice tranzitivity.

2) \Rightarrow : Předpokládejme, že R je tranzitivní. Platnost podmínky dokážeme indukcí na n .

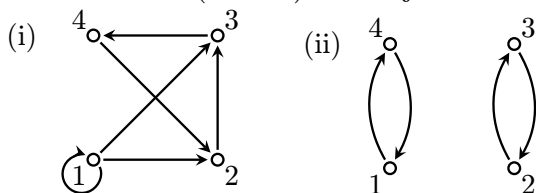
(0) Pro $n = 2$ podmínka platí, je to definice tranzitivity.

(1) Mějme $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq 2$. Předpokládejme, že když libovolné prvky $a_1, \dots, a_n \in A$ splňují $a_i R a_{i+1}$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, n-1$, pak $a_1 R a_n$. Platí to i pro $n+1$ prvků?

Vezměme prvky $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \in A$ takové že $a_i R a_{i+1}$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$. Aplikací indukčního předpokladu na prvních n zjistíme, že $a_1 R a_n$, spolu s $a_n R a_{n+1}$ a tranzitivitou dostaneme $a_1 R a_{n+1}$ a důkaz je hotov. □

Cvičení

Cvičení 5b.1 (rutinní): Uvažujte relace dané následujícími diagramy.



Vyšetřete pro ně čtyři základní vlastnosti.

Poznámka: Vyšetřit znamená zjistit, zda určitá vlastnost platí, a tuto odpověď dokázat.

Cvičení 5b.2 (rutinní): Uvažujte následující relace na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Vyšetřete pro ně čtyři základní vlastnosti. Pak nakreslete jejich grafy a ověřte na nich své odpovědi.

(i) $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (3, 4)\}$;

(ii) $R = \{(1, 4), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.

Cvičení 5b.3 (rutinní): Uvažujte relaci R na množině lidí A danou aRb jestliže a a b sdílí křestní jméno.

Vyšetřete, kterou ze základních čtyř vlastností má.

Cvičení 5b.4 (rutinní, *dobré): Pro následující relace na \mathbb{Z} vyšetřete čtyři základní vlastnosti.

(i) aRb jestliže $|a| = |b|$;

(v) aRb jestliže $a - b = 2k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$;

(ii) aRb jestliže $a \geq b$;

(vi)* aRb jestliže $2a \leq b$ (pomoci může graf ze cvičení 5a.1);

(iii) aRb jestliže $a \neq b$;

(vii)* aRb jestliže $a \geq b^2$ (viz následující cvičení);

(iv) aRb jestliže $a = b + 1$;

(viii) aRb jestliže a a b mají nějakého společného dělitele různého od 1.

Cvičení 5b.5 (rutinní, *dobré): Pro následující relace na \mathbb{R} vyšetřete čtyři základní vlastnosti.

- (i) xRy jestliže $y - x \in \mathbb{Z}$;
- (ii) xRy jestliže $x - y \in \mathbb{Q}$;
- (iii) xRy jestliže $xy \geq 0$;
- (iv) xRy jestliže $xy \geq 1$;
- (v) xRy jestliže $x = y^2$;
- (vi)* xRy jestliže $x \geq y^2$ (viz předchozí cvičení);
- (vii) xRy jestliže $|x| \leq |y|$.

Cvičení 5b.6 (rutinní, dobré): Vyšetřete čtyři základní vlastnosti pro následující relace:

- (i) Relace R na množině \mathbb{R}^2 definovaná takto: $(u, v)R(x, y)$ jestliže $u^2 - y = x^2 - v$, tedy formálně $R = \{((u, v), (x, y)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : u^2 - y = x^2 - v\}$.
 - (ii) Relace R na množině \mathbb{R}^2 definovaná takto: $(u, v)R(x, y)$ jestliže $u^2 - y = v^2 - x$, tedy formálně $R = \{((u, v), (x, y)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : u^2 - y = v^2 - x\}$.
 - (iii) Relace R na množině \mathbb{R}^2 definovaná takto: Uvažujme množinu $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 13\}$ (mimořadně, kružnice okolo počátku s poloměrem $\sqrt{13}$). Definujme $R = \{((u, v), (x, y)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : (u, v) - (x, y) \in N\}$.
 - (iv) Relace R na množině \mathbb{R}^2 definovaná takto: Uvažujme množinu $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ (mimořadně, vedlejší diagonála). Definujme $R = \{((u, v), (x, y)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : (u, v) - (x, y) \in N\}$.
 - (v) Relace \mathcal{R} na množině F všech funkcí $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definovaná jako $f\mathcal{R}g$ jestliže $f(0)g(0) = 2$.
 - (vi) Relace \mathcal{R} na množině F všech funkcí $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definovaná jako $f\mathcal{R}g$ jestliže $f(1) = g(2)$.
 - (vii) Relace \mathcal{R} na množině F všech funkcí $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definovaná jako $f\mathcal{R}g$ jestliže $f(x) \geq g(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
 - (viii) Relace \mathcal{R} na množině $M_{2 \times 2}$ všech 2×2 reálných matic definovaná jako $A\mathcal{R}B$ jestliže $|A| = |B|$ (stejný determinant).
 - (ix) Relace \mathcal{R} na množině $M_{2 \times 2}$ všech 2×2 reálných matic definovaná jako $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mathcal{R} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ jestliže $a_{11} = b_{22}$.
 - (x) Relace R na množině P všech reálných polynomů definovaná jako $p(x)Rq(x)$ jestliže mají p a q stejný stupeň.
 - (xi) Relace R na množině P všech reálných polynomů definovaná jako $p(x)Rq(x)$ jestliže mají p a q stejné reálné kořeny včetně násobnosti.
 - (xii) Relace R na množině P všech reálných polynomů definovaná jako $p(x)Rq(x)$ jestliže mají p a q stejné komplexní kořeny včetně násobnosti.
- Viz též cvičení 4a.5 a 4a.6.

Cvičení 5b.7 (rutinní): Nechť A je množina řetězců z 26 malých písmen anglické abecedy. Určete vlastnosti relací daných na A následujícími podmínkami:

- (i) $\alpha R \beta$ jestliže řetězce α a β nemají žádná společná písmena;
- (ii) $\alpha R \beta$ jestliže řetězce α a β sdílejí nějaká písmena;
- (iii) $\alpha R \beta$ jestliže je každé písmeno řetězce α obsaženo v řetězci β ;
- (iv) $\alpha R \beta$ jestliže řetězce α a β nemají stejnou délku;
- (v) $\alpha R \beta$ jestliže je řetězec α delší než β .

Cvičení 5b.8 (poučné): Dokažte, že pro libovolnou množinu A je $\Delta(A)$ reflexivní, symetrická, antisymetrická a tranzitivní.

Cvičení 5b.9 (poučné): Dokažte, že pro libovolnou množinu A a relaci R na A platí, že jestliže je R symetrická i antisymetrická, pak $R \subseteq \Delta(A)$.

Dokažte, že pro libovolnou množinu A a relaci R na A platí, že jestliže je R symetrická i antisymetrická, pak je tranzitivní.

Cvičení 5b.10 (poučné, dobré): Uvažujme množinu $A = \{a, b, c\}$. Máme čtyři vlastnosti (reflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita), každá může a nemusí být splněna, což dává celkem $2^4 = 16$ možností. Pro každou možnost vytvořte nějaký příklad relace na A či odůvodněte, proč to nejde (viz cvičení 5b.9).

Cvičení 5b.11 (rutinní): Nechť R je relace na množině A , nechť S je restrikce R na nějakou $B \subseteq A$.

- a) Dokažte přímým důkazem následující (viz fakt 5b.3):
 - (i) Jestliže R je reflexivní, pak S je reflexivní.
 - (ii) Jestliže R je symetrická, pak S je symetrická.
 - (iii) Jestliže R je antisymetrická, pak S je antisymetrická.
- b) Dokažte tato tvrzení nepřímým důkazem, tedy zformulujte jejich obměny a pak je dokažte.
- c) Dokažte tato tvrzení sporem.

Cvičení 5b.12 (rutinní): Nechť R je relace na A . Dokažte následující (viz fakt 5b.6):

- (i) R je reflexivní právě tehdy, když je i R^{-1} reflexivní.
- (ii) R je symetrická právě tehdy, když je i R^{-1} symetrická.
- (iii) R je antisymetrická právě tehdy, když je i R^{-1} antisymetrická.

Cvičení 5b.13 (poučné, dobré): Najděte chybu v následujícím „důkazu“, že jestliže je nějaká relace R na A symetrická a tranzitivní, pak už musí být i reflexivní:

Nechť $a \in A$. Vezměme $b \in A$ takové, aby aRb . Podle symetrie pak bRa , máme řetězec $aRbRa$, tedy podle tranzitivity aRa .

Řešení:

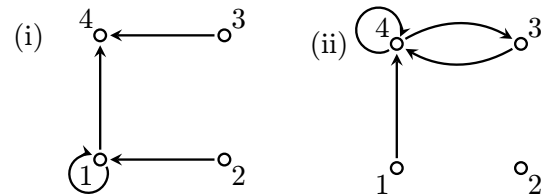
Připomínáme, že zde není \implies značka pro implikaci, ale zkratka pro „odtud vyplývá“.

5b.1: (i): R: ne, chybí smyčka třeba u 2; S: ne, protože třeba $1R2$, ale neplatí $2R1$; A: ano, jediný případ s aRb a bRa je $a = b = 1$, což je v pořádku (alternativa: pro $a \neq b$ nikdy nevedou šipky oběma směry); T: ne, je $1R3$ a $3R4$, ale není $1R4$.

(ii): R: ne, chybí smyčka třeba u 1; S: ano, pro každou šipku je i zpět; A: ne, jsou dvojité šipky mezi dvěma různými prvky; T: ne, je $1R4$ a $4R1$, ale není $1R1$.

5b.2: a) (i): R: ne, chybí třeba $(2, 2)$; S: ne, protože třeba $(1, 4) \in R$, ale $(4, 1) \notin R$; A: ano, jediný případ s $(a, b) \in R$ a $(b, a) \in R$ je $a = b = 1$, což je v pořádku; T: ne, $(2, 1) \in R$ a $(1, 4) \in R$, ale $(2, 4) \notin R$.

b) (ii): R: ne, chybí třeba $(1, 1)$; S: ne, protože třeba $(1, 4) \in R$, ale $(4, 1) \notin R$; A: ne, $(3, 4) \in R$ a $(4, 3) \in R$ ale neplatí $3 = 4$; T: ne, například $(1, 4) \in R$ a $(4, 3) \in R$, ale neplatí $(1, 3) \in R$.



5b.3: R, S, T.

5b.4: (i): R: Pro každé $a \in \mathbb{Z}$ platí $|a| = |a|$, proto aRa . Reflexivní.

S: Libovolné $a, b \in \mathbb{Z}$ splňující aRb , to dává $|a| = |b|$, proto $|b| = |a|$ a tedy bRa . Symetrická.

A: Libovolné $a, b \in \mathbb{Z}$ splňující aRb a bRa , to dává $|a| = |b|$ a $|b| = |a|$, z toho asi $a = b$ nedostaneme. Protipříklad: $|-13| = |13|$, proto $13R(-13)$ a $(-13)R13$, ale neplatí $-13 = 13$, tedy R není antisymetrická.

