4. Binární relace

Množiny nám umožňují zachytit, že máme či nemáme nějaké objekty, či je třídit podle vlastností. V této kapitole se naučíme matematicky popsat situaci, kdy mezi objekty může a nemusí být nějaký vztah.

Se vztahy pracujeme běžně, například některá čísla se rovnají a jiná ne, někdy jedno číslo dělí jiné, někteří lidé se spolu znají a jiní ne, některé jídlo vyžaduje jistou surovinu a jinou ne. Takové situace se teď naučíme zachycovat a zkoumat matematickým jazykem.

4a. Binární relace a operace s nimi

Představme si, že máme dva typy objektů, matematicky řečeno množinu A (třeba studenty jisté vysoké školy) a množinu B (třeba množinu předmětů vypisovaných dotyčnou VŠ). Když si studenti zapíšou předměty na aktuální semestr, tak mezi prvky těchto dvou množin vznikne vztah. Počítačovníci by jej zachytili databází, my jej zachytíme matematicky.

Kdykoliv si student a zapíše předmět b, tak vznikne dvojice student-předmět. Matematika na to má nástroj, uspořádanou dvojici (a,b). Když všechny takto vzniklé dvojice schováme do množiny, dostaneme přesnou specifikaci zápisu. Student a si předmět b zapsal, pokud máme v té množině dvojici (a,b), jinak ne.

Uspořádané dvojice v matematice vytváříme pomocí kartézského součinu, $A\times B$ je množina všech uspořádaných dvojic sestavitelných z prvků množin A a B (v tomto pořadí). Když chceme zapsat nějaký vztah mezi prvky množiny A a prvky množiny B, tak vybíráme dvojice z množiny $A\times B$ a tím vlastně vytvoříme její podmnožinu.

! **Definice.**
Nechť A,B jsou množiny. Libovolná podmnožina $\mathcal{R}$ kartézského součinu $A\times B$ se nazývá **binární relace** z A do B.
Jestliže $(a,b)\in\mathcal{R}$, pak to také značíme $a\mathcal{R}b$ a řekneme, že a **je v relaci s** b vzhledem k $\mathcal{R}$, popřípadě že (a,b) je v relaci $\mathcal{R}$.
Jestliže $(a,b)\notin\mathcal{R}$, pak řekneme, že a **není v relaci s** b vzhledem k $\mathcal{R}$.

By a **relation** from a set A to a set B we mean an arbitrary subset $\mathcal{R}$ of the Cartesian product $A\times B$.
When $(a,b)\in\mathcal{R}$, we also denote it $a\mathcal{R}b$ for short and say that a **is related to** b by $\mathcal{R}$.

Slovo „binární“ se obvykle vynechává, leda že by se zároveň mluvilo i o jiných relacích, což ale v této kapitole nehrozí s výjimkou bonusové sekce 4d.3.

Oba způsoby značení, $(a,b)\in\mathcal{R}$ i $a\mathcal{R}b$, jsou zcela rovnocenné a autor obvykle volí to, o kterém si myslí, že v daném kontextu rychleji předá čtenáři sdělovanou myšlenku. Primární je množinové značení $(a,b)\in\mathcal{R}$, protože relace jsou jako množiny dvojic definovány a tento jazyk je pro ně přirozený. Uvidíme, že existují situace, kdy je to jediný rozumný přístup.

Velmi často je také možné použít druhou možnost $a\mathcal{R}b$ a je to velmi populární, protože je to kratší. Je ale třeba si uvědomit, že je to jen zkratka pro logický výrok „platí $(a,b)\in\mathcal{R}$“. To znamená, že s tímto značením pracujeme pomocí logických operací jako s výroky. Pokud chceme například vyjádřit, že a není v relaci b vzhledem k $\mathcal{R}$, tak první značení vede na množinový zápis $(a,b)\notin\mathcal{R}$, zatímco u zkratky je nutné použít logickou negaci $\neg(a\mathcal{R}b)$.

! **Příklad 4a.a:** Nechť A je množina všech studentů jisté vysoké školy a B množina nabízených předmětů v aktuálním semestru. Situaci po zápisu zachytíme relací. Jsou dva hlavní způsoby definice takové relace. Jedna možnost je definovat množinu vcelku takto:
• Relace $\mathcal{R}$ je množina všech dvojic $(a,b)\in A\times B$ takových, že student a si zapsal předmět b.
Druhá populární možnost je zdůraznit mechanismus výběru:
• Relace $\mathcal{R}$ z A do B je definována takto: $(a,b)\in\mathcal{R}$ právě tehdy, když si student a zapsal předmět b.
Zde se automaticky předpokládá, že $a\in A$ a $b\in B$. Relace $\mathcal{R}$ pak vzniká jako množina všech dvojic splňujících podmínku. Tato druhá možnost umožňuje použít zápisovou zkratku:
• Relace $\mathcal{R}$ z A do B je definována takto: $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když si student a zapsal předmět b.
Toto je velice užitečné zejména u relací s čísly vzniklých pomocí matematického testu.

V případě školní relace je množinový zápis přehlednější. protože informaci Haba$\mathcal{R}$DMA musíme luštit, zatímco význam (Haba,DMA)$\in\mathcal{R}$ je vidět hned.
$\triangle$

V aplikacích se velmi často objevuje případ, kdy $A=B$. Pak $A\times B=A\times A=A^2$.

! **Definice.**
Nechť A je množina. Relaci z A do A říkáme **relace na** A.

! Příklad 4a.b: Typická definice relace na množině může vypadat následovně:
• Relaci $\mathcal{R}$ na $\mathbb{N}$ definujeme takto: $m\mathcal{R}n$ právě tehdy, když $m < n$.

Takže například platí $3\mathcal{R}7$, což je vlastně zkratka pro $(3,7) \in \mathcal{R}$. Neplatí $5\mathcal{R}5$, což se někdy zapisuje $5\not\mathcal{R}5$, ale čtenář hned vidí, že to není vhodné, obvyklejší zápis je $(5,5) \notin \mathcal{R}$ nebo se prostě spokojíme s formulací „neplatí $5\mathcal{R}5$“, méně běžné je $\neg(5\mathcal{R}5)$.

Pokud bychom chtěli relaci $\mathcal{R}$ definovat podle definice, tedy jako množinu dvojic, pak bychom použili předpis
$$\mathcal{R} = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2;\ m < n\}.$$

Pro tuto relaci už vlastně značku máme, obvyklé značení $3 < 7$ je analogické zápisu $3\mathcal{R}7$. Naopak zápis $(3,7) \in<$ je sice formálně správný, pokud $<$ chápeme jako relaci, ale nepoužívá se z důvodu nepřehlednosti. Pokud potřebujeme s relací $<$ manipulovat pomocí množinových pojmů, pak je lepší pro ni zavést alias $\mathcal{R}$, jak jsme to udělali zde.

Pokud je základem relace známý vztah, tak často řekneme jen něco takového:
• Nechť $\mathcal{R}$ je relace $<$ na $\mathbb{N}$.

Toto je velice efektivní v případě, kdy chceme známý vztah aplikovat jen na určitou množinu. Podobně můžeme zavést relaci $\leq$ na $\mathbb{Z}$ atd. Někdy se tento způsob používá také u nematematických vztahů, třeba
• Nechť $\mathcal{R}$ je relace dítě-rodič na množině obyvatel Opavy.

To je ale lepší používat jen tam, kde nehrozí nedorozumění, například pokud jsme již dříve přesně specifikovali význam zápisu „dítě-rodič“.
△

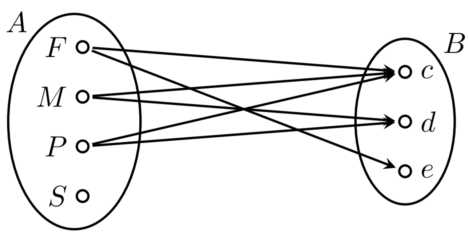
V definici relace se neklade žádná podmínka na podobu dotyčné podmnožiny. Libovolná podmnožina $A \times B$ vytvoří relaci neboli dá vzniknout nějakému vztahu. Jedním extrémem je, když zvolíme $\mathcal{R} = A \times B$. Pak je každý prvek $a \in A$ ve vztahu s každým prvkem $b \in B$. Druhým extrémem je případ $\mathcal{R} = \emptyset$, kdy není nikdo ve vztahu s nikým. Obvykle se pohybujeme někde mezi.

Při práci s konkrétní relací je užitečné ji vnímat intuitivně. V tom může pomoci grafické znázornění. Obvyklý způsob je vyznačit prvky obou množin kolečky a pak pro každou dvojici (a,b), která je v relaci, zakreslit šipku z a do b.

! Příklad 4a.c: Uvažujme školu se studenty **F**rodo, **M**erry, **P**ippin a **S**am.
Nabízeny jsou předměty **c**estování, **d**iskrétní matika a **e**lfština.
Frodo si zapsal cestování a elfštinu, Merry a Pippin si zapsali cestování a diskrétku, Sam si nestihl nic zapsat, protože zrovna vařil králíka. Zachytíme to pomocí relace $\mathcal{R}$. Pro zjednodušení budeme studenty a předměty označovay iniciálami.