T: Libovolné $a, b, c \in \mathbb{Z}$ splňující aRb a bRc , to dává $|a| = |b|$ a $|b| = |c|$, z toho hned máme $|a| = |c|$ a tedy aRc . R je tranzitivní.

(ii): R: ano, pro $a \in A$ je $a \geq a$, tedy aRa ; S: ne, $2R1$ neboť $2 \geq 1$, ale neplatí $1 \geq 2$ tedy neplatí $1R2$;

A: ano, $aRb \wedge bRa \implies a \geq b \wedge b \geq a \implies a = b$; T: ano, $aRb \wedge bRc \implies a \geq b \wedge b \geq c \implies a \geq c \implies aRc$.

(iii): R: ne, třeba neplatí $1 \neq 1$ proto neplatí $1R1$; S: ano, $aRb \implies a \neq b \implies b \neq a \implies bRa$;

A: ne, třeba $1R2 \wedge 2R1$, ale neplatí $1 = 2$; T: ne, třeba $1R2$ a $2R1$, ale neplatí $1R1$.

(iv): R: ne, neplatí $13 = 13 + 1$ a proto neplatí $13R13$; S: ne, $2R1$ ale neplatí $1R2$;

A: ano, $aRb \wedge bRa \implies a = b + 1 \wedge b = a + 1 \implies b = b + 2 \implies 0 = 2$ spor, předpoklad nikdy nenastane, proto implikace vždy platí; T: ne, třeba $3R2$ a $2R1$, ale neplatí $3R1$.

(v): R: ano, $a - a = 2 \cdot 0 \implies aRa$ pro každé a ; S: ano, $aRb \implies a - b = 2k \implies [b - a = 2(-k) \text{ a } (-k) \in \mathbb{Z}] \implies bRa$; A: ne, třeba $1R3$ a $3R1$, přesto neplatí $1 = 3$;

T: ano, $[aRb \wedge bRc] \implies [a - b = 2k \wedge b - c = 2l, k, l \in \mathbb{Z}] \implies [a - c = 2(k + l), k + l \in \mathbb{Z}] \implies aRc$.

(vi): R: ne, nerovnost $2a \leq a$ platí jen pro záporná a a nulu, protipříklad $a = 1$; S: ne, $aRb \implies 2a \leq b$, to dává $2b \geq 4a$, ale potřebujeme $2b \leq a$. Protipříklad $a = 1, b = 2$.

A: ne, $[aRb \wedge bRa] \implies [2a \leq b \wedge 2b \leq a] \implies [4a \leq 2b \wedge 2b \leq a]$, tedy $4a \leq a$. To se může stát pro nekladná a , tam hledáme protipříklad. Najdeme třeba $a = -3$ a $b = -2$. Poznámka: Na \mathbb{N} by A platilo.

T: ne, $[aRb \wedge bRc] \implies [2a \leq b \wedge 2b \leq c] \implies 4a \leq c$. Pro $a \geq 0$ je $2a \leq 4a \leq c$, tedy $2a \leq c$ a aRc . Na \mathbb{N} bychom měli tranzitivitu. Ale máme i záporná čísla, protipříklad $a = -1, b = -2, c = -4$.

(vii): Není R viz $a = 2$; není S viz $4R2$; A: $aRb \wedge bRa \implies a \geq b^2 \wedge b \geq a^2$. Z první nerovnosti $a \geq 0$, proto se dá umocnit, $a^2 \geq b^4$, spolu s druhou $b \geq b^4$. To platí v \mathbb{Z} jen pro $b = 0, 1$. V obou případech z nerovnic $b \geq a^2 \geq b^4$ vyplyne $a = b$. Relace je antisymetrická.

T: Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$, $aRb \wedge bRc \implies a \geq b^2 \wedge b \geq c^2$. Pro $b \in \mathbb{Z}$ platí $b^2 \geq b$, proto navázat nerovnice, $a \geq b \geq c^2 \implies a \geq c^2 \implies aRc$. Je tranzitivní.

(viii): R: Má každé $a \in \mathbb{Z}$ nějakého společného dělitele samo se sebou jiného než 1? Skoro ano, neplatí to pro $a = 1$. Takže R není reflexivní.

S: Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$ splňují aRb . Pak existuje $c > 1$, které dělí a i b , to pak dělí i b a a , tedy bRa . R je symetrická.

A: $aRb \wedge bRa$ dává společného dělitele, není šance vynutit $a = b$. Protipříklad: $2R4$ a $4R2$ (společný dělitel 2), proto není antisymetrická.

T: a, b mají společného dělitele > 1 , b, c mají společného dělitele > 1 , z toho nic společného pro a, c neplyne. Protipříklad: $2R6$ a $6R3$, ale neplatí $2R3$. Není tranzitivní.

5b.5: (i): R, S, T, viz příklad 4a.e;

(ii): R ano $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$, S ano $y - x \in \mathbb{Q} \implies x - y = -(y - x) \in \mathbb{Q}$, T ano $y - x \in \mathbb{Q} \wedge (z - y) \in \mathbb{Q} \implies (z - x) = (y - x) + (z - y) \in \mathbb{Q}$; není A viz $1R2$ a $2R1$;

(iii): R ano $xx = x^2 \geq 0 \implies xRx$, S ano $xy \geq 0 \implies yx \geq 0$; není A viz 1R2 a 2R1; není T viz $(-1)R0$ a $0R1$ (kdyby definice byla $xy > 0$, tak je T);

(iv): Není R viz $x = 0$, S ano $xy \geq 1 \implies yx \geq 1$; není A viz 2R1 a 1R2; není T viz $\frac{1}{2}R4$ a $4R1$;

(v): Není R viz $x = 2$; není S viz 4R2; A ano $x = y^2 \wedge y = x^2 \implies x, y \geq 0 \wedge x = x^4 \wedge y = y^4 \implies x = y = 1 \vee x = y = 0$; není T viz 16R4 a 4R2;

(vi): Není R viz $x = 2$; není S viz 4R2; není A viz $x = 0.1, y = 0.2$ neboť $0.1 \geq (0.2)^2$ a $0.2 \geq (0.1)^2$ ale neplatí $0.1 = 0.2$; není T viz $(0.5)R(0.7)$ neboť $0.5 \geq (0.7)^2 = 0.49$, $(0.7)R(0.8)$ neboť $0.7 \geq 0.64$, ale není $0.25 \geq 0.64$ neboli neplatí $0.5R0.8$ (tohle asi bylo drobet zákeřné).

(vii): R ano $|x| \leq |x|$, T ano $|x| \leq |y| \wedge |y| \leq |z| \implies |x| \leq |z|$; není S viz 1R2, není A viz $1R(-1)$ a $(-1)R2$.

5b.6: (i): R: ano $u^2 - v = u^2 - v \implies (u, v)R(u, v)$; S: $(u, v)R(x, y) \implies u^2 - y = x^2 - v \implies x^2 - v = u^2 - y \implies (x, y)R(u, v)$ ano; A: ne viz třeba $(1, 4)R(2, 1)$ a $(2, 1)R(1, 4)$; T: ano; $(s, t)R(u, v) \wedge (u, v)R(x, y) \implies s^2 - v = u^2 - t \wedge u^2 - y = x^2 - v$ sečíst $s^2 - v + u^2 - y = u^2 - t + x^2 - v \implies s^2 - y = x^2 - t \implies (s, t)R(x, y)$.

Lépe se pracuje s verzí $u^2 + v = x^2 + y$.

(ii): Přepis $u^2 - v^2 = y - x$. R: ne viz třeba $(2, 3)$, neplatí $2^2 - 3 = 3^2 - 2$; S: ne viz třeba $(2, 1)R(1, 4)$ ale neplatí $(1, 4)R(2, 1)$; A: ne viz třeba $(1, 0)R(0, 1)$ a $(0, 1)R(1, 0)$; T: ne viz třeba $(2, 1)R(1, 4)$ a $(1, 4)R(16, 1)$ ale neplatí $(2, 1)R(16, 1)$.

(iii): přepis: $(u, v)R(x, y) \iff (u - x)^2 + (v - y)^2 = 13$; R: ne $(u - u)^2 + (v - v)^2 = 0 \neq 13$;

S: ano $(u, v)R(x, y) \implies (u - x)^2 + (v - y)^2 = 13 \implies (x - u)^2 + (y - v)^2 = 13 \implies (x, y)R(u, v)$; A: ne třeba $(4, 3)R(1, 1)$ a $(1, 1)R(4, 3)$; T: ne třeba $(4, 3)R(1, 1)$ a $(1, 1)R(4, 3)$ ale neplatí $(4, 3)R(4, 3)$.

(iv): přepis: $(u, v)R(x, y) \iff (u - x) + (v - y) = 0$; R: ano $(u - u) + (v - v) = 0$;

S: ano $(u, v)R(x, y) \implies (u - x) + (v - y) = 0 \implies (x - u) + (y - v) = 0 \implies (x, y)R(u, v)$; A: ne třeba $(1, 3)R(2, 2)$ a $(2, 2)R(1, 3)$; T: ano $(s, t)R(u, v) \wedge (u, v)R(x, y) \implies (s - u) + (t - v) = 0 \wedge (u - x) + (v - y) = 0$ sečíst rovnice: $(s - x) + (t - y) = 0 \implies (s, t)R(x, y)$.

(v): R: ne, to by musela každá funkce splňovat $f(0)f(0) = 2$, ale například funkce $f(x) = x + 1$ má $f(0)f(0) = 1 \cdot 1 = 1$;

S: ano $fRg \implies Tf(0)g(0) = 2 \implies g(0)f(0) = 2 \implies gRf$; A: ne třeba $f(x) = x + 1, g(x) = 3x + 2$, pak $f(0)g(0) = 1 \cdot 2 = 2 = g(0)f(0)$, tedy fRg a gRf , ale není $f = g$; T: ne třeba $f(x) = x + 1, g(x) = 3x + 2, h(x) = (x + 1)^2$, pak fRg a gRh , ale neplatí fRh , protože $f(0)h(0) = 1$.

(vi): R: ne, to by musela každá funkce splňovat $f(1) = f(2)$, ale například funkce $f(x) = x$ má $f(1) = 1$ a $f(2) = 2$; S: ne, třeba $f(x) = x + 1$ a $g(x) = x$, pak $f(1) = 1 = g(2)$, proto fRg , ale neplatí $f(1) = g(2)$; A: ne třeba $f(x) = (2x - 3)^2, g(x) = 1$ (konstantní funkce), pak $f(1) = 1 = g(2)$ a $g(1) = 1 = f(2)$, tedy fRg a gRf , ale není $f = g$; T: ne třeba $f(x) = x + 1, g(x) = x, h(x) = x - 1$, pak fRg a gRh , ale neplatí fRh , protože $f(1) = 2$ a $h(2) = 1$.

(vii): R: ano, libovolná funkce f splňuje pro každé $x \in \mathbb{R}$ nerovnost $f(x) \geq f(x)$; S: ne, třeba $f(x) = x + 13, g(x) = x$ splňují fRg ale ne gRf ; A: ano, fRg a gRf znamená $f(x) \geq g(x)$ a $g(x) \geq f(x)$ pro všechna x neboli $f(x) = g(x)$ pro všechna x neboli $f = g$; T: ano, fRg a gRh dává pro všechna $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq g(x)$ a $g(x) \geq h(x)$ neboli $f(x) \geq h(x)$, takže fRh .