Zavedeme si množinu studentů $A = \{F, M, P, S\}$ a množinu předmětů $B = \{c, d, e\}$. Relace popisující zápis je
$$\mathcal{R} = \big\{(F,c),(F,e),(M,c),(M,d),(P,c),(P,d)\big\}.$$

Graf znázorňující tuto relaci je



Zejména u menších relací se mnohdy dají pouhým pohledem zjistit užitečné věci.
△

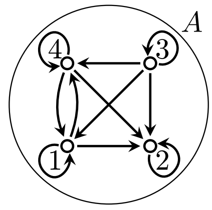
V případě relace na množině A není třeba množinu kreslit dvakrát. Nakreslí se jen jednou a šipky se vpisují do tohoto obrázku. Vznikne tak objekt zvaný orientovaný graf, viz kapitola 12.

! Příklad 4a.d: Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na množině $A = \{1,2,3,4\}$ definovanou následující podmínkou: $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $a \bmod 3 \leq b \bmod 3$.

Zbytky po dělení jsou $1 \bmod 3 = 1$, $2 \bmod 3 = 2$, $3 \bmod 3 = 0$, $4 \bmod 3 = 1$.

Porovnáním vidíme, že $1\mathcal{R}1$, $1\mathcal{R}2$, $1\mathcal{R}4$, $2\mathcal{R}2$, $3\mathcal{R}1$, $3\mathcal{R}2$, $3\mathcal{R}3$, $3\mathcal{R}4$, $4\mathcal{R}1$, $4\mathcal{R}2$, $4\mathcal{R}4$. Formálně,

$$\mathcal{R} = \big\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,4)\big\}.$$



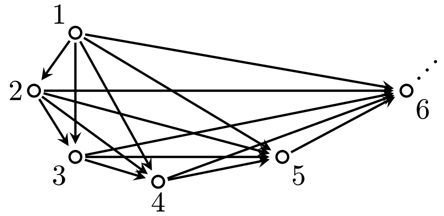
Vidíme, že každé z čísel je v relaci samo se sebou, což se v grafu projeví jako takzvané smyčky. Vidíme také, že do čísla 2 vedou šipky ze všech ostatních čísel, což ukazuje, že má největší zbytek po dělení. Čísla 1 a 4 mají stejný zbytek, což se projeví vznikem vztahu v obou směrech. Obrázek tak dokáže mnoho napovědět.

△

Někdy se vyplatí nakreslit si částečný graf pro relace na nekonečné množině. Pro ilustraci se vrátíme k příkladu, který jsme již potkali.

Příklad 4a.e: Na množně $\mathbb{N}$ jsme uvažovali relaci $<$.

Zde se již nestává, že by nějaké číslo bylo v relaci samo se sebou, takže neočekáváme smyčky. Čísla jsme uspořádali do rozvíjející se spirály. Čtenář si asi umí představit, jak by graf vypadal, kdybychom v něm měli více čísel, a možná si dokáže vytvořit určitou představu pro celou nekonečnou množinu. Relaci $m < n$ dobře známe, takže nás graf asi ničím nepřekvapí.



△

Čtenář již dlouho zná důležité matematické vztahy, například rovnost $m = n$ či nerovnosti $m \leq n$, $m < n$, $m \geq n$ a $m > n$, které můžeme uvažovat na různých množinách a tím vznikají konkrétní relace.

Dalším důležitým matematickým vztahem je inkluze $\subseteq$. Aby vznikla relace, je nutno specifikovat, na jaké množině se tento vztah aplikuje, což dá víc práce než porovnávání čísel.

Příklad 4a.f: Každá relace pracuje na nějaké množině (popřípadě z množiny na množinu). My chceme porovnávat množiny mezi sebou, tedy množiny se stávají prvky a relace by měla být definována na množině množin. Dobrá otázka je, na jaké.

Nejjednodušší možnost je dát si do A všechny množiny, které hodláme porovnávat. To je funkční, ale nemusí to být praktické a hlavně o takové situaci neumíme obecně moc říct, protože nevíme, jaké množiny si do A kdo vybere. Proto preferujeme strukturovanější přístup.

Nabízí se jednoduchá myšlenka dát do A úplně všechny existující množiny a zavést relaci inkluze na tomto A. To ale naráží na zajímavý problém z teorie množin: Pokud uděláme kolekci A všech množin, tak to není množina!

V praxi se proto často volí jiný přístup. Když pracujeme s množinami, tak obvykle vznikají z prvků stejného typu. Například někdy pracujeme s množinami přirozených čísel, jindy s množinami matic, množinami funkcí a podobně. Začneme tedy volbou takzvaného univerza U, což je množina prvků, ze kterých pak budeme vytvářet porovnávané množiny. Jako A, tedy množinu objektů, jejichž vztahy zachycujeme, pak vezmeme množinu všech podmnožin univerza U, která se značí $P(U)$.

Pokud si například vezmeme $U = \mathbb{N}$, tak A bude množina všech podmnožin $\mathbb{N}$ neboli budou k dispozici všechny množiny vytvořené z přirozených čísel. Ty pak můžeme porovnávat inkluzí a vznikne relace. Formálně bychom napsali, že uvažujeme relaci $\mathcal{R}$ na $P(\mathbb{N})$ definovanou podmínkou $M\mathcal{R}N$ právě tehdy, když $M \subseteq N$. Tuto relaci také můžeme definovat jinak,

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{(M,N) \in P(\mathbb{N})^2;\ M \subseteq N\} \\ &= \{(M,N);\ M,N \subseteq \mathbb{N} \wedge M \subseteq N\}.\end{aligned}$$

Pak například máme $\{13,23\}\mathcal{R}\{1,3,13,23\}$, popřípadě zápis $(\{12,23\},\{1,3,13,23\}) \in \mathcal{R}$.

Pokud nepotřebujeme speciální značku $\mathcal{R}$, pak můžeme méně formálně říct, že uvažujeme relaci $\subseteq$ na podmnožinách $\mathbb{N}$.

△

Proč nám na A tolik záleží? Podle definice relace vznikne jako množina dvojic vybíraných z jistého součinu $A \times B$ a identita zdroje je stejně důležitá jako to, které dvojice vybereme. Například relace $\mathcal{R} = \big\{(1,1)\big\}$ mohla vzniknout výběrem z $A \times A$ pro $A = \{1\} = A_1$, ale také pro $A = \{1,2\} = A_2$. Jak uvidíme v sekci 4b, není to jedno, $\mathcal{R}$ vybraná z $A_1 \times A_1$ bude mít jiné vlastnosti než množinově stejná $\mathcal{R}$ vybraná z $A_2 \times A_2$! Správně by se tedy měly jmenovat různě, třeba $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$.

Poučení je, že když řekneme „uvažujme jistou relaci na jisté množině“, tak ta část o množině není jen formální povinnost, ale nese užitečnou informaci a nelze ji vynechat. To platí zejména v případě, kdy relaci definujeme pomocí testu, například algebraického. Pak máme tendenci soustředit se na tu podmínku, ale důležitá je i množina. Například vztah $\leq$ uvažovaný na množině $A = \{1\}$ má jiné vlastnosti, než když jej uvažujeme na $A = \{1,2\}$. Rovnost relací je tedy víc než jen rovnost množin dvojic.

Definice.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace z A do B a $\mathcal{S}$ je relace z C do D. Řekneme, že tyto relace jsou si rovny, značeno $\mathcal{R} = \mathcal{S}$, jestliže $A = C$, $B = D$ a relace $\mathcal{R}$ a $\mathcal{S}$ jsou shodné coby množiny.

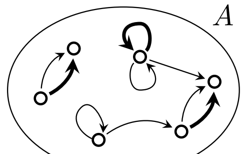
Tato důležitost množin, na které relace žijí, má jeden praktický dopad. Relace jsou množiny (dvojic), takže je lze porovnávat inkluzí. Často ovšem informace, že pro dvě relace platí $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, není dostatečná, a to právě proto, že z této informace nepoznáme, na kterých množinách jsou tyto relace definovány (a už víme, že tato informace je podstatná). Klidně se může stát, že relace $\mathcal{R}$ je podmnožinou relace $\mathcal{S}$ a přitom je definována na větších množinách.

Tomuto problému se vyhneme, když se rozhodneme porovnávat pomocí $\subseteq$ pouze relace na stejných množinách, protože pro relace $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, obojí z A do B, už inkluze dává zajímavou informaci. Tak se to také používá v aplikacích.

Inkluze $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ se pro případ relací přepíše takto:
• Jestliže $(a,b) \in \mathcal{R}$, pak $(a,b) \in \mathcal{S}$.

Užitečná je někdy obměna, tedy odvozená implikace se stejnou pravdivostí jako ta původní (poznámka 1a.7):
• Jestliže $(a,b) \notin \mathcal{S}$, pak $(a,b) \notin \mathcal{R}$.

Obrázek napravo ilustruje situaci $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ pro relace na množině A. Protože obě relace fungují na stejných prvcích, můžeme je nakreslit do společného obrázku. Silnější šipky jsou relace $\mathcal{R}$, slabší jsou relace $\mathcal{S}$. Ověříme, že opravdu $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, tedy že platí následující:
• Pro všechna $a,b \in A$: Jestliže $a\mathcal{R}b$ pak $a\mathcal{S}b$.



Tím vzniká hierarchie. Vidíme, že relace $\mathcal{R}$ umí vynutit splnění $\mathcal{S}$, je tedy „silnější“. Například pro reálná čísla vztah $x < y$ implikuje $x \leq y$, jinak řečeno na $\mathbb{R}$ je relace $<$ podmnožinou relace $\leq$.

Příklad 4a.g: Uvažujme množinu A všech obcí v jisté zemi. Definujeme relace $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ na A následujícím předpisem:
• $a\mathcal{R}_1 b$, jestliže se dá z a do b dojet autobusem;
• $a\mathcal{R}_2 b$, jestliže se dá z a do b dojet vlakem.

Inkluze $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ by znamenala, že tam, kam lze dojet autobusem, lze také dojet vlakem.
△

! 4a.1 Operace s relacemi

Operace je akce, která z jednoho či více objektů vyrobí nový objekt stejného druhu, třeba $\sqrt{x}$ pro číslo nebo $A \cdot B$ pro matice. Existují také operace pro relace. Protože jsou to formálně množiny, lze na ně aplikovat množinové operace. Protože je známe, nemusíme je zavádět, jen si připomeneme definice a ukážeme přepis do jazyka relací.

Uvažujme dvě relace $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ z A do B. Definice doplňku, průniku, sjednocení a rozdílu jsou následující:

$$\overline{\mathcal{R}_1} = \{(a,b) \in A \times B;\ (a,b) \notin \mathcal{R}_1\};$$
$$\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \big\{(a,b) \in A \times B;\ (a,b) \in \mathcal{R}_1 \wedge (a,b) \in \mathcal{R}_2\big\};$$
$$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \big\{(a,b) \in A \times B;\ (a,b) \in \mathcal{R}_1 \vee (a,b) \in \mathcal{R}_2\big\};$$
$$\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2 = \big\{(a,b) \in A \times B;\ (a,b) \in \mathcal{R}_1 \wedge (a,b) \notin \mathcal{R}_2\big\}.$$

Přeložme to do alternativního jazyka:
• $a\overline{\mathcal{R}_1}b$ právě tehdy, když neplatí $a\mathcal{R}_1 b$;
• $a(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2)b$ právě tehdy, když $a\mathcal{R}_1 b$ a $a\mathcal{R}_2 b$;
• $a(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)b$ právě tehdy, když $a\mathcal{R}_1 b$ nebo $a\mathcal{R}_2 b$;
• $a(\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2)b$ právě tehdy, když $a\mathcal{R}_1 b$ a neplatí $a\mathcal{R}_2 b$.

Tyto operace mají užitečné interpretace v aplikacích.

Příklad 4a.h: V příkladě 4a.g jsme definovali relace zachycující možnost cestovat mezi obcemi autobusem (relace $\mathcal{R}_1$) a vlakem (relace $\mathcal{R}_2$).

Pak relace $\overline{\mathcal{R}_1}$ popisuje, mezi kterými obcemi se nelze dostat autobusem.

Relace $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ udává, zda se dá z a do b dostat autobusem či vlakem; z pohledu cestujícího je nám tedy jedno, jak pojedeme, hlavně abychom se tam dostali.

Relace $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ udává, zda se dá z a do b dostat vlakem i autobusem, tedy jde o spojení, kde si můžeme vybrat, kterým prostředkem pojedeme.

Relace $\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2$ udává, zda se dá z a do b dostat autobusem, ale ne vlakem.
△

Příklad 4a.i: Uvažujme relaci $\mathcal{R}_1$ danou jako $\leq$ na $\mathbb{Z}$ a relaci $\mathcal{R}_2$ danou jako $\geq$ na $\mathbb{Z}$.

Relace $\overline{\mathcal{R}_1}$ sestává z dvojic $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$, pro které neplatí $a\leq b$, což jsou přesně dvojice splňující $a>b$. Takže doplňkem relace $\leq$ je relace $>$ na $\mathbb{Z}$.

Relace $\mathcal{R}_1\cap\mathcal{R}_2$ sestává z dvojic $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ splňujících $a\leq b$ a také $a\geq b$, tedy z dvojic (a,b) splňujících $a=b$. Takže $\mathcal{R}_1\cap\mathcal{R}_2$ je relace rovnosti na $\mathbb{Z}$.

Mimochodem, průnikem relací $<$ a $>$ na $\mathbb{Z}$ je prázdná relace.

Relace $\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2$ sestává z dvojic $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ splňujících $a\leq b$ nebo $a\geq b$. Toto ovšem platí pro libovolná dvě čísla, proto $\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Mimochodem, sjednocením relací $<$ a $>$ na $\mathbb{Z}$ získáme doplněk k relaci rovnosti na $\mathbb{Z}$.

Relace $<$ na $\mathbb{Z}$ vznikne jako rozdíl relace $\mathcal{R}_1$ mínus relace rovnosti na $\mathbb{Z}$.

△

Existují také speciální operace pro relace. Typická relace vzniká zachycením vztahu, který je založen na určitém mechanismu. Někdy je pak užitečné zkoumat dotyčný vztah také na menší množině.

! **Definice.**
Nechť $\mathcal{R}$ je relace z množiny A do množiny B, nechť $C\subseteq A$ a $D\subseteq B$. Definujeme **restrikci** (**restriction**) relace $\mathcal{R}$ na $C\times D$ jako relaci $\mathcal{R}\cap(C\times D)$ z C do D. Značí se $\mathcal{R}|_{C\times D}$.
Pro relaci $\mathcal{R}$ na množině A a podmnožinu $C\subseteq A$ definujeme restrikci $\mathcal{R}$ na C, značeno $\mathcal{R}|_C$, jako $\mathcal{R}|_{C\times C}$.

Jinými slovy, z relace $\mathcal{R}$ prostě vyhodíme všechny dvojice, ve kterých se objevují prvky mimo C a D.

! **Příklad 4a.j:** V příkladě 4a.c jsme měli relaci popisující školu
$$\mathcal{R}=\bigl\{(F,c),(F,e),(M,c),(M,d),(P,c),(P,d)\bigr\}.$$
Pokud se omezíme na podmnožiny $C=\{F,M\}$ a $D=\{c,d\}$, tak získáme restrikci
$$\mathcal{R}|_{C\times D}=\bigl\{(F,c),(M,c),(M,d)\bigr\}.$$
Všimněme si, že i tato relace funguje podle stejného mechanismu. Říká nám o studentech z množiny C, jaké si zapsali předměty z množiny D.

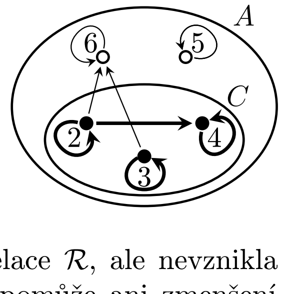
△

Z pohledu množin je restrikce relace vždy podmnožinou relace původní, $\mathcal{R}|_{C\times D}\subseteq\mathcal{R}$. My jsme už ale konstatovali, že takové porovnání je užitečné pro relace na stejných množinách, což pro restrikci neplatí. V definici jsme zdůraznili, že restrikce nespočívá jen v odebrání nějakých dvojic z původní relace, ale novou relaci také považujeme za relaci na nových, menších množinách.

Můžeme „menší“ relace vytvářet přímo tím, že bychom z původní relace přejali jen některé dvojice a pak také zmenšili množiny, ze kterých se vybírá, ale o takto nesystematicky vzniklé relaci nelze mnoho říct, zatímco relace vzniklá restrikcí zachovává mechanismus relace původní.

! **Příklad 4a.k:** Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na $A=\{2,3,4,5,6\}$ danou takto: $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když a dělí b.

Formální definice $\mathcal{R}$ coby podmnožiny $A\times A$ by byla
$$\mathcal{R}=\{(a,b)\in A^2;\ a\,|\,b\}.$$
Snadno nahlédneme, že
$$\mathcal{R}=\bigl\{(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6)\bigr\}.$$
Uvažujme $C=\{2,3,4\}\subseteq A$. Pak
$$\mathcal{S}=\mathcal{R}|_C=\bigl\{(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\bigr\}.$$



V grafu jsou začerněny body z C a tučně zakresleny šipky reprezentující dvojice z $\mathcal{S}$.

Rozmyslíme si, že $\mathcal{S}$ je stejná, jako kdybychom ji definovali přímo na C předpisem
$$a\mathcal{S}b \iff a\,|\,b.$$
Restrikce tedy zachovává mechanismus, na základě kterého původní relace vznikla.

Je užitečné porovnat restrikci s podmnožinou. Relace $\mathcal{T}=\bigl\{(3,6)\bigr\}$ je podmnožinou relace $\mathcal{R}$, ale nevznikla restrikcí na nějakou množinu. Proto také nefunguje její intepretace coby dělitelnosti. Nepomůže ani zmenšení množiny A. Například nelze tvrdit, že $\mathcal{T}$ je relace dělitelnosti na $A=\{3,6\}$, protože to by $\mathcal{T}$ musela obsahovat také dvojice $(3,3)$ a $(6,6)$.