(viii): R: ano $|A| = |A|$; S: ano $ARB \implies |A| = |B| \implies |B| = |A| \implies BRA$; A: ne třeba matice ze samých nul a nenulová matice s opakujícími se řádky mají obě nulový determinant, ale nejsou si rovny;

T: ano $ARB \wedge BRC \implies |A| = |B| \wedge |B| = |C| \implies |A| = |C| \implies ARC$.

(ix): R: ne, třeba u matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se nerovnjají levý horní a pravý dolní roh, proto neplatí ARA ;

S: ne, třeba pro $A = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$ platí ARB , ale ne BRA ;

A: ne, třeba $A = \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ -1 & 23 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 23 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$ splňují ARB a BRA , ale nesplňují $A = B$;

T: ne, třeba $A = \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 23 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$ a $C = \begin{pmatrix} 14 & -3 \\ 5 & 23 \end{pmatrix}$ splňují ARB a BRC , ale nesplňují ARC .

(x): R: ano $st(p) = st(p)$; S: ano $pRq \implies st(p) = st(q) \implies st(q) = st(p) \implies qRp$; A: ne třeba $p = x$ a $q = 2x + 1$; T: ano $pRq \wedge qRr \implies st(p) = st(q) \wedge st(q) = st(r) \implies st(p) = st(r) \implies pRr$;

(xi): R: ano; S: ano; A: ne třeba $p = x - 1$ a $q = 2x - 2$; T: ano;

(xii): R: ano; S: ano; A: ne třeba $p = x - 1$ a $q = 2x - 2$; T: ano;

5b.7: (i): S; proč ne T? Viz $joRneRjo$; (ii): R, S; proč ne T? Viz $catRduckRdog$ (iii): R, T; Proč ne A? Viz $ratRtar$ a $tarRrat$ ale různé, podobně $bartRbrat$ a $bratRbart$, $butRbutt$ a $buttRbut$ atd.; (iv): S; (v): A ($\alpha R\beta \wedge \beta R\alpha$ nikdy nenastane), T.

5b.8: R: přímo z definice $(a, a) \in \Delta(A)$; S: Jestliže $(a, b) \in \Delta(A)$, pak $b = a$, proto $(b, a) = (a, a) = (a, b)$ a tedy $(b, a) \in \Delta(A)$; A: Nechť $(a, b) \in \Delta(A) \wedge (b, a) \in \Delta(A)$, už z toho prvního je $a = b$;

T: Nechť $(a, b) \in \Delta(A) \wedge (b, c) \in \Delta(A)$, pak $a = b = c$ a tedy $(a, c) = (a, a) \in \Delta(A)$.

5b.9: Nechť $(a, b) \in R$. Ze symetrie také $(b, a) \in R$, tedy z antisymetrie $a = b$ a proto $(a, b) = (a, a) \in \Delta(A)$.

5b.10: Nic nemá $R = \{(a, b), (b, a), (b, c)\}$: Chybí (a, a) proto není R, k bRc chybí cRb proto není S, je tam aRb a bRa pro $a \neq b$ proto není A, je tam $aRbRc$ ale ne aRc proto není T.

Dále jen zkratky, třeba $R_{R,A}$ bude relace, která je reflexivní a antisymetrická, ale není nic jiného (to se také musí zajistit a ověřit). Podle cvičení 5b.9 máme $S, A \implies T$, proto nelze vytvořit relaci, která je sym. and antisym. ale není trans., tedy $R_{S,A}$ a $R_{R,S,A}$. Ostatní lze:

$R_T = \{(a, b), (b, a), (b, c), (a, a), (b, b), (a, c)\}$, $R_A = \{(a, b), (b, c)\}$, $R_{A,T} = \{(a, b)\}$, $R_S = \{(a, b), (b, a)\}$,

$R_{S,T} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$, $R_{S,A,T} = \{(a, a)\}$, $R_R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c)\}$,

$R_{R,T} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (a, c)\}$, $R_{R,A} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c)\}$,

$R_{R,A,T} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$, $R_{R,S} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$,

$R_{R,S,T} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$, $R_{R,S,A,T} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.

5b.11: (i): Nechť $a \in B$. Pak $a \in A$, proto $(a, a) \in R$, a jelikož také $(a, a) \in B \times B$, tak $(a, a) \in S$.

(ii): Nechť $a, b \in B$ jsou takové, že $(a, b) \in S$. Protože $S \subseteq R$, pak $(a, b) \in R$ a ze symetrie R dostaneme $(b, a) \in R$. Ale také $(b, a) \in B \times B$, proto $(b, a) \in S$.

(iii): Nechť $a, b \in B$ jsou takové, že $(a, b) \in S$ a $(b, a) \in S$. Protože $S \subseteq R$, pak $(a, b) \in R$ a $(b, a) \in R$, z antisymetrie R pak hned dostaneme $a = b$.

5b.12: (i): Nechť R reflexivní. Pro $a \in A$ pak $(a, a) \in R$, proto po prohození prvků $(a, a) \in R^{-1}$, R^{-1} je reflexivní.

(ii): Nechť R je symetrická. Jestliže $(a, b) \in R^{-1}$, pak $(b, a) \in R$, ze symetrie $(a, b) \in R$ a tedy $(b, a) \in R^{-1}$. R^{-1} je symetrická.

(iii): Nechť R je antisymetrická. Jestliže $(a, b) \in R^{-1}$ a $(b, a) \in R^{-1}$, pak $(b, a) \in R$ a $(a, b) \in R$, z antisymetrie $a = b$. R^{-1} je symetrická.

b) Všechny obměny vypadají „jestliže S nemá vlastnost V , tak jině ani R “. Důkazy:

(i) Předpoklad: S není reflex. Pak $\exists a \in B$ takové, že $(a, a) \notin S$. Ale $S \subseteq R$, proto $(a, a) \notin A$, zároveň $a \in A$, proto R není anreflex.

(ii) Předpoklad: S není sym. Pak $\exists a, b \in B$ takové, že $(a, b) \in S$ ale $(b, a) \notin S$. Protože $S \subseteq R$, je $(a, b) \in R$. A protože je S restrikce R , podle definice nemůže mít R dvojici z prvků B , kterou S nemá, tedy $(b, a) \notin R$. Takže R není sym.

(ii) Předpoklad: S není antisym. Pak $\exists a, b \in B$ takové, že $(a, b) \in S$, $(b, a) \in S$ ale $a \neq b$. Protože $S \subseteq R$, tak $(a, b) \in R$ a $(b, a) \in R$, zároveň $a \neq b$, tedy R není antisym.

c) (i) Sporem: Předpoklad: R je reflex, ale S není reflex. Z toho druhého $\exists a \in B$ takové, že $(a, a) \notin S$. Ale $S \subseteq R$, proto $(a, a) \notin A$, zároveň $a \in A$, tedy $(a, a) \in R$. Dvojice (a, a) zároveň je i není v R , to je spor.

(ii), (iii): obdobně.

5b.13: Jak víme, že k danému a existuje b , které je s ním v relaci?

5c. Vlastnosti relací a operace

V této části se podíváme na souvislosti mezi operacemi, které lze s relacemi provádět, a základními čtyřmi vlastnostmi. Je to část do jisté míry doplňková, od čtenáře se nečeká, že by se ta tvrzení třeba učil nazpaměť, cílem je zamyslet se nad fungováním relací, ujistit se, že jim rozumíme, a potrénovat si vytváření důkazů (většina je snadná a přímočará). Jsou tam nicméně témata (testování pomocí matic, uzávěry relací), která mohou být užitečná pro ty, kteří se budou relacemi zabývat hlouběji. Pro lepší přehlednost naše zkoumání rozdělíme do témat.

5c.1 Testování vlastností

Šlo by poznat, zda nějaká vlastnost platí, jinak než podle definice? Jednou z možností je přeložit podmínky z definice do řeči operací. Souvislost se nabízí, například u symetrie obracíme pořadí ve dvojicích, což určitě nějak souvisí s inverzní relací, u tranzitivity zase dvojice napojujeme, což je hlavní myšlenka skládání relací.

Věta 5c.2.

Nechť R je relace na nějaké množině A .

(i) R je reflexivní právě tehdy, když $\Delta(A) \subseteq R$.

(ii) R je symetrická právě tehdy, když $R = R^{-1}$.

(iii) R je antisymetrická právě tehdy, když $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta(A)$

(iv) R je tranzitivní právě tehdy, když $R^2 \subseteq R$.

Toto tvrzení by se v typickém matematickém textu dokázalo větou „Důkaz je zřejmý“. Udělejme si stručný rozbor. Každé z tvrzení je ekvivalence, takže bude třeba dokázat dvě implikace, tam a zpátky. Je tedy potřeba

dokázat osm implikací. Když si rozmyslíte strukturu důkazu a pak přeložíte použité pojmy podle definice, zjistíte, že to je snadné, viz cvičení 5c.1. Rovnou upozorníme na klíčový prvek. Protože se v tvrzeních pracuje s inkluzí mezi relacemi, bude vhodné se na ně dívat jako v definici, tedy coby množiny dvojic, a používat jazyk $(a, b) \in R$. Pokud by chtěl někdo mermomocí pracovat se značením aRb , musel by si inkluze v tvrzeních přeložit do tohoto jazyka.

Spojením (iv) a faktu 5a.13 dostaneme, že pro tranzitivní relace platí $R^n \subseteq R$. To se dá zajímavě vylepšit, protože reflexivita zase dává inkluzi opačnou (viz cvičení 5c.6). Dostáváme tak následující tvrzení.

Věta 5c.3.

Nechť R je relace na množině A . Jestliže je R reflexivní a tranzitivní, tak $R^n = R$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Dalším zajímavým nápadem je rozpoznávat vlastnosti pomocí matice relace. Už to téměř máme. Věta 5c.2 spojuje vlastnosti relací s množinovými operacemi, ty jsou zase díky faktům 5a.6 a 5a.7 svázány s operacemi maticovými. Jediné, co z věty 5c.2 zatím neumíme vyjádřit pomocí matic, je inkluze mezi relacemi. Zavedeme si na to vhodný pojem.

Definice.

Nechť M, N jsou dvě matice $m \times n$. Píšeme $M \leq N$, jestliže $m_{ij} \leq n_{ij}$ pro všechna $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$.

Zde je třeba upozornit, že jde o speciální pojem pro matice relací. Obecně se u matic nerovnost nezavádí, protože není definice, která by dokázala rozumně spolupracovat s dalšími pojmy, které se u matic používají. V některých oborech si proto soukromně nerovnost udělají tak, aby se jim hodila, jako my teď. Ukážeme, že jsme ji vymysleli dobře.

Fakt 5c.4.

Nechť jsou R_1 a R_2 relace na stejné množině A s maticemi M_1 a M_2 . Pak $R_1 \subseteq R_2$ právě tehdy, když $M_1 \leq M_2$.

Důkaz necháváme jako cvičení 5c.3. Je založen na tom, že každý prvek a nějaké 01-matice má povoleny pouze hodnoty 0 a 1, takže nerovnost $1 \leq a$ již nutně značí $a = 1$, naopak $a \leq 0$ značí $a = 0$.

Kombinací výše citovaných vět okamžitě dostáváme následující:

Věta 5c.5.

Nechť je R relace na nějaké n -prvkové množině A a nechť je M její reprezentující matice.

- (i) R je reflexivní právě tehdy, když $E_n \leq M$.
- (ii) R je symetrická právě tehdy, je-li M symetrická.
- (iii) R je antisymetrická právě tehdy, když $M \wedge M^T \leq E$.
- (iv) R je tranzitivní právě tehdy, když $M^{[2]} \leq M$.

Důkaz je opět snadný a necháme jej z větší části jako cvičení 5c.4, jen podotkneme jako nápovědu, že v části (i) ta nerovnost nutí M mít na diagonále jedničky.

5c.6 Kartézský součin

Před chvílí jsme se naučili „porovnávat“ matice podle toho, co dělají jejich prvky. Obecně jsme někdy v situaci, kdy pracujeme s komplikovanými objekty, které jsou poskládány ze složek. My už nějaké relace mezi složkami máme a rádi bychom z toho odvodili relaci o celých objektech. Takto obecně odpověď neexistuje, protože ony složky se mohou na chování celého objektu podílet mnoha různými způsoby. Abychom se k něčemu dostali, omezíme se na jednoduchou ale užitečnou strukturu.

Představme si kartézský součin množin, přičemž na každé z nich máme nějakou relaci. Pracujeme tedy s vektory, kde u každé souřadnice máme nějakou relaci, tedy způsob, jak propojovat (či nepropojovat) prvky. Pokud pak chceme dělat závěry o celých vektorech, nabízí se jednoduchá myšlenka: Podíváme se na každou souřadnici zvlášť. Zavedeme si to formálně.

Definice.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, pro $i = 1, \dots, n$ nechť R_i je relace z nějaké množiny A_i do množiny B_i . Označme $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ a $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$. Definujeme relaci R z A do B zvanou **součinnové uspořádání (product order)** následovně: Pro $(a_1, \dots, a_n) \in A$, $(b_1, \dots, b_n) \in B$ platí $(a_1, \dots, a_n)R(b_1, \dots, b_n)$ právě tehdy, když $a_i R_i b_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$.

Takže chceme-li vědět, zda jsou dva vektory v relaci, tak se podíváme, zda to platí pro všechny složky. Nejčastěji se pracuje se situací, kdy $A_i = B_i$, jinými slovy, máme relace R_i na množinách A_i a chceme porovnávat vektory z $A_1 \times \dots \times A_n$.

Příklad 5c.a: Uvažujme kartézský součin $A = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Na první souřadnici, tedy na $A_1 = \mathbb{R}$, mějme relaci $<$; na druhé souřadnici, tedy $A_2 = \mathbb{N}$, uvažujme relaci dělitelnosti $a | b$ neboli b je násobek a (viz kapitola 2). Tím vzniká součinná relace na vektorech z $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

Máme například $(-1, 4)R(\pi, 12)$, protože $-1 < \pi$ a 4 dělí 12, podobně třeba $(2, 13)R(e, 26)$, ale už neplatí $(1, 6)R(2, 8)$, protože 6 nedělí 8. Neplatí také $(1, 9)R(0, 18)$, kde selhává relace $<$ u první složky, a už vůbec ne $(13, 13)R(11, 23)$.

Nějaké závěry z téhle relace dělat nebudeme, byl to jen takový příklad, ať se ujistíme, že tomu opravdu dobře rozumíme.

△

Obvykle jsou všechny množiny A_i, B_i stejné a uvažujeme na nich stejnou relaci.

Příklad 5c.b: Uvažujme relaci $=$ na \mathbb{R} . Pokud zvolíme $A_1 = A_2 = \dots = A_n = B_1 = \dots = B_n = \mathbb{R}$, pak $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \mathbb{R}^n = B$, vznikne tedy relace na klasickém prostoru reálných vektorů. Podle definice jsou dva vektory $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ spolu v součinné relaci R právě tehdy, pokud pro všechna i máme $x_i = y_i$. Jinými slovy, v tomto příkladě nám vzniká běžná rovnost vektorů.

△

Součinnou relaci nejčastěji používáme právě takto, když jsou všechny relace R_i stejné. Pro výslednou relaci R se pak dokonce často používá stejná značka jako pro původní R_i , což je zrovna případ rovnosti vektorů.

Podobně můžeme uvažovat reálná čísla s relací \leq , pro n -rozměrné vektory z \mathbb{R}^n pak vzniká součinná relace, kterou můžeme zase značit \leq a platí, že $(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n)$ právě tehdy, pokud pro všechna i máme $x_i \leq y_i$. Přesně tuto myšlenku jsme použili při porovnávání matic, konec konců si matice můžeme přeorganizovat na vektory třeba položením řádků za sebe a pak využít příslušnou teorii.

Je snadné ukázat, že pokud mají všechny relace R_i nějakou z vyšetřovaných vlastností, tak ji má příslušná součinná relace také.

Fakt 5c.7.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, pro $i = 1, \dots, n$ nechť R_i je relace na nějaké množině A_i . Uvažujme odpovídající součinnou relaci R na $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Pak platí:

- (i) Jestliže jsou pro všechna $i = 1, \dots, n$ relace R_i reflexivní, pak je R reflexivní.
- (ii) Jestliže jsou pro všechna $i = 1, \dots, n$ relace R_i symetrické, pak je R symetrická.
- (iii) Jestliže jsou pro všechna $i = 1, \dots, n$ relace R_i antisymetrické, pak je R antisymetrická.
- (iv) Jestliže jsou pro všechna $i = 1, \dots, n$ relace R_i tranzitivní, pak je R tranzitivní.

Důkaz (rutinní): R: Nechť $(a_i) = (a_1, \dots, a_n) \in A$. Protože jsou všechna R_i reflexivní, tak $a_i R_i a_i$ pro všechna i , tedy dle definice součinné relace $(a_i)R(a_i)$.

Ostatní tři vlastnosti s důvěrou přenecháme čtenáři, viz cvičení 5c.5

□

Součinné uspořádání je první, co člověka u kartézského součinu napadne, a věta ukazuje, že tento nápad nefunguje špatně. Další výhodou je snadné používání díky jednoduché definici. U rovnosti vektorů se nám tento přístup výloženě osvědčil. U nerovností už to bohužel tak dobré není.

Příklad 5c.c: Uvažujme relaci $<$ na \mathbb{R} . Součinná relace s volbou $A_1 = A_2 = \dots = A_n = \mathbb{R}$ nám dá jakési porovnávání vektorů z \mathbb{R}^n , které zase můžeme značit $<$. Například při volbě $n = 2$ můžeme psát $(-1, 4) < (0, 13)$, protože platí $-1 < 0$ a také $4 < 13$.

Podobně můžeme definovat nerovnost \leq pro vektory či stejným způsobem porovnávat matice. Co by se nám na takovém přístupu nemuselo líbit? Všimněte si, že jsme napsali $(-4, -3) < (1, 0)$, jenže to je proti geometrické

intuici. U vektorů je totiž důležitá hlavně magnituda a zde máme $\|(-4, -3)\| = 5$ a $\|(1, 0)\| = 1$, což neodpovídá součinné nerovnosti $(-4, -3) < (1, 0)$. Lepší nápad na porovnávání vektorů se neobjevil, čímž se vysvětluje, proč nemáme obecně zavedenou a uznávanou nerovnost mezi vektory. Podobně nemáme srovnání mezi maticemi. Ten součinný nápad vede například na případy, kdy $A \leq B$, ale $\det(A) > \det(B)$, to také není příjemné.

△

Z pohledu diskrétní matematiky nás problémy s determinantem matice či velikostí vektoru netrápí, ale je tu zase jiný problém. U nerovnosti na číslech jsme zvyklí, že kdykoliv dostaneme dvě čísla, dokážeme říct, jak stojí v hierarchii velikosti (s možnostmi stejné, první větší, druhé větší). Představme si teď, že pracujeme ve světě \mathbb{R}^2 a porovnáváme součinnou relací \leq . Když narazíme třeba na vektory $(1, 2)$ a $(2, 1)$, tak máme smůlu, naší součinnou relací je neumíme porovnat. Jsou aplikace, kde je takový problém smrtící.

Typickým příkladem je řazení lidí podle abecedy. Budeme-li slova považovat za vektory písmen, přičemž pro jednotlivá písmena máme srovnání dle abecedy, pak součinná relace není schopna porovnat například jména Adam a Bára. Podle první složky (písmena) vede Adam (A je před B), zatímco podle druhé Bára, tento rozpor součinná relace nerozchodí. Jenže my potřebujeme umět řadit slova nějak za sebe.

Existuje více způsobů, jak ze znalosti srovnání na složkách vytvářet relaci na vektorech. Některé fungují lépe, jiné hůře a jeden z nich elegantně vyřeší náš problém s řazením slov. Na to si ale počkáme do kapitoly o částečném uspořádání, viz 4b.17.

5c.8 Vlastnosti a operace

Tato sekce je asi nejvíce „bonusová“ a není záměrem si z ní odnést nějaké konkrétní (zapamatované) poznatky či myšlenky o relacích. Je nicméně zábavné položit si několik přirozených otázek a zjistit, že na ně umíme snadno odpovědět. Tato sekce je tak zejména cvičením našeho porozumění relacím a schopnosti psát důkazy.

Prozkoumáme následující situaci. Máme dvě relace, o kterých víme, že splňují určité vlastnosti. Když je spojíme pomocí nějaké matematické operace, jaké vlastnosti bude mít relace, kterou tím vytvoříme? Začneme množinovými operacemi. Doporučujeme, aby si čtenář nejprve na rozličných konkrétních případech zkusil rozmyslet, jak to funguje a proč asi následující tvrzení platí.

Fakt 5c.9.

Nechť R_1 a R_2 jsou relace na množině A .

(i) Jestliže jsou R_1 a R_2 reflexivní, tak jsou $R_1 \cup R_2$ a $R_1 \cap R_2$ reflexivní a $R_1 - R_2$ není reflexivní pro $A \neq \emptyset$.

(ii) Jestliže jsou R_1 a R_2 symetrické, tak jsou $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ a $R_1 - R_2$ symetrické.

(iii) Jestliže jsou R_1 a R_2 antisymetrické, tak jsou $R_1 \cap R_2$ a $R_1 - R_2$ antisymetrické.

(iv) Jestliže jsou R_1 a R_2 tranzitivní, tak je $R_1 \cap R_2$ tranzitivní.

Důkaz necháme zčásti jako cvičení 5c.7, ukážeme jen pár zajímavějších momentů. Protože zde používáme množinové operace, bude rozumnější pracovat s relacemi jako s množinami (což je konec konců jejich definice), tedy píšeme správně $(a, b) \in R$ namísto pohodlné zkratky aRb .

Důkaz (rutinní): (i): $R_1 - R_2$ není reflexivní: Nechť $a \in A$. Protože je R_1 reflexivní, je $(a, a) \in R_1$. Podobně ale také $(a, a) \in R_2$, proto (a, a) neleží v $R_1 - R_2$.