△

Věta 4a.2.
Nechť A, B jsou množiny a $V(a,b)$ logický výrok, který má smysl pro $a \in A, b \in B$. Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ z A do B definovanou předpisem $(a,b) \in \mathcal{R}$ právě tehdy, když platí $V(a,b)$.
Nechť $C \subseteq A, D \subseteq B$. Pak $\mathcal{R}|_{C\times D}$ je rovno relaci $\mathcal{S}$ z C do D dané předpisem $a\mathcal{S}b$ právě tehdy, když platí $V(a,b)$.

Pro rovnost relací je třeba porovnat množiny, na kterých jsou definovány, a poté jejich shodnost jako množin. Tu dokážeme obvyklým postupem přes dvě inkluze, viz poznámka 1b.3.

Důkaz (poučný)**:** Dány množiny $C \subseteq A$, $D \subseteq B$, relace $\mathcal{R}$ z A do B podmínkou $V(a,b)$ a relace $\mathcal{S}$ z C do D podmínkou $V(a,b)$. Pak $\mathcal{S}$ i $\mathcal{R}|_{C\times D}$ jsou relace z C do D a má smysl je porovnávat.
1) Jestliže $(a,b) \in \mathcal{S}$, tak platí $V(a,b)$ a $a \in C, b \in D$. Pak ale také $a \in A, b \in B$ a platí $V(a,b)$, proto podle definice $(a,b) \in \mathcal{R}$. Díky $(a,b) \in C \times D$ pak $(a,b) \in \mathcal{R} \cap (C \times D) = \mathcal{R}|_{C\times D}$.
2) Jestliže $(a,b) \in \mathcal{R}|_{C\times D}$, pak $(a,b) \in \mathcal{R}$ a $(a,b) \in C \times D$. Z prvního máme platnost $V(a,b)$, z druhého $a \in C, b \in D$ a proto $(a,b) \in \mathcal{S}$.

□

Shrnuto: Pokud chceme porovnávat sílu dvou různých vztahů na stejné množině, použijeme inkluzi (viz příklad s vlaky a autobusy). Pokud chceme stejný vztah aplikovat na menší množinu, použijeme restrikci.

Příklad 4a.l: Nechť A je množina všech počítačů na světě. Definujeme relaci $\mathcal{R}$ na A takto: $a\mathcal{R}b$ jestliže jsou spolu a, b přímo propojeny tak, aby si mohly vyměňovat informace.
Pokud bychom si nakreslili graf, viděli bychom, jak je svět zasíťovaný. Pomocí restrikce na různé podmnožiny A bychom se mohli zaměřovat na jednotlivé podsítě.
△

Poznámka: Opačný proces, tedy rozšířit relaci na větší při zachování mechanismu, množinovými prostředky nejde. Například relaci

$$\mathcal{R} = \big\{(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6)\big\}$$

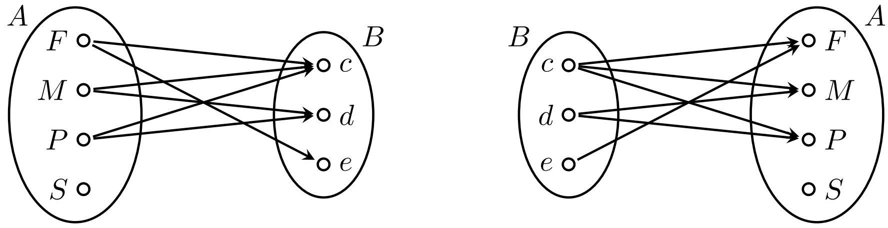
zachycující dělitelnost na $A = \{2,3,4,5,6\}$ lze zároveň považovat za relaci na $\mathbb{N}$, ale už by to nebyla relace dělitelnosti. Na to bychom ji museli doplnit, ale z relace $\mathcal{R}$ samotné nepoznáme, jak to udělat.
Nějaká analogie restrikce pro rozšiřování tedy neexistuje. Když chceme stejný vztah na větší množině, tak si to musíme udělat sami přímou definicí, třeba prohlásit, že $\mathcal{S}$ je relace dělitelnosti na $\mathbb{N}$.
△

Racionálně vzato, relace $>$ a $\geq$ nepotřebujeme, protože stejnou informaci dokážeme podat pomocí relací $<$ a $\leq$. Přesto se používají obojí, protože je vnímáme subjektivně. Totéž platí pro obecné relace.

Příklad 4a.m: V příkladu školní relace 4a.c

$$\mathcal{R} = \big\{(F,c),(F,e),(M,c),(M,d),(P,c),(P,d)\big\}.$$

z $A = \{F,M,P,S\}$ (studenti) do $B = \{c,d,e\}$ (předměty) je přirozené dvojice číst zleva doprava. Tomu také odpovídá směr šipek. Dostali jsme obrázek níže vlevo, který nabízí přehled o tom, co si zapsal Frodo, co si zapsal Merry atd.
Tento obrázek je možné číst i zprava doleva a vyčíst z něj, koho ve třídě najde vyučující diskrétky. Je nicméně pohodlnější obrázek zrcadlově obrátit včetně otočení směru šipek a tak tuto informaci vidět při čtení zleva doprava.



Graf napravo ukazuje novou relaci, která vznikne tak, že ve všech dvojicích relace $\mathcal{R}$ změníme pořadí složek (a pak ještě pro přehlednost seřadíme dvojice podle první složky, tedy podle předmětu).

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \big\{(c,F),(e,F),(c,M),(d,M),(c,P),(d,P)\big\}\\ &= \big\{(c,F),(c,M),(c,P),(d,M),(d,P),(e,F)\big\}.\end{aligned}$$

△

Relace s „otočenými šipkami" má své jméno.

! **Definice.**
Nechť $\mathcal{R}$ je relace z množiny A do množiny B.
Definujeme **relaci inverzní k** $\mathcal{R}$, značeno $\mathcal{R}^{-1}$, jako relaci z B do A danou
$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b,a);\ (a,b) \in \mathcal{R}\}.$$

Let $\mathcal{R}$ be a relation from a set A to a set B. We define its **inverse relation**, denoted $\mathcal{R}^{-1}$, as the relation from B to A defined by
$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b,a);\ (a,b) \in \mathcal{R}\}.$$

Pokud se na inverzní relaci podíváme alternativním jazykem, tak $x\mathcal{R}^{-1}y$ právě tehdy, když $y\mathcal{R}x$. Jde tedy opravdu o obrácení šipek v grafu, například pro relaci $\mathcal{R}$ s dvojicemi (dítě,rodič) bude inverzní relace $\mathcal{R}^{-1}$ obsahovat dvojice (rodič,dítě).

Příklad 4a.n: Uvažujme množinu $A = C(\mathbb{R})$ všech reálných funkcí spojitých na $\mathbb{R}$. Definujme relaci $\mathcal{R}$ na A podmínkou $f\mathcal{R}g$ právě tehdy, když má f na $\mathbb{R}$ derivaci a $f' = g$. Je to tedy relace, která spojuje funkce a jejich derivace, například $\sin(x)\mathcal{R}\cos(x)$ nebo $x^2\mathcal{R}2x$. V množinovém značení $(\sin,\cos) \in \mathcal{R}$ a $(x^2, 2x) \in \mathcal{R}$. Její podstatu bychom mohli zachytit obrázkem $f\mathcal{R}f'$.

Víme, že ne každý prvek z A je v nějaké dvojici na prvním místě, protože jsou spojité funkce, které nelze na $\mathbb{R}$ derivovat, třeba $f(x) = |x|$. Může se také stát, že derivovat lze, ale výsledkem není spojitá funkce, takové případy naše relace také nezahrnuje.

Na druhou stranu matematická analýza říká, že každá spojitá funkce je derivací nějaké spojité funkce, takže obrazně řečeno do každé funkce v A vede nějaká šipka. Dokonce víme, že jich vede víc, například $(x^2, 2x) \in \mathcal{R}$, ale také $(x^2 + 13, 2x) \in \mathcal{R}$. Mimochodem nemůže se stát, že by jedna funkce f existovala ve více dvojicích na první pozici, protože derivaci má funkce nejvýše jedinou.

Máme tedy jasno, jak se naše relace chová. Jak vypadá relace inverzní? Podle definice,
$$f\mathcal{R}^{-1}g \iff g\mathcal{R}f \iff g' = f \iff g = F.$$
Inverzní relace k $\mathcal{R}$ tedy spojuje funkce s jejich primitivními funkcemi, obrázkem $f\mathcal{R}^{-1}F$.
△

Selský rozum říká, že když dvakrát obrátíme směr šipek, měli bychom dostat zpět ty původní.

! **Fakt 4a.3.**
Nechť $\mathcal{R}$ je relace z množiny A do množiny B. Pak platí $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$.