(ii): $R_1 \cap R_2$ symetrická: Nechť $a, b \in A$ splňují $(a, b) \in R_1 \cap R_2$. To znamená, že $(a, b) \in R_1$ a $(a, b) \in R_2$. Obě relace jsou symetrické, proto $(b, a) \in R_1$ a $(b, a) \in R_2$, tedy $(b, a) \in R_1 \cap R_2$.

$R_1 - R_2$ symetrická: Nechť $a, b \in A$ splňují $(a, b) \in R_1 - R_2$. Pak $(a, b) \in R_1$ a ta je symetrická, proto i $(b, a) \in R_1$. Potřebujeme ukázat, že je také v $R_1 - R_2$. Mohlo by se stát, že $(b, a) \in R_2$? Nemohlo. Kdyby totiž $(b, a) \in R_2$, tak z její symetrie je i $(a, b) \in R_2$, což je ve sporu s $(a, b) \in R_1 - R_2$. Takže $(b, a) \notin R_2$ a máme $(b, a) \in R_1 - R_2$.

(iii) $R_1 - R_2$ antisymetrická: Nechť $(a, b) \in R_1 - R_2$ a $(b, a) \in R_1 - R_2$. Pak $(a, b) \in R_1$ a $(b, a) \in R_1$, ta je antisymetrická a proto $a = b$.

□

Možná ještě užitečnější než ty důkazy bude zamyslet se nad tím, co se ve faktu neříká.

Proč chybí v (iii) sjednocení? Zkusíme si takové tvrzení dokázat, ať vidíme, kde je zádrhel. Nechť $a, b \in A$ jsou takové, že $(a, b) \in R_1 \cup R_2$ a $(b, a) \in R_1 \cup R_2$. Teď bychom rádi použili antisymetrii z předpokladu, jenže ta platí pro R_1 a pro R_2 jako samostatné relace, čili bychom potřebovali ty dvojice donutit, aby se sešly v jedné relaci, tedy aby platilo $(a, b) \in R_1$ a $(b, a) \in R_1$, popřípadě totéž s R_2 . Je ale zjevné, že se nám to nemůže povést, protože jsme $a, b \in A$ nuceni volit libovolně, tedy nemáme možnost si je vybrat nějak speciálně. Zkusíme na tomto problému založit protipříklad, stačí k tomu $A = \{1, 2\}$.

$R_1 = \{(1, 2)\}$ je antisymetrická, $R_2 = \{(2, 1)\}$ také, ale $R_1 \cup R_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ už není. Takže je dobře, že jsme v tvrzení (iii) vynechali sjednocení.

Poznamenejme pro úplnost, že na druhou stranu není zaručeno, že se antisymetrie u sjednocení vždy pokazí, protože se může stát, že se ty dvě relace dobře sejdou a sjednocení antisymetrické bude (konec konců, stačí vzít $R_1 = R_2$). Proto jsme také v (iii) nenapsali natvrdo, že antisymetrie $R_1 \cup R_2$ selže, na rozdíl od (i), kde bylo selhání reflexivity zaručeno.

Podobně si rozmyslete, kde se zarazí důkaz tranzitivity pro sjednocení a rozdíl (cvičení 5c.8), a ověřte, že protipříkladem pro sjednocení jsou třeba relace $R_1 = \{(1, 2)\}$ a $R_2 = \{(2, 3)\}$ na $A = \{1, 2, 3\}$, protipříkladem pro rozdíl třeba $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ a $R_2 = \{(1, 3)\}$.

Další operací s relacemi je skládání.

Fakt 5c.10.

Nechť R a S jsou relace na množině A .

Jestliže jsou R a S reflexivní, pak je i $S \circ R$ reflexivní.

Důkaz (rutinní): Nechť $a \in A$. Protože jsou R i S reflexivní, dostáváme $(a, a) \in R$ a $(a, a) \in S$ (navazující dvojice), takže podle definice skládání $(a, a) \in S \circ R$. □

Určitě jste si všimli, že ve faktu chybí symetrie, antisymetrie a tranzitivita. Kde je problém? Zkusme začít důkaz pro symetrii. Nechť $a, b \in A$ splňují $(a, b) \in S \circ R$. Pak existuje $x \in A$ takové, že $(a, x) \in R$ a $(x, b) \in S$. Obě relace jsou symetrické, máme tedy $(b, x) \in S$ a $(x, a) \in R$, tedy $(b, a) \in R \circ S$. Těsně vedle, máme opačné pořadí v tom skládání; potřebovali bychom $(b, a) \in S \circ R$. Zkusme na tomto průšvihů založit protipříklad, použijeme $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Relace $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ a $S = \{(2, 3), (3, 2)\}$ jsou symetrické, ale $S \circ R = \{(1, 3)\}$ není. Takže se symetrie při skládání opravdu obecně nezachová.

Mimořádně, pokud by bylo $R = S$, tak už náš problém odpadá, takže pro mocninu by náš pokus o důkaz prošel, viz níže.

Teď ta antisymetrie. Vezměme $a, b \in A$ takové, že $(a, b) \in S \circ R$ a $(b, a) \in S \circ R$. Z toho prvního podle definice skládání dostaneme $\exists x \in A: aRx$ a xSc . Z toho druhého zase dostaneme $\exists y \in A: bRy$ a ySa . Máme tedy aRx a bRy , ale nemůžeme čekat, že by platilo $a = b$ a $x = y$, abychom mohli použít antisymetrii relace R . Je to tedy podezřelá a další bádání ukáže, že oprávněně. Uvažujme relaci $R = \{(1, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 1)\}$. Tato relace je antisymetrická. Snadno se ale nahlédne, že $R \circ R = R^2 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$, což není ani náhodou relace antisymetrická (shodou okolností je ale symetrická).

Mimořádně jsme tím ukázali, že antisymetrie se nezachová ani umocňováním.

Pro tranzitivitu si důkaz zkusíte sami, abyste viděli, kde se zadrhne. Tradiční protipříklad, abyste věřili, že to nefunguje: $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$ a $S = \{(2, 3), (4, 5)\}$ jsou relace tranzitivní (žádné navazující dvojice ani jedna z nich nemá, tudíž tranzitivita platí triviálně), složením ale dostaneme $Z = S \circ R = \{(1, 3), (3, 5)\}$, kde lze vytvořit řetízek 1Z3Z5, který na jeden krok nezvládneme, dvojice (1, 5) v tom složení není.

O mocnině jsme se nezmiňovali náhodou, to je totiž velice speciální případ skládání a dá se doufat, že se bude i lépe chovat.

Věta 5c.11.

Nechť R je relace na množině A .

(i) Jestliže je R reflexivní, pak je R^n reflexivní pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Jestliže je R symetrická, pak je R^n symetrická pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Jestliže je R tranzitivní, pak je R^n tranzitivní pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz (drsný, poučný): (i): Plyne okamžitě indukci pomocí faktu 5c.10, viz cvičení 5c.9.

Zbývající důkazy budou silně založeny na lemma 5a.12 o řetízích.

(ii): Nechť $a, b \in A$ splňují $(a, b) \in R^n$. Pak existuje řetízek délky n z a do b , řekněme $aRc_2Rc_3R \cdots Rc_nRb$. Protože je R symetrická, lze všechny dvojice c_iRc_{i+1} obrátit na $c_{i+1}Rc_i$ a dostaneme řetízek $bRc_nRc_{n-1}R \cdots Rc_2Ra$ délky n z b do a , proto $(b, a) \in R^n$.

(iii): Nechť $a, b, c \in A$ splňují $(a, b) \in R^n$ a $(b, c) \in R^n$. Pak existuje řetízek délky n z a do b , řekněme $aR\hat{c}_2R \cdots R\hat{c}_nRb$, a řetízek délky n z b do c , řekněme $bR\check{c}_2R \cdots R\check{c}_nRc$. Protože $\hat{c}_{n+1} = b = \check{c}_1$, lze tyto řetízky navázat a dostaneme řetízek délky $2n$, $aR\hat{c}_2R \cdots R\hat{c}_nR\check{c}_1R\check{c}_2R \cdots R\check{c}_nRc$.

Tento řetízek obsahuje celkem $2n$ relací, proto jej lze rozdělit na dvojice $\hat{c}_1 R \hat{c}_2 R \hat{c}_3$, $\hat{c}_3 R \hat{c}_4 R \hat{c}_5$, \dots , $\tilde{c}_{n-1} R \tilde{c}_n R c$. Na každou z nich aplikujeme tranzitivitu a dostaneme n dvojic $\hat{c}_1 R \hat{c}_3$, $\hat{c}_3 R \hat{c}_5$, \dots , $\tilde{c}_{n-1} R c$. Ty tvoří řetízek z a do c , proto $(a, c) \in R^n$ a je to hotovo.

Poznámka: Doporučujeme čtenáři, aby si rozmyslel, jak to zkracování probíhá v místě, kde se napojují původní dva řetízky, je třeba rozlišit případy n sudé a n liché. □

Připomeňme, že antisymetrie se mocninou zachovat nemusí.

5c.12 Uzávěry relace

Tato sekce je spíš doplňková, ale na druhou stranu občas docela zábavná. Je to také dobrý trénink čtení matematiky, protože definice rozšíření obsahuje nápady, které jsme tu ještě neměli.

Základní situace je jednoduchá. Máme relaci, která nesplňuje určitou vlastnost a nás to mrzí. Zkoušet to vylepšit odebráním dvojic je nejisté, navíc bychom tím ztráceli informaci, kterou ta relace nese. V řadě aplikací ale nevádí, když si do relace nějaké dvojice přidáme, zároveň brzy uvidíme, že se tak nabízí realistická šance opravdu dosáhnout splnění některých vlastností. Je to dokonce způsob přirozený, například pokud relace není reflexivní, tak jí chybí některá z dvojic (a, a) , což vyloženě volá po tom, abychom je přidali.

Protože ale nechceme původní relaci příliš měnit, snažíme se přidat co nejméně dvojic. Co tedy chceme? Máme-li relaci R a vlastnost P , tak chceme najít relaci S , která v sobě zahrnuje R , splňuje P a navíc je to nejmenší relace, která to umí. Jak se tento požadavek vyjádří matematictínou? Existuje na to standardní postup.

Definice.

Uvažujme nějakou relaci R na nějaké množině A . Je-li P některá z vlastností relace, pak definujeme **P -uzávěr** relace R jako relaci S , která

- (i) splňuje $R \subseteq S$,
- (ii) má vlastnost P a
- (iii) kdykoliv je T relace s vlastností P splňující $R \subseteq T$, pak nutně $S \subseteq T$.

U některých vlastností je vcelku jasné, co udělat, u tranzitivity to dá trochu práce.

Věta 5c.13.

Nechť R je relace na množině A .

- (i) Její **reflexivní uzávěr** (**reflexive closure**) je dán jako $R \cup \Delta(A)$.
- (ii) Její **symetrický uzávěr** (**symmetric closure**) je dán jako $R \cup R^{-1}$.
- (iii) Její **tranzitivní uzávěr** (**transitive closure**) je dán jako $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$.

Rovnou si všimneme, že ve všech vzorcích přidáváme dvojice k původní relaci, takže první podmínka z definice uzávěru platí. Klíčové tedy bude dokázat další dvě podmínky: že uvedená relace má opravdu požadovanou vlastnost a že to nejde s menší relací, tedy že jakmile máme nějakou „nadrelaci“ dané R s vlastností P , tak už je ta naše v ní také. Důkazy, které ukážeme, jsou spíše technické, sice jsou korektní, ale není z nich vidět, jak jsme vlastně k těm vzorcům došli. Pro člověka, který chce matematiku pochopit, je přitom technický důkaz mnohem méně důležitý než to, jak se dotyčná věc vymyslí. Proto si ještě před důkazem celou situaci rozmyslíme.