$(\mathcal{R}^{-1})^{-1}$ je relace z A do B, stejně jako $\mathcal{R}$. Mohou se tedy rovnat, což zjistíme jejich porovnáním jako množin dvojic. V tomto případě to půjde snadno pomocí ekvivalence $(a,b) \in (\mathcal{R}^{-1})^{-1} \iff (a,b) \in \mathcal{R}$, viz také poznámka 1b.3. Důkaz necháváme jako cvičení 4a.5, pro případnou inspiraci viz důkaz věty 4a.7.

Rovněž další tvrzení by nám intuitice měla potvrdit jako správné.

Fakt 4a.4.
Nechť $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ jsou relace z množiny A do množiny B. Jestliže $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, pak také $\mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{S}^{-1}$.

S **Rozbor:** Inkluze $M \subseteq N$ se dokazuje pomocí implikace $x \in M \implies x \in N$. Když takto přeložíme předpoklad a závěr tvrzení, dostaneme následující.

- Máme: $(a,b) \in \mathcal{R} \implies (a,b) \in \mathcal{S}$ pro $a \in A, b \in B$
- Chceme: $(x,y) \in \mathcal{R}^{-1} \implies (x,y) \in \mathcal{S}^{-1}$ pro $x \in B, y \in A$

Protože známe souvislost mezi relací a inverzí, nabízí se tento důkaz: Předpoklad:
$$\forall a \in A\ \forall b \in B \text{ platí } (a,b) \in \mathcal{R} \implies (a,b) \in \mathcal{S}.$$
Podle definice inverzní relace se dá $(a,b) \in \mathcal{R}$ nahradit výrazem $(b,a) \in \mathcal{R}^{-1}$, obdobně pro $\mathcal{S}$. Dostaneme tak výrok
$$\forall a \in A\ \forall b \in B \text{ platí } (b,a) \in \mathcal{R}^{-1} \implies (b,a) \in \mathcal{S}^{-1}.$$
To ukazuje, že $\mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{S}^{-1}$.

Tento důkaz je správný, ale takto snadno, přístupem „zacvičím s předpokladem a dostanu závěr“, budeme schopni dokázat jen jednodušší tvrzení. Navíc je otázka, jak vlastně správně odůvodníme „nahrazení“ ve výroku. Dá se ukázat, že je to korektní krok, ale není to zcela intuitivní zejména pro méně zkušené dokazovače, kteří u relací často „dokazují“ i neplatná tvrzení. Proto doporučíme flexibilnější a také bezpečnější typ důkazu.

M 4a.5 Poznámka: Již jsme se setkali se situací, kdy pouhá manipulace s předpokladem dokazovaného tvrzení neposkytla závěr. V poznámce 1a.18 jsme představili přístup zvaný „závěr jako cesta“. Předpoklad jen vyslovíme, ale pak jej necháme v záloze jako nástroj, jehož čas přijde. Hlavní běh důkazu spočívá v tom, že čtenáře provedeme cestou, kterou vidíme coby implikaci v závěru, viz „chci“ výše. Tím vzniká plán důkazu:

$$\begin{array}{c} \text{P: } \mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \\ \downarrow \\ (x,y) \in \mathcal{R}^{-1} \longrightarrow\longrightarrow \cdots \longrightarrow (x,y) \in \mathcal{S}^{-1}. \end{array}$$

Kam se od východiska $(x,y) \in \mathcal{R}^{-1}$ vydáme? Prioritou je dostat se ze světa $\mathcal{R}^{-1}$ do světa $\mathcal{R}$, abychom mohli aplikovat předpoklad P, což ale umíme podle definice inverzní relace. Tím je vlastně důkaz vymyšlen, stačí jej napsat.

Tento systematický přístup bude slavit úspěch u prakticky všech důkazů této kapitoly.

△

Důkaz (poučný)**:** Dány relace $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ z A do B. Předpoklad: $\underline{\underline{\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}}}$.

Pak $\mathcal{R}^{-1}, \mathcal{S}^{-1}$ jsou relace z B do A a má smysl je porovnávat.

Vezměme libovolné $\underline{x \in B, y \in A}$, předpokládejme dále, že $\underline{(x,y) \in \mathcal{R}^{-1}}$. Pak $(y,x) \in \mathcal{R}$, podle hlavního předpokladu tedy $(y,x) \in \mathcal{S}$ a proto $\underline{(x,y) \in \mathcal{S}^{-1}}$.

Ukázali jsme, že $\underline{\underline{\mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{S}^{-1}}}$.

□

S 4a.6 Poznámka: Podívejme se na strukturu tohoto důkazu. Jeho začátek a konec (dvojitě podtržené) dávají hlavní význam, jsou to předpoklad a závěr implikace, kterou dokazujeme. Prostřední odstavec představuje hlavní práci, je to řetěz úvah. Jak víme, smysl takového řetězce je opět dán začátkem a koncem, což jsou jednoduše podtržená místa. Ta představují implikaci, kterou v tomto odstavci dokazujeme. Náš důkaz je tedy vlastně implikace v implikaci. Tato vnitřní implikace je přesně to, co musíme ověřit, abychom mohli tvrdit dvakrát podtržený hlavní závěr. Když u této vnitřní implikace začínáme hlavní řetězec úvah, tak vlastně máme k dispozici dva předpoklady: ten hlavní, z dokazované implikace, a pomocný z vnitřní implikace.

Tuto strukturu bude mít většina důkazů s relacemi v této kapitole a je to jeden z velmi flexibilních základních přístupů k dokazování.

Při psaní hlavního běhu důkazu tohoto typu, zejména pokud se nepíše slohem, ale zkratkami, hrozí, že omylem čtenáři pošleme chybný vzkaz. Uvažujme tento zápis:

$$x\mathcal{R}^{-1}y \longrightarrow y\mathcal{R}x \xrightarrow{\mathcal{R}\subseteq\mathcal{S}} y\mathcal{S}x \longrightarrow y\mathcal{S}^{-1}x \longrightarrow \mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{S}^{-1}.$$

Co je na tom špatně? Tak, jak je to napsáno, vlastně tvrdíme, že inkluze $\mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{S}^{-1}$ vyplývá z toho, že $(y,x) \in \mathcal{S}^{-1}$. To ale vůbec není pravda. Ta inkluze vyplývá z celého toho běhu! Důkaz tedy musíme napsat tak, aby to bylo zjevné, což vlastně znamená zřetelně oddělit odůvodnění vnitřní implikace od návratu k vnější implikaci (tedy konstatování jejího závěru).

Proto doporučujeme u tohoto typu důkazu nejprve hlavní běh (důkaz vnořené implikace) zřetelně ukončit a pak pro čtenáře shrnout jeho význam, který můžeme podepřít zvýrazněním klíčových částí. Například takto:

$$\begin{array}{l} \underline{x\mathcal{R}^{-1}y} \longrightarrow y\mathcal{R}x \xrightarrow{\mathcal{R}\subseteq\mathcal{S}} y\mathcal{S}x \longrightarrow \underline{y\mathcal{S}^{-1}x}. \\ \text{Proto } \mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{S}^{-1}. \end{array}$$

△

K matematickým operacím patří pravidla. Některá pravidla dávají operace do souvislosti s jinými pojmy, jak jsme právě viděli. Důležitá jsou také „počítací“ pravidla, která nám umožňují získat výsledek pro komplikovanější výrazy za předpokladu, že umíme zvládnout jednodušší. Například pokud umíme spočítat $\sqrt{x}$ a $\sqrt{y}$, tak z těchto výsledků získáme i další odmocninu $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$. I pro relace lze vymyslet podobná pravidla. Nejsou zase tak důležitá, abychom se je učili nazpaměť, ostatně pokud rozumíme pojmům, tak je snadno v případě potřeby vymyslíme. Je to ale výborná příležitost procvičit si vnímání matematiky a tvoření důkazů.

Věta 4a.7.
Nechť $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ jsou relace z množiny A do množiny B. Pak platí:
(i) $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \cup \mathcal{S}^{-1}$;
(ii) $(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{S}^{-1}$;
(iii) $(\mathcal{R} \setminus \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \setminus \mathcal{S}^{-1}$.

S **Rozbor:** Máme dokázat tři rovnosti množin. Typicky bychom dokazovali dvě inkluze, nicméně zde by všechny kroky byly „obousměrné“, takže můžeme rovnou dokazovat ekvivalence.

Pro část (iii) je dobré si připomenout pojem obměny. Při přechodu mezi relací a její inverzí používáme ekvivalenci $(a,b) \in \mathcal{R}^{-1} \iff (b,a) \in \mathcal{R}$. Ovšem ekvivalence jsou vlastně dvě implikace, u kterých můžeme přejít k obměnám a opětovným spojením dostaneme ekvivalenci $(b,a) \notin \mathcal{R} \iff (a,b) \notin \mathcal{R}^{-1}$. Rozmyslete si, že to intuitivně dává smysl.

Důkaz (rutinní, poučný)**:** (iii): Dány relace $\mathcal{R},\mathcal{S}$ z A do B. Pak jsou $(\mathcal{R}\setminus\mathcal{S})^{-1}$ i $\mathcal{R}^{-1}\setminus\mathcal{S}^{-1}$ relace z B do A.