Reflexivní uzávěr je jasný na první pohled a ten symetrický na druhý pohled. Máme-li dvojici $(a, b) \in R$, pak potřebujeme mít v relaci také dvojici (b, a) , ale tu najdeme právě v R^{-1} . Nejtěžší je tranzitivní uzávěr.

Při testování tranzitivity bereme všechny možné dvojkroky $(a, b), (b, c) \in R$. Potřebujeme zajistit, aby se v relaci objevila dvojice (a, c) , ale tu najdeme ve složené relaci $R \circ R = R^2$, která vzniká právě z takovýchto dvojkroků. Určitě tedy budeme pracovat s relací $S = R \cup R^2$. Může to být hledaný uzávěr?

Jak testujeme tranzitivitu této relace? Vezmeme $(a, b), (b, c) \in S$ a ptáme se, zda S obsahuje zkratku (a, b) . Pokud by (a, b) a (b, c) ležely v R , tak určitě $(a, b) \in S$, tak jsme to zařídili. Jenže (a, b) či (b, c) mohou být jedny z těch dvojic, které jsme nově doplnili, a pro ty nic nevíme.

Například u relace $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ chybí zkratky $(1, 3)$ a $(2, 4)$, ale když je doplníme, vznikne relace, ve které lze uvažovat dvojkrok $(1, 3)$ a $(3, 4)$, jehož zkratka $(1, 4)$ v doplněné relaci zase chybí.

V dalším kole bychom se tedy měli podívat na tyto nově vzniklé páry a doplnit příslušné zkratky. Navazující původní a nový pár se najde jako prvek $R^2 \circ R = R^3$, dva navazující nové páry se najdou jako prvky $R^2 \circ R^2 = R^4$, takže i tyto musíme přidat. Tím ale mohly vzniknout nové páry atd. až do zblbnutí. Výsledný vzorec je nasnadě. Pokud vám něco připomíná, podívejte se na connectivity relation.

Důkaz (poučný, drsný): (ii): Nejprve je třeba ukázat, že $R \cup R^{-1}$ je symetrická relace, to necháme jako cvičení 5c.12. Teď dokážeme tu minimalitu.

Nechť T je nějaká symetrická relace, která obsahuje R . Potřebujeme dokázat, že $R \cup R^{-1} \subseteq T$. Inkluzi $R \subseteq T$ už máme od začátku, zbývá dokázat, že $R^{-1} \subseteq T$.

Nechť $(a, b) \in R^{-1}$. Pak $(b, a) \in R$, proto i $(b, a) \in T$. Ale T je symetrická, proto i $(a, b) \in T$. Důkaz hotov.

(iii): Označme $R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$. Už podle definice je jasné, že $R \subseteq R^*$.

Je R^* tranzitivní? Předpokládejme, že $(a, b) \in R^*$ a $(b, c) \in R^*$. Pak existují $m, n \in \mathbb{N}$ takové, že $(a, b) \in R^m$ a $(b, c) \in R^n$. Podle lemma 5a.12 o řetízích proto existuje řetízek délky m z a do b , nazvěme jeho prvky $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{m+1}$, a existuje řetízek délky n z b do c , nazvěme jeho prvky $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{n+1}$. Všimněte si, že $\tilde{c}_{m+1} = b = \hat{c}_1$. Teď tyto řetízky napojíme: Definujeme $c_i = \tilde{c}_i$ pro $i = 1, \dots, m+1$ a $c_i = \hat{c}_{i-m}$ pro $i = m+2, \dots, m+n+1$. Je snadné ověřit, že pak c_1, \dots, c_{m+n+1} tvoří řetízek délky $m+n$ z a do c a proto $(a, c) \in R^{m+n} \subseteq R^*$. R^* tedy je tranzitivní.

Je R^* minimální relace s touto vlastností? Nechť T je relace taková, že $R \subseteq T$ a T je tranzitivní. Dokážeme indukcí, že $R^n \subseteq T$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(0) $n = 1$: Evidentně $R \subseteq T$, je to jedna z vlastností T .

(1) Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné, předpokládejme, že $R^n \subseteq T$. Chceme dokázat, že $R^{n+1} \subseteq T$.

Nechť (a, b) je libovolný prvek z $R^{n+1} = R \circ R^n$. Pak existuje $x \in A$ takové, že $(a, x) \in R^n$ a $(x, b) \in R$. Podle indukčního předpokladu pak $(a, x) \in T$ a podle (0) také $(x, b) \in T$. A protože je T tranzitivní, nutně $(a, b) \in T$. Tím je důkaz hotov. □

Ne všechny vlastnosti se dají získat přes uzávěr, například pro vytvoření antisymetrické relace z nějaké R bychom spíš potřebovali z R prvky odebírat než přidávat. Antisymetrický uzávěr bychom tedy sice definovat mohli, ale pak bychom museli konstatovat, že obecně neexistuje.

Další fakta o uzávěrech najdete ve cvičeních, jednoduché příklady jsou ve cvičení 5c.11. Pro jeden užitečný uzávěr se můžete podívat na cvičení 4a.17.

Cvičení

Cvičení 5c.1 (rutinní): Nechť R je relace na nějaké množině A . Dokažte následující (viz věta 5c.2):

- (i) R je reflexivní právě tehdy, když $\Delta(A) \subseteq R$.
- (ii) R je symetrická právě tehdy, když $R = R^{-1}$.
- (iii) R je antisymetrická právě tehdy, když $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta(A)$
- (iv) R je tranzitivní právě tehdy, když $R^2 \subseteq R$.

Cvičení 5c.2 (rutinní): Pro relace zadané následujícími maticemi vyšetřete čtyři základní vlastnosti.

$$(i) M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (ii) M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (iii) M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 5c.3 (rutinní, poučné): Nechť jsou R_1 a R_2 relace na stejné množině A s maticemi M_1 a M_2 . Dokažte, že $R_1 \subseteq R_2$ právě tehdy, když $M_1 \leq M_2$ (viz fakt 5c.4).

Cvičení 5c.4 (rutinní, poučné): Nechť je R relace na nějaké n -prvkové množině A a nechť je M její reprezentující matice. Dokažte následující (viz věta 5c.5):

- (i) R je reflexivní právě tehdy, když $E_n \leq M$.
- (ii) R je symetrická právě tehdy, je-li M symetrická.
- (iii) R je tranzitivní právě tehdy, když $M^{[2]} \leq M$.

Cvičení 5c.5 (rutinní): Nechť pro $i = 1, \dots, n$ je R_i relace na množině A_i . Nechť R je odpovídající součinová relace na $A = A_1 \times \dots \times A_n$. Dokažte následující:

- (i) Jestliže jsou všechny R_i symetrické, pak je i R symetrická.
- (ii) Jestliže jsou všechny R_i antisymetrické, pak je i R antisymetrická.
- (iii) Jestliže jsou všechny R_i tranzitivní, pak je i R tranzitivní.

Viz fakt 5c.7

Cvičení 5c.6 (rutinní, poučné): Dokažte následující tvrzení pro relaci R na množině A . Jestliže je R reflexivní, pak $R \subseteq R^n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Platí dokonce obecnější tvrzení: jestliže je R reflexivní relace na A , pak pro libovolnou relaci S na A platí $S \subseteq S \circ R$ a $S \subseteq R \circ S$. Dokažte jej.

Cvičení 5c.7 (rutinní, poučné): Nechť R_1, R_2 jsou relace na A . Dokažte následující (viz fakt 5c.9):

- (i) Jestliže jsou R_1, R_2 reflexivní, pak je i $R_1 \cap R_2$ reflexivní.
- (ii) Jestliže jsou R_1, R_2 reflexivní, pak je i $R_1 \cup R_2$ reflexivní.
- (iii) Jestliže jsou R_1, R_2 symetrické, pak je i $R_1 \cup R_2$ symetrická.
- (iv) Jestliže jsou R_1, R_2 antisymetrické, pak je i $R_1 \cap R_2$ antisymetrická.
- (v) Jestliže jsou R_1, R_2 tranzitivní, pak je i $R_1 \cap R_2$ tranzitivní.

Cvičení 5c.8 (poučné): Nechť R_1, R_2 jsou relace na A .

- (i) Kde se zadrhne důkaz tvrzení „Jestliže jsou R_1, R_2 tranzitivní, pak je i $R_1 \cup R_2$ tranzitivní“?
- (ii) Kde se zadrhne důkaz tvrzení „Jestliže jsou R_1, R_2 tranzitivní, pak je i $R_1 - R_2$ tranzitivní“?

Cvičení 5c.9 (poučné): Nechť R je relace na A . Dokažte, že jestliže je reflexivní, tak také R^n je reflexivní pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Cvičení 5c.10 (poučné): (i) Dokažte, že pro každou relaci R na libovolné množině A jsou $R^{-1} \circ R$ a $R \circ R^{-1}$ symetrické relace.

(ii) Jestliže pro každé $a \in A$ existuje nějaké $b \in A$ takové, že $(a, b) \in R$, pak jsou $R^{-1} \circ R$ i $R \circ R^{-1}$ reflexivní relace.

Cvičení 5c.11 (rutinní): Uvažujme následující relace na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

- (i) $R_1 = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (3, 4)\}$;
- (ii) $R_2 = \{(1, 4), (1, 3), (4, 3), (2, 2)\}$.

a) Doplňte co nejúsporněji relaci R_1 tak, aby byla tranzitivní (jinými slovy, přidejte k ní nějaké další dvojice tak, aby výsledná relace byla tranzitivní, a přitom se přidal nejmenší možný počet dvojic, kterým lze tranzitivitu dosáhnout, viz 5c.12 uzávěr relace).

b) Doplňte co nejúsporněji relaci R_2 tak, aby byla symetrická a tranzitivní.

Cvičení 5c.12 (poučné): Nechť R je nějaká relace na množině A . Dokažte, že $R \cup R^{-1}$ je symetrická relace.

Cvičení 5c.13 (poučné, dobré): Dokažte, že symetrický uzávěr reflexivního uzávěru relace R je roven reflexivnímu uzávěru symetrického uzávěru R .

Cvičení 5c.14 (poučné, dobré): Dokažte, že tranzitivní uzávěr symetrického uzávěru relace R obsahuje symetrický uzávěr tranzitivního uzávěru R , ale nemusí se rovnat.

Cvičení 5c.15 (poučné, dobré): Nechť R, S jsou relace na stejné množině A . Předpokládejme, že pro obě existují uzávěry vzhledem k jisté vlastnosti P , označme je \hat{R} a \hat{S} . Dokažte, že jestliže $R \subseteq S$, pak $\hat{R} \subseteq \hat{S}$.

Cvičení 5c.16 (dobré): Nechť R je relace na množině A , která je reflexivní a tranzitivní. Definujme relaci S na A předpisem aSb právě tehdy, jestliže aRb a bRa (rozmyslete si, že $S = R \cap R^{-1}$).