Nechť $a \in A$, $b \in B$.

Podle definice $\underline{(a,b) \in (\mathcal{R}\setminus\mathcal{S})^{-1}}$ právě tehdy, když $(b,a) \in \mathcal{R}\setminus\mathcal{S}$. Podle definice rozdílu je toto ekvivalentní tvrzení $(b,a) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \notin \mathcal{S}$. To je zase ekvivalentní tvrzení $(a,b) \in \mathcal{R}^{-1} \wedge (a,b) \notin \mathcal{S}^{-1}$ neboli $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}\setminus\mathcal{S}^{-1}}$.

Ukázali jsme, že množiny $(\mathcal{R}\setminus\mathcal{S})^{-1}$ a $\mathcal{R}^{-1}\setminus\mathcal{S}^{-1}$ mají stejné prvky, tedy jsou si rovny.

Tvrzení (i) a (ii) se dokazují obdobně, proto to necháme jako cvičení 4a.6.

□

Někdy jsme v situaci, kdy na sebe relace navazují.

! **Příklad 4a.o** (pokračování 4a.c)**:** Připomeňme, že $A = \{F, M, P, S\}$ jsou studenti, $B = \{c, d, e\}$ předměty a

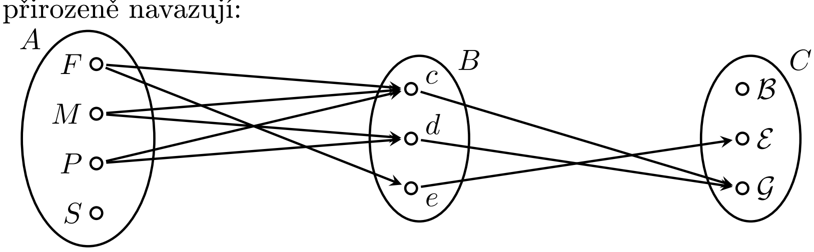
$$\mathcal{R} = \big\{(E,c),(E,e),(M,c),(M,d),(P,c),(P,d)\big\}$$

říká, který student si zapsal jaký předmět.

Teď přidejme do situace učitele $\mathcal{B}$ombadila, $\mathcal{E}$lronda a $\mathcal{G}$andalfa, tedy množinu $C = \{\mathcal{B},\mathcal{E},\mathcal{G}\}$. Informace o tom, který předmět je učen kým, zachycuje relace

$$\mathcal{S} = \big\{(c,\mathcal{G}),(d,\mathcal{G}),(e,\mathcal{E})\big\}.$$

Relace $\mathcal{R}$ a $\mathcal{S}$ na sebe přirozeně navazují:



Tuto komplexní informaci je možné ukládat jako trojice, například $(F,c,\mathcal{G})$, což je sice relace, ale ne binární (viz sekce 4d.3), takže touto cestou se nevydáme.

Z pohledu binárních relací se nabízí možnost odpovědět na otázku, ke kterým profesorům bude chodit ten který student. Zjistí se to tak, že projdeme všechny možné dvojkroky, které tyto navazující relace umožňují, a z každého si vybereme jen začátek a konec. Například z dvojkroku $F \xrightarrow{\mathcal{R}} c \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{G}$ si můžeme vzít jen informaci $F \longrightarrow \mathcal{G}$, která nám říká, že Froda bude v tomto semestru učit (mimo jiné) $\mathcal{G}$andalf. Vznikne tak nová relace.

Vypíšeme zkráceným zápisem všechny možné dvojkroky:

$$F\mathcal{R}c\mathcal{S}\mathcal{G},\ F\mathcal{R}e\mathcal{S}\mathcal{E},\ M\mathcal{R}c\mathcal{S}\mathcal{G},\ M\mathcal{R}d\mathcal{S}\mathcal{G},\ P\mathcal{R}c\mathcal{S}\mathcal{G},\ P\mathcal{R}d\mathcal{S}\mathcal{G}.$$

Z nich pak dostáváme následující dvojice:

$$\big\{(F,\mathcal{E}),(F,\mathcal{G}),(M,\mathcal{G}),(P,\mathcal{G})\big\}.$$

Tato relace popisuje přiřazení učitelů k jednotlivým žákům.

△

Tento postup, kdy z navazujících relací vytvoříme novou vypuštěním „přestupních míst“, lze dělat obecně.

! **Definice.**
Nechť $\mathcal{R}$ je relace z množiny A do množiny B a $\mathcal{S}$ je relace z B do množiny C. Definujeme jejich **složení** $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ jako relaci z A do C definovanou

$$\mathcal{S}\circ\mathcal{R} = \{(a,c) \in A\times C;\ \exists b \in B\colon (a,b)\in\mathcal{R} \wedge (b,c)\in\mathcal{S}\}.$$

If $\mathcal{R}$ is a relation from a set A to a set B and $\mathcal{S}$ is a relation from B to a set C, we define the **composite** of $\mathcal{R}$ and $\mathcal{S}$, denoted $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$, as the relation consisting of ordered pairs (a,c) for which there exists $b \in B$ so that $(a,b)\in\mathcal{R}$ and $(b,c)\in\mathcal{S}$.

Alternativním značením:

$$a(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})c \iff \exists b \in B\colon a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{S}c.$$

Toto značení nabízí užitečnou a výmluvnou zkratku pro navazující dvoukrok: $a\mathcal{R}b\mathcal{S}c$.

Relace skládání je velmi důležitá a zároveň problematická. Všimněte si, že relace i dvojice jdou v pořadí nejprve $\mathcal{R}$, pak $\mathcal{S}$. Tomu ostatně přirozeně odpovídá zápis $a\mathcal{R}b\mathcal{S}c$. Ale ve značení je ta první relace $\mathcal{R}$ napravo: $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$. Toto je silně matoucí nejen pro začátečníky. Není to schválně (jakýsi iniciační obřad pro nové zasvěcence do řádu relací), existuje pro to racionální důvod, který poznáme v kapitole 8, a je to tradiční. Nicméně tradičně to také řadu lidí irituje.

Někteří autoři na to reagují tak, že používají značení $\mathcal{R}\circ\mathcal{S}$, které je mi upřímně řečeno sympatičtější, ale tím do věci jen vnášejí další zmatky, protože chudák čtenář při spatření textu $\mathcal{R}\circ\mathcal{S}$ musí bádat, jestli jeho autor patří k většině „opačníků“, nebo menšině „přirozenců“. Lidé od computer science to často řeší tak, že si pro jistotu zavedou vlastní značení pro skládání, velmi populární je středníkové $\mathcal{R};\mathcal{S}$. Protože ale žádné z těch značení není vnímáno jako všeobecně přijímané, budeme se zde (s nechutí) držet toho asi standardního $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$. Pro jistotu budeme správné pořadí čas od času připomínat.

! **Příklad 4a.p:** Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na $\mathbb{Z}$ danou podmínkou $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $b=2a$, a relaci $\mathcal{S}$ na $\mathbb{Z}$ danou vztahem $\leq$. Jak vypadá $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$?

Začneme pozorováním, že skládání má smysl, protože relace navazují: $\mathbb{Z}\xrightarrow{\mathcal{R}}\mathbb{Z}\xrightarrow{\mathcal{S}}\mathbb{Z}$.

Nejprve si rozmyslíme, zda $(3,13)\in\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$. Podle definice by muselo existovat $b\in\mathbb{Z}$ splňující $(3,b)\in\mathcal{R}$ a $(b,14)\in\mathcal{S}$ neboli $3\mathcal{R}b\mathcal{S}14$ ($\mathcal{R}$ první, $\mathcal{S}$ druhá). Chceme tedy $b=2\cdot 3$ a $b<13$. Snadno zjistíme, že $b=6$ vyhovuje, tedy $(3,13)$ leží v $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$.

Nyní obecně: Aby dvojice (a,c) patřila do $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$, musí se najít nějaké $b\in\mathbb{Z}$ tak, aby $a\mathcal{R}b\mathcal{S}c$. To znamená, že $b=2a$ a $b\leq c$. Pokud tedy $(a,c)\in\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$, pak platí ty dvě nerovnosti neboli (jejich spojením) $2a\leq c$.

Abychom mohli prohlásit, že právě tato podmínka určuje složenou relaci, tak ještě musíme ověřit opačný směr, tedy že libovolná dvě čísla a,c splňující $2a\leq c$ tvoří dvojici $(a,c)\in\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$. Musíme pro ně najít přestupní stanici b podle předpisu. Nabízí se číslo $b=2a$. Pak opravdu $b\in\mathbb{Z}$ a platí $b=2a$ a $b\leq c$ neboli $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{S}c$.

Potvrdili jsme, že relace $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ je přesně množina všech dvojic (a,c) splňujících $2a\leq c$.

Relace na sebe také navazují v pořadí $\mathbb{Z}\xrightarrow{\mathcal{S}}\mathbb{Z}\xrightarrow{\mathcal{R}}\mathbb{Z}$. Jak vypadá $\mathcal{R}\circ\mathcal{S}$?