Dokažte, že pak relace S je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Poznámka: Tímto způsobem lze z relace \leq vytvořit relaci $=$ na číslech.

Řešení:

5c.1: (i): 1) Je-li R reflexivní, pak $\forall a \in A: (a, a) \in R$, tedy $\Delta(A) \subseteq R$.

2): Jestliže naopak $\Delta(A) \subseteq R$, pak $\forall a \in A: (a, a) \in \Delta(A) \subseteq R$, tedy $(a, a) \in R$ a R je reflexivní.

(ii): 1) Nechť je R je symetrická. Chceme ukázat $R = R^{-1}$. Nechť $a, b \in A$ splňují $(a, b) \in R$. Pak podle symetrie také $(b, a) \in R$ a proto dle definice inverzní relace $(a, b) \in R^{-1}$. Takže $R \subseteq R^{-1}$.

Naopak nechť $(a, b) \in R^{-1}$. Pak $(b, a) \in R$ a podle symetrie $(a, b) \in R$. Takže také $R^{-1} \subseteq R$.

2) Teď předpokládejme, že $R = R^{-1}$, potřebujeme ukázat, že R je symetrická. Jestliže $a, b \in A$ jsou takové, že $(a, b) \in R$, pak podle $R \subseteq R^{-1}$ nutně musí být $(a, b) \in R^{-1}$ a tedy podle definice inverzní relace $(b, a) \in R$. R je tedy opravdu symetrická.

(iii): 1) Nechť je R je antisymetrická. Potřebujeme ukázat, že $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta(A)$. Vezměme libovolné $(a, b) \in R \cap R^{-1}$. Pak $(a, b) \in R$ a také $(a, b) \in R^{-1}$, tedy podle definice $(b, a) \in R$. Protože (a, b) i (b, a) jsou v R , podle antisymetrie nutně $a = b$ a proto $(a, b) \in \Delta(A)$.

2) Teď předpokládejme $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta(A)$, potřebujeme ukázat, že R je antisymetrická. Nechť tedy $a, b \in A$ jsou takové, že $(a, b) \in R$ a $(b, a) \in R$. Z toho druhého máme $(a, b) \in R^{-1}$, takže $(a, b) \in R \cap R^{-1}$. To je ale podmnožina $\Delta(A)$, takže $(a, b) \in \Delta(A)$. To je ovšem možné jen tehdy, když $a = b$.

(iv): 1) Nejprve předpokládejme, že R je tranzitivní, potřebujeme ukázat, že $R^2 \subseteq R$. Vezměme tedy libovolné $(a, b) \in R^2 = R \circ R$. Pak podle definice skládání musí existovat $x \in A$ takové, že $(a, x) \in R$ a $(x, b) \in R$. Podle tranzitivity potom také $(a, b) \in R$.

2) Předpokládejme naopak, že $R^2 \subseteq R$, chceme z toho vyvodit tranzitivitu. Vezměme teď libovolné $a, b, c \in A$ takové, že $(a, b) \in R$ a $(b, c) \in R$. Pak podle definice skládání $(a, c) \in R \circ R = R^2$. Předpoklad pak dává $(a, c) \in R$.

5c.2: Testy: Reflexivita znamená, že matice musí mít 1 všude na diagonále. Symetrie: matice musí být symetrická. Antisymetrie: porovnáváme dvojice čísel symetrické podle diagonály, nesmí být obě zároveň 1. Tranzitivita: Jedna možnost je použít Booleanovský součin. Druhá možnost je vypsat si z matice všechny nediagonální jedničky jako dvojice v relaci a zkoumat tranzitivitu na nich.

(i): R,T; (ii): S; (iii): R,A,T.

5c.3: 1) Předpoklad $R_1 \subseteq R_2$. Kdyby $m_{1,ij} = 0$, pak $m_{1,ij} \leq m_{2,ij}$, neboť jde o 01-matice. Kdyby $m_{1,ij} = 1$, pak $(a_i, a_j) \in R_1$, proto i $(a_i, a_j) \in R_2$ a $m_{2,ij} = 1$, tedy každopádně $m_{1,ij} \leq m_{2,ij}$.

2) Předpoklad $M_1 \leq M_2$. Když $(a_i, a_j) \in R_1$, tak $m_{1,ij} = 1$, z $m_{1,ij} \leq m_{2,ij}$ také $m_{2,ij} = 1$ (je to 01-matice), proto $(a_i, a_j) \in R_2$. Dokázáno $R_1 \subseteq R_2$.

5c.4: (i): Předpoklad R je reflexivní. Pro $i \neq j$ je $e_{ij} = 0$, proto $e_{ij} \leq m_{ij}$. Pro $i = j$ je $(a_i, a_i) \in R$, proto $m_{ij} = 1$ a $e_{ij} \leq m_{ij}$.

Předpoklad $E_n \leq M$. Pro každé i je $m_{ii} \geq e_{ii} = 1$, tedy $m_{ii} = 1$ a $(a_i, a_i) \in R$.

(ii): Předpoklad R symetrická. Když $m_{ij} = 1$, pak $(a_i, a_j) \in R$, proto $(a_j, a_i) \in R$ a $m_{ji} = 1$, tedy $m_{ij} = m_{ji}$. Když $m_{ij} = 0$, pak $(a_i, a_j) \notin R$, proto $(a_j, a_i) \notin R$ a $m_{ji} = 0$, tedy každopádně $m_{ij} = m_{ji}$.

Předpoklad M symetrická. Když $(a_i, a_j) \in R$, tak $m_{ij} = 1$, pak $m_{ji} = 1$ a $(a_j, a_i) \in R$.

(iii): Dle věty 5c.2 je R tranzitivní právě tehdy, když $R^2 \subseteq R$, což je dle (i) právě tehdy, když $M_{R^2} \leq M$, což je dle věty 5a.8 právě tehdy, když $M^{[2]} \leq M$.

5c.5: S: $(a_i)R(b_i) \implies a_i R_i b_i$ pro všechna i . Protože jsou všechny R_i symetrické, máme $b_i R_i a_i$ pro všechna i , tedy $(b_i)R(a_i)$.

A: $(a_i)R(b_i)$ a $(b_i)R(a_i) \implies \forall i: a_i R_i b_i$ a $b_i R_i a_i$. Protože jsou všechny R_i antisymetrické, máme $a_i = b_i$ pro všechna i , tedy $(a_i) = (b_i)$.

T: $(a_i)R(b_i)$ a $(b_i)R(c_i) \implies a_i R_i b_i$ a $b_i R_i c_i$ pro všechna i , z tranzitivit R_i tedy $a_i R_i c_i$ pro všechna i , proto $(a_i)R(c_i)$.

5c.6: Indukcí: (0) $n = 1: R \subseteq R = R^1$.

(1) Předpoklad: $R \subseteq R^n$.

Nechť $(a, b) \in R$. Pak $(a, b) \in R^n$, podle reflexivity $(b, b) \in R$ a proto $(a, b) \in R \circ R^n = R^{n+1}$. Proto $R \subseteq R^{n+1}$.

Obecné tvrzení: viz cvičení 5a.12.

5c.7: (i): Nechť $a \in A$. R_1 reflex tedy $(a, a) \in R_1$, R_2 reflex tedy $(a, a) \in R_2$, proto $(a, a) \in R_1 \cap R_2$.

(ii): Nechť $a \in A$. R_1 reflex tedy $(a, a) \in R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$.

(iii): Nechť $(a, b) \in R_1 \cup R_2$. Pak $(a, b) \in R_1 \vee (a, b) \in R_2$. Kdyby $(a, b) \in R_1$, pak ze symetrie R_1 bude $(b, a) \in R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$. Kdyby $(a, b) \in R_2$, pak ze symetrie R_2 bude $(b, a) \in R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$. Každopádně $(b, a) \in R_1 \cup R_2$.

(iv): Nechť $(a, b) \in R_1 \cap R_2$ a $(b, a) \in R_1 \cap R_2$. Pak $(a, b) \in R_1 \wedge (b, a) \in R_1$, z antisymetrie R_1 tedy $a = b$.

Poznámka: Důkaz ukazuje, že stačí, aby jedna z R_1, R_2 byla antisymetrická, a už je takový i průnik.

(v): Nechť $(a, b) \in R_1 \cap R_2$ a $(b, c) \in R_1 \cap R_2$. Pak $(a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_1$, z tranzitivity R_1 tedy $(a, c) \in R_1$. Podobně $(a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_2$, z tranzitivity R_2 tedy $(a, c) \in R_2$. Proto $(a, c) \in R_1 \cap R_2$.

5c.8: (i): Nechť $a, b, c \in A$ splňují $(a, b) \in R_1 \cup R_2$ a $(b, c) \in R_1 \cup R_2$. Pak $(a, b) \in R_1$ nebo $(a, b) \in R_2$, a $(b, c) \in R_1$ nebo $(b, c) \in R_2$. Abychom mohli použít tranzitivitu R_1 či R_2 , museli bychom nějak zajistit, aby obě dvojice byly v R_1 nebo obě v R_2 . To ale nedokážeme, tím je také inspirován protipříklad.

(ii): Nechť $a, b, c \in A$ splňují $(a, b) \in R_1 - R_2$ a $(b, c) \in R_1 - R_2$. Pak $(a, b) \in R_1$ a $(b, c) \in R_1$, proto dle tranzitivity R_1 i $(a, c) \in R_1$. Ještě potřebujeme $(a, c) \notin R_2$, ale to neumíme zajistit. Víme jen, že $(a, b) \notin R_2$ a $(b, c) \notin R_2$, to ale nikterak nebrání (a, c) v tom, aby v R_2 bylo. Zase je tímto inspirován protipříklad v diskusi po faktu 5c.9.

5c.9: Indukcí. (0): $n = 1$: jestliže je R reflexivní, tak $R^1 = R$ je reflexivní.

(1): Nechť $n \in \mathbb{N}$. Předpoklad R^n reflexivní. Podle věty 5c.10 je i $R^n \circ R = R^{n+1}$ reflexivní.

5c.10: (i) Pro $R^{-1} \circ R$: Nechť $(a, b) \in R^{-1} \circ R$. Pak $\exists x \in A$ aby $(a, x) \in R$ a $(x, b) \in R^{-1}$. Odtud podle definice inverzní relace $(x, a) \in R^{-1} \wedge (b, x) \in R \implies (b, x) \in R$ a $(x, a) \in R^{-1}$, tedy $(b, a) \in R^{-1} \circ R$.

Důkaz pro $R \circ R^{-1}$ je obdobný.

(ii): Nechť $a \in A$. Předpoklad $\exists b \in A: (a, b) \in R$. Pak $(b, a) \in R^{-1}$, máme $a R b R^{-1} a$, tedy $(a, a) \in R^{-1} \circ R$.

5c.11: a) $R_1 \cup \{(2, 4)\}$.

b) Nejprve doplníme na symetrickou relaci: $R_2 \cup \{(4, 1), (3, 1), (3, 4)\}$. Teď zjistíme, co chybí pro platnost tranzitivity (pořadí nejprve symetrie, pak tranzitivita je výhodné, protože pokud teď případně další spojnice budeme rovnou dávat v obou směrech, tak již symetrii nepokazíme). Odpověď:

$R_2 \cup \{(4, 1), (3, 1), (3, 4), (1, 1), (3, 3), (4, 4)\}$.

5c.12: Nechť $(a, b) \in R \cup R^{-1}$. Pak $(a, b) \in R \vee (a, b) \in R^{-1}$. Když $(a, b) \in R$, tak $(b, a) \in R^{-1} \subseteq R \cup R^{-1}$. Když $(a, b) \in R^{-1}$, tak $(b, a) \in R \subseteq R \cup R^{-1}$. Proto každopádně $(b, a) \in R \cup R^{-1}$.

5c.13: Uzávěry viz věta 5c.13: $(\Delta \cup R) \cup (\Delta \cup R)^{-1} = \Delta \cup R \cup \Delta^{-1} \cup R^{-1} = (\Delta \cup \Delta^{-1}) \cup (R \cup R^{-1}) = \Delta \cup (R \cup R^{-1})$. Využilo se cvičení 5a.6.

5c.14: Je-li (a, b) v symetrickém tranzitivního, pak (a, b) v tranzitivním nebo (b, a) v tranzitivním. Proto řetízek nějaké délky z a do b v R , ten je pak i v symetrickém uzávěru R , nebo řetízek z b do a v R , pak otočením řetízek z a do b v R^{-1} , tedy i v symetrickém uzávěru, každopádně řetízek z a do b v symetrickém uzávěru a proto (a, b) v tranzitivním uzávěru symetrického.

$R = \{(a, b), (a, c)\}$, tranzitivní symetrického je $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$, symetrický tranzitivního je $\{(a, b), (a, c), (c, a), (c, a)\}$.

5c.15: \hat{R} je nejmenší relace s vlastností P obsahující R . Ale \hat{S} má také P a obsahuje R , proto z minimality \hat{R} máme $\hat{R} \subseteq \hat{S}$.

5c.16: R : Pro $a \in A$ je díky reflexivitě R jak aRa , tak aRa (opačné pořadí), proto aSa .

S : Necht' aSb . Pak podle definice aRb a bRa , proto také bRa a aRb a tedy bSa .

T : Necht' aSb a bSc . Pak podle definice aRb a bRa a také bRc a cRa . Jinými slovy, platí aRb a bRc , proto z tranzitivity R máme aRc , podobně i cRa a tedy aSc .

5d. Bonus: Další vlastnosti a relace

Probrali jsme vlastnosti, které se používají nejčastěji, existují ale i další případy, kdy se relace chovají způsobem, který se nám zamlouvá. Jinak řečeno, vlastností je více než čtyři, uvedeme si pár populárnějších.

Definice.

Necht' R je relace na množině A .

Řekneme, že R je **antireflexivní** či **ireflexivní (irreflexive)**, jestliže pro všechna $a \in A$ platí $\neg(aRa)$.

Řekneme, že R je **asymetrická (asymmetric)**, jestliže pro všechna $a, b \in A$ platí $(aRb \implies \neg(bRa))$.

Řekneme, že R je **dichotomická (dichotomic)**, jestliže pro všechna $a, b \in A$ platí $(aRb \vee bRa)$.

Řekneme, že R je **trichotomická (trichotomic)**, jestliže pro všechna $a, b \in A$ platí právě jedna z možností aRb , bRa , $a = b$.

Antireflexivní relace nejsou opakem reflexivních, jsou opakem zahnaným do extrému. Na to, aby relace nebyla reflexivní, stačí jediná chybějící dvojice (a, a) . Antireflexivita to bere od podlahy a rovnou zakáže všechny takovéto dvojice. Typickým příkladem je relace $<$ na číslech. Náhodně vytvořená relace bude mít s vysokou pravděpodobností jen některé z dvojic (a, a) , takže nebude ani reflexivní, ani antireflexivní.

Pro nás nejzajímavější bude asymetrie (které někteří autoři říkají silná antisymetrie). Protože zakazuje obousměrné šipky, tak již implikuje antisymetrii (takže asymetrie je silnější vlastnost než antisymetrie). Dále se všimněte, že pokud by existovalo $(a, a) \in R$, tak to už poruší podmínku asymetrie. Tato vlastnost tedy zakazuje smyčky. Dostáváme tak jeden směr v následujícím faktu.

Fakt 5d.1.

Necht' R je relace na množině A . Je asymetrická právě tehdy, pokud je antisymetrická a antireflexivní.

Druhý směr vyplyne stejně snadno a zkuste si jej rozmyslet. Pokud vám všechny tyto úvahy přijdou snadné (a ony jsou), tak to je dobré znamení, že relacím rozumíte.

Mezi antisymetrií a asymetrií je zajímavá souvislost, kterou vyjádříme v tvrzení, které se nám bude trošku hodit později. Zkuste si při jeho čtení představovat nerovnosti \leq (antisymetrie) a $<$ (asymetrie).

Fakt 5d.2.

Uvažujme relaci R na množině A .

(i) Necht' R je antisymetrická. Definujme relaci S tímto předpisem: aSb jestliže aRb ale $a \neq b$. Pak je S asymetrická.

(ii) Necht' R je asymetrická. Definujme relaci S tímto předpisem: aSb jestliže aRb nebo $a = b$. Pak je S antisymetrická a reflexivní.

Formálně řečeno, v (i) je $S = R - \Delta(A)$, ve (ii) je $S = R \cup \Delta(A)$. Důkaz necháváme jako cvičení. Pro další detaily viz kapitola 7.

Někdy potřebujeme relaci přinutit, aby vytvářela hodně spojení. Není úplně jasné, jak to udělat nejlépe, poslední dvě vlastnosti z definice výše ukazují dva možné přístupy.

Dichotomie je vlastnost, která zaručí vzájemnou propojenost všech prvků množiny, ale neřeší, jakým způsobem, hlavně aby tam něco bylo. Všimněte si, že lze zvolit i $a = b$, takže dichotomie už vynutí reflexivitu. Dobrým příkladem je relace \leq na číslech.

I trichotomie vynucuje propojení prvků, ale zároveň je zvědavá, jak se to dělá. Všimněte si, že dvojice $a, b = a$ již splňuje $a = b$, proto z té trojice nesmí platit nic dalšího neboli neplatí aRa ; trichotomické relace jsou tedy antireflexivní. Také zakážeme oboustranné šipky mezi různými prvky, jde tedy o relaci asymetrickou, proto i antisymetrickou. Typickým příkladem je relace $<$ na číslech.

Pro příklad relace, která není dichotomická ani trichotomická, stačí vzít dělitelnost na \mathbb{Z} , pak čísla $a = 3$ a $b = 5$ nejsou spojena žádnou šipkou, dělitelnost tedy na \mathbb{Z} není ani dichotomická, ani trichotomická.

Někteří autoři mají jinou definici trichotomie, používají v definici obyčejnou disjunkci, takže připouštějí, že z těch tří možností platí i více najednou. Snadno se rozmyslí, že takováto alternativní definice je ekvivalentní podmínce, aby pro všechna $a \neq b$ platilo $aRb \vee bRa$. Jinak řečeno, tato definice se neplete do (anti)reflexivity, což mnoho autorů shledává sympatickým. Je také vidět, že každá dichotomická relace by byla i trichotomická dle této jiné definice. Některé podrobnosti pak následně fungují jinak, ale protože zde nebudeme s trichotomií pracovat, nemusí nás to trápit.

K problematice vynucování spojení se vrátíme v kapitole .

Existuje samozřejmě mnohem více roztodivných vlastností, ale to už jsou specializované věci. Uvedme jednu na ukázkou: Relace R se nazývá hustá, jestliže pro libovolné x, y splňující xRy existuje nějaké z takové, že $xRzRy$. Třeba relace $<$ je hustá na \mathbb{Q} či \mathbb{R} , ale na \mathbb{Z} už hustá není, protože $13 < 14$ a mezi nimi už další prvek není. Pro další zajímavou vlastnost se podívejte na cvičení 4a.18.

5d.3 n -ární relace

Toto je jen rychlý pohled, aby čtenář věděl, že není třeba končit u binárního.

Definice.

Nechť A_1, \dots, A_n jsou množiny. Libovolná podmnožina $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$ se nazývá **n -ární relace** na těchto množinách.

Číslo n říkáme **stupeň** této relace či její **arita**.

Consider sets A_1, \dots, A_n . By an **n -ary relation** on these sets we mean any subset of $A_1 \times \dots \times A_n$. The number n is called the **degree** of this relation.

Takovéto relace nám umožňují reprezentovat vztahy mezi více objekty.

Příklad 5d.a: Nechť A je množina všech studentů na fakultě, dále $B = \{\text{Bc, MSc, Ph.D.}\}$, $C = \{\text{EE, CS}\}$ a $D = \{1, 2, 3, 4\}$. Pak lze studentskou populaci popsat relací R arity 4 definovanou takto: $(a, b, c, d) \in R$ právě tehdy, jestliže student a studuje na b v programu c a je v ročníku d .

△

Jak příklad jasně naznačuje, tyto relace se používají při práci s databázemi. Volba vhodného modelu silně ovlivní, jak rychle databáze reaguje na možné požadavky (a které je vůbec schopna splnit). Jedním z používaných modelů je právě relační model.

Toto použití pak inspiruje operace, které definujeme. Určitě budeme chtít operaci, která umožní vybírat dle parametru, čímž vznikne podrelace (například z relace studentů chceme podrelaci, která zahrnuje jen studenty programu CS). Je možno dělat tzv. projekce, což v zásadě znamená, že z relace vynecháme některou složku (například můžeme vytvořit relaci, která nezahrnuje program, jen titul a ročník), relace se dají spojovat a podobně. To už je ale spíše téma pro kurs databází.

Cvičení

Cvičení 5d.1: Uvažujme relaci R na množině A . Dokažte následující.

(i) Jestliže je R antisymetrická, tak je relace $S = R - \Delta(A)$ asymetrická.

(ii) Jestliže je R asymetrická, tak je relace $S = R \cup \Delta(A)$ antisymetrická.

Viz fakt 5d.2.

Cvičení 5d.2 (poučné, dobré): Nechť R je relace na množině A . Dokažte, že jestliže je R antireflexivní a tranzitivní, tak už je asymetrická (a proto i antisymetrická).

Nápověda: Důkaz sporem jde docela pěkně.

Řešení:

Cvičení 5d.1: (i) Uvažujme $(a, b) \in S$. Sporem: Kdyby platilo $(b, a) \in S$, pak díky $S \subseteq R$ také $(b, a) \in R$, také $(a, b) \in R$. Protože $\Delta(A) \cap S = \emptyset$, nemůže být $a = b$. Dvojice a, b je tedy protipříkladem na antireflexivitu R , což je spor s předpokladem.

(ii) Mějme a, b takové, že $(a, b) \in S$ a $(b, a) \in S$. Odkud tyto dvojice do S přišly? Jsou dvě možnosti. Kdyby $(a, b) \in R$, pak dle asymetrie $(b, a) \notin R$, proto nutně $(b, a) \in \Delta(A)$ a tedy $a = b$. Druhá možnost je $(a, b) \in \Delta(A)$, tedy zase $a = b$. Antisymetrie S dokázána.

5d.2: Předpoklad: R je antisymetrická, tranzitivní a není asymetrická. Proto $\exists a, b \in A$ tak, že aRb a bRa . Tranzitivita pak dává aRa , což je ve sporu s antireflexivitou.