Pokud dvojice (a,c) patří do $\mathcal{R}\circ\mathcal{S}$, musí se najít nějaké $b\in\mathbb{Z}$ tak, aby $a\mathcal{S}b\mathcal{R}c$. To znamená, že $a\leq b$ a $c=2b$. Když to spojíme, dostáváme $a\leq\frac{1}{2}c$ neboli $2a\leq c$.

Popisuje opravdu podmínka $2a\leq c$ složenou relaci? Pokud dvojice (a,c) splňuje $2a\leq c$, pak můžeme zvolit $b=\frac{1}{2}c$ a dostáváme $a\leq b$ a $c=2b$ neboli $a\mathcal{S}b$ a $b\mathcal{R}c$. Jenže nelze tvrdit, že díky tomu $(a,c)\in\mathcal{R}\circ\mathcal{S}$, protože jsme ještě neověřili, že $b\in\mathbb{Z}$. A máme problém.

Například $(3,13)\notin\mathcal{R}\circ\mathcal{S}$, protože kvůli lichosti nelze nikdy mít $b\mathcal{R}13$ neboli $13=2b$ pro $b\in\mathbb{Z}$.

Tou správnou podmínkou popisující relaci $\mathcal{R}\circ\mathcal{S}$ je tedy $2a\leq c$ a c sudé.

Mimochodem, při zkoumání relace $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ jsme napsali, že $b=2a$ splňuje $b\in\mathbb{Z}$, ale možná tomu čtenář nevěnoval příliš pozornosti. Jak je vidět, může to být rozhodující detail.

△

U operací oceňujeme komutativitu. Ovšem pravidlo $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}=\mathcal{R}\circ\mathcal{S}$ nemůže platit už z principu, protože není zaručeno, že když na sebe dvě relace navazují v jednom pořadí, tak budou navazovat také v druhém. Krásným příkladem jsou naše školní relace, kdy jsme $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ skládat mohli, ale pokus o $\mathcal{R}\circ\mathcal{S}$ by nás prostřednictvím $\mathcal{S}$ poslal od předmětů k učitelům a s těmi $\mathcal{R}$ neumí pracovat.

Někdy relace lze skládat v obou pořadích, ale jak ukazuje poslední příklad, ani pak není zaručena možnost prohazovat pořadí, relace $\mathcal{R}\circ\mathcal{S}$ a $\mathcal{R}\circ\mathcal{S}$ tam nejsou stejné. Ukažme jeden extrémní příklad.

Příklad 4a.q: Uvažujme množinu $A=\{1,3,5,7,11,13\}$ a definujme relaci $\mathcal{R}$ na A předpisem $a\mathcal{R}b$ jestliže a dělí b. Máme

$$\mathcal{R}=\{(1,1),(1,3),(1,5),(1,7),(1,11),(1,13)\},\qquad \mathcal{R}^{-1}=\{(1,1),(3,1),(5,1),(7,1),(11,1),(13,1)\}.$$

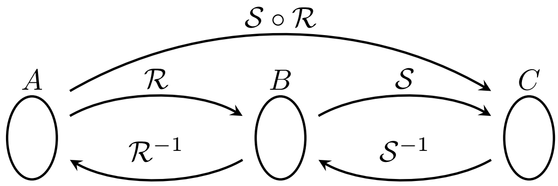
Pak jediné navazující dvojice, které jsme schopni z $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}^{-1}$ vytvořit, jsou typu $1\mathcal{R}a\mathcal{R}^{-1}1$, proto $\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{R}=\{(1,1)\}$.

V opačném pořadí je výsledná relace naopak bohatší, protože pro libovolná $a,b\in A$ máme $a\mathcal{R}^{-1}1\mathcal{R}b$. Proto $\mathcal{R}\circ\mathcal{R}^{-1}=A\times A$.

△

Což nás přivádí k pravidlům. Ve větě 4a.7 jsme úspěšně našli inverzní relaci k relacím, které vznikly jako výsledek množinových operací. Rádi bychom totéž zopakovali pro skládání. Tedy: Máme relace $\mathcal{R},\mathcal{S}$, které lze skládat (navazují na sebe) a pro každou z nich umíme snadno najít její inverzní relaci. Pomůže nám to s nalezením relace $(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{-1}$? Nejprve se zamyslíme nad souvislostmi.

Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ z A do B a relaci $\mathcal{S}$ z B do C. Pak také existuje složená relace $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ z A do C.



K relacím $\mathcal{R}$ a $\mathcal{S}$ máme inverzní relace $\mathcal{R}^{-1}$ a $\mathcal{S}^{-1}$ a rádi bychom pomocí nich dostali relaci inverzní k $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$. Již z obrázku je jasné, že $\mathcal{S}^{-1}\circ\mathcal{R}^{-1}$ není dobrý nápad, protože v tomto pořadí tyto relace obecně skládat nelze. $\mathcal{R}^{-1}$ nás zavede z B do A a s tím relace $\mathcal{S}^{-1}$ nemusí být schopna pracovat.

Obrázek ovšem také zaznačuje, že má smysl skládat v pořadí $\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{S}^{-1}$, protože začneme s $\mathcal{S}^{-1}$ vedoucí z C do B a $\mathcal{R}^{-1}$ dokáže navázat. Ukážeme, že toto je dobrý nápad.

! **Věta 4a.8.**
Nechť $\mathcal{R}$ je relace z množiny A do množiny B a $\mathcal{S}$ je relace z B do množiny C.
Pak $(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{-1}=\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{S}^{-1}$.

Důkaz (rutinní)**:** Relace $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ jde z A do C, takže $(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{-1}$ jde z C do A. To je stejný směr, kterým jde složená relace $\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{S}^{-1}$, vznikla totiž z řetízku $C\xrightarrow{\mathcal{S}^{-1}}B\xrightarrow{\mathcal{R}^{-1}}A$. Relace $(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{-1}$ a $\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{S}^{-1}$ jsou tedy definovány na stejných množinách.

Dokážeme, že množiny $(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{-1}$ a $\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{S}^{-1}$ obsahují shodné prvky. Vezměme libovolné $c\in C$, $a\in A$.

$\underline{(c,a)\in(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{-1}}$ právě tehdy, když $(a,c)\in\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$, což je právě tehdy, když $\exists b\in B$: $(a,b)\in\mathcal{R}$ a $(b,c)\in\mathcal{S}$. Podle definice inverzních relací to je právě tehdy, když $\exists b\in B$: $(b,a)\in\mathcal{R}^{-1}$ a $(c,b)\in\mathcal{S}^{-1}$ neboli $(c,b)\in\mathcal{S}^{-1}$ a $(b,a)\in\mathcal{R}^{-1}$, což je právě tehdy, když $\underline{(c,a)\in\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{S}^{-1}}$.

$\square$

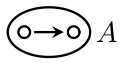
Všimněte si, že jsme ve větě v rovnosti museli změnit pořadí relací. Podobný vztah se v matematice vyskytuje pokaždé, když přecházíme k inverzi, čtenář se s tímto jevem mohl setkat u násobení matic. Nicméně není to zcela totéž, protože u relací není inverze definována pomocí skládání, takže jsme tento výsledek nemohli jednoduše zdědit z kapitoly 19.

Jak to dopadne, když se potká skládání a množinové operace? I zde se dají vymyslet pravidla, která se také nestojí za to učit. Odkážeme proto na cvičení 4a.12. Některé jeho části vyžadují opatrnější zamyšlení, určitě si to nenechte ujít.

S **Poznámka:** Co vlastně matematik dělá, když přemýšlí, zda platí nějaké pravidlo? Vyzkouší to na konkrétních příkladech. Určitě pomůže, když si člověk dobře rozumí s dotyčnými pojmy, „cítí“ intuitivně, jak věci fungují. Často se také u abstraktních pojmů dají najít vizuální interpretace, které pomohou, u relací bývá oblíbený graf. Je proto užitečné si s touto vizualizací dobře rozumět a umět si přeložit rozličné vlastnosti a operace do obrázkové podoby. Obzvláště užitečné to je při hledání příkladů a protipříkladů.

Pokud by nás třeba zajímalo, zda pro všechny relace na množině platí $\mathcal{R}^{-1}=\mathcal{R}$, tak asi brzy přejdeme do fáze hledání protipříkladu. Můžeme vymyslet matematický protipříklad, třeba relaci $\mathcal{R}$ danou $<$ na $\mathbb{Z}$, u které je pak potřeba vysvětlit, proč je to vlastně protipříklad.

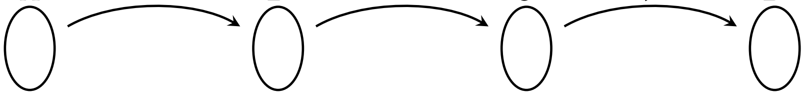
Nebo prostě nakreslíme jednoduchý graf a je to hned vidět. Formálně: na množině $A=\{1,2\}$ uvažujeme relaci $\mathcal{R}=\bigl\{(1,2)\bigr\}$. Pak $\mathcal{R}^{-1}=\bigl\{(2,1)\bigr\}\neq\mathcal{R}$.



Matematika má výhodu, že experimenty bývají obvykle velmi levné. Není třeba budovat miliardové urychlovače pod kusem Evropy, stačí tužka a papír. Když nějaký nápad přežije tuto experimentální fázi, tak nastane čas na pořádnou matematiku—je třeba najít důkaz.

$\triangle$

V příkladě ze školy 4a.o jsme skládali relaci, spojující studenty a předměty, s relací spojující předměty a vyučující. Mohli bychom na to navázat ještě třetí relací spojující učitele a umístění jejich komnat. Pokud bychom spojili začátky a konce cest (tedy teď vynecháváme dva přestupní body), tak by výsledkem byla relace ukazující, kam má který student chodit za svými vyučujícími na konzultace.



V principu není problém navázat libovolný počet relací, ale nemáme na to definici. Nabízí se v zásadě dvě možnosti. Jedna je přímo zachytit myšlenku zkracování delších řetízků (trojkroky, čtyřkroky, …), ale ta je technicky náročnější. Proto je obvyklý jiný přístup.

Jeho výhoda je v tom, že nepotřebujeme nic nového vymýšlet. Nejprve pomocí známého principu složíme $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$, čímž vznikne jedna relace z A do C a tu podle již existujícího principu umíme složit s navazující relací $\mathcal{T}$. Vytvořili jsme tedy relaci $\mathcal{T}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})$.

Může se ovšem stát, že někdo by v případě naší školní relace raději začal od konce a skládal takto: $(\mathcal{T}\circ\mathcal{S})\circ\mathcal{R}$. Kdyby to byl profesor, tak to dokonce může napsat do učebnice. Naštěstí změna závorkování (a tedy pořadí sdružování do dvojic) nemá vliv na konečný výsledek.

Fakt 4a.9.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace z množiny A do množiny B, $\mathcal{S}$ je relace z B do množiny C a $\mathcal{T}$ je relace z C do množiny D. Pak $(\mathcal{T}\circ\mathcal{S})\circ\mathcal{R}=\mathcal{T}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})$.

M Matematicky řečeno tvrdíme, že skládání jako operace je „asociativní“.

Důkaz (rutinní)**:** Obě relace jdou z A do C, zbývá je porovnat jako množiny.
1) Dokážeme, že $(\mathcal{T}\circ\mathcal{S})\circ\mathcal{R}\subseteq\mathcal{T}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})$.
Uvažujme $\underline{(a,d)\in(\mathcal{T}\circ\mathcal{S})\circ\mathcal{R}}$. Podle definice to znamená, že $\exists b\in B$: $(a,b)\in\mathcal{R}$ a $(b,d)\in\mathcal{T}\circ\mathcal{S}$. Z toho druhého pak máme, že $\exists c\in C$: $(b,c)\in\mathcal{S}$ a $(c,d)\in\mathcal{T}$.
Z dvojice $(a,b)\in\mathcal{R}$ a $(b,c)\in\mathcal{S}$ vyplývá, že $(a,c)\in\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$, spolu s $(c,d)\in\mathcal{T}$ dostaneme $\underline{(a,d)\in\mathcal{T}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})}$.
2) Opačnou inkluzi dokážeme obdobně.

$\square$

Praktickým důsledkem je, že můžeme psát prostě $\mathcal{T}\circ\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ a nechat na čtenáři, jak si to uzávorkuje. Je to podobné jako u násobení, tam také na pozici závorek nezáleží, takže píšeme třeba $3\cdot 5\cdot 13$ a je nám jedno, v jakém pořadí si to kdo vynásobí.

Opakovaným aplikováním zjistíme, že u skládání čtyř relací také můžeme volit pořadí, třeba $(\mathcal{U}\circ\mathcal{T})\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})$, což lze opět realizovat čistě pomocí definice skládání pro dvě relace. Ovšem pokud chceme skládání více relací zadefinovat, tak se bude hodit spíše závorkování $\mathcal{U}\circ(\mathcal{T}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{R}))$, protože tímto postupem pak zvládneme třeba sedm skládaných relací. Protože nevíme, kolik těch relací v různých situací máme, musíme v definici použít indukci.

Definice.
Nechť $n\geq 3$, uvažujme množiny $A_0,A_1,\dots,A_n$.
Pro $i=1,\dots,n$ nechť $\mathcal{R}_i$ je relace z A_{i-1} do A_i.
Pak definujeme skládání $\mathcal{R}_n\circ\mathcal{R}_{n-1}\circ\cdots\circ\mathcal{R}_2\circ\mathcal{R}_1$ předpisem $\mathcal{R}_n\circ(\mathcal{R}_{n-1}\circ\cdots\circ\mathcal{R}_2\circ\mathcal{R}_1)$.

V této definici mají tři tečky lokálně přesně daný význam. Například pokud chceme skládat $\mathcal{U}\circ\mathcal{T}\circ\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$, tak porovnáním zápisu zjistíme, že $\mathcal{R}_{n-1}\circ\cdots\circ\mathcal{R}_1$ odpovídá výrazu $\mathcal{T}\circ\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ a tedy máme $\mathcal{U}\circ\mathcal{T}\circ\mathcal{S}\circ\mathcal{R}=\mathcal{U}\circ(\mathcal{T}\circ\mathcal{S}\circ\mathcal{R})$. Aplikací definice na $\mathcal{T}\circ\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ pak dojdeme k výslednému tvaru

$$\mathcal{U}\circ\mathcal{T}\circ\mathcal{S}\circ\mathcal{R}=\mathcal{U}\circ(\mathcal{T}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})).$$

Důkaz věty 4a.9 nám ukázal zajímavou informaci: $\mathcal{T}\circ\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ se skládá z dvojic (a,d), pro které máme trojkrok $a\mathcal{R}b\mathcal{S}c\mathcal{T}d$. Zejména pro intuitivní úvahy se hodí potvrdit, že toto je obecný jev a relace vytvořená skládáním n relací vzniká zkrácením n-kroků.

Lemma 4a.10. (o řetízcích)
Nechť $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, uvažujme množiny $A_0,A_1,\dots,A_n$. Pro $i=1,\dots,n$ nechť $\mathcal{R}_i$ je relace z A_{i-1} do A_i.
Dvojice $(a,z)\in A_0\times A_n$ je v relaci $\mathcal{R}_n\circ\cdots\circ\mathcal{R}_1$ právě tehdy, když pro $i=0,1,\dots,n$ existují $b_i\in A_i$ takové, že $b_0=a$, $b_n=z$ a pro každé $i=1,\dots,n$ platí $(b_{i-1},b_i)\in\mathcal{R}_i$.

Když prvky b_i splňují $(b_{i-1},b_i)\in\mathcal{R}_i$, tak vlastně máme n-krok $b_0\mathcal{R}_1b_1\mathcal{R}_2\cdots b_{n-1}\mathcal{R}_nb_n$. Takovéto posloupnosti prvků $\{b_i;\ i=0,\dots,n\}$ zde budeme neformálně říkat „řetízek délky n z b_0 do b_n“.

Důkaz: Důkaz povedeme indukcí.
(0) Případ $n=2$: Dvojice (a,c) leží v $\mathcal{R}_2\circ\mathcal{R}_1$ podle definice právě tehdy, pokud existuje $b\in A_1$ splňující $(a,b_1)\in\mathcal{R}_1$ a $(b_1,c)\in\mathcal{R}_2$. Tento výrok ovšem popisuje řetízek délky 2 z a do c.
(1) Nechť $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Předpokládejme, že platí tvrzení, že pro libovolných n relací je $\mathcal{R}_n\circ\cdots\circ\mathcal{R}_1$ tvořeno právě dvojicemi pocházejícími z krajních bodů řetízků o délce n. Potřebujeme ukázat, že obdobné tvrzení platí i pro libovolných $n+1$ relací.

Uvažujme proto nějaké množiny $A_0, A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ a relace $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{n+1}$, přičemž pro každé $i = 1, \dots, n+1$ je $\mathcal{R}_i$ relace z A_{i-1} do A_i. Potřebujeme ukázat, že prvky relace $\mathcal{R}_{n+1} \circ \mathcal{R}_n \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1$ jsou přesně ty pocházející z řetízků délky $n+1$.

a) Vezměme nějaké $a \in A_0$, $z \in A_{n+1}$ takové, že $(a,z) \in \mathcal{R}_{n+1} \circ \mathcal{R}_n \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1$. Podle definice skládání $(a,z) \in \mathcal{R}_{n+1} \circ (\mathcal{R}_n \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1)$, proto musí existovat prvek $y \in A_n$ takový, že $(y,z) \in \mathcal{R}_{n+1}$ a $(a,y) \in \mathcal{R}_n \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1$.

Druhý fakt podle indukčního předpokladu znamená, že existuje řetízek délky n z a do y, označme jej $b_0, b_1, \dots, b_n$. Víme, že $b_0 = a$ a $b_n = y$. Když označíme $b_{n+1} = z$, tak získáme prvky $b_0, b_1, \dots, b_n, b_{n+1}$ a snadno ověříme, že jde o řetízek délky $n+1$ z a do z. Ukázali jsme, že každý prvek z $\mathcal{R}_{n+1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1$ lze získat pomocí nějakého příslušného řetízku.

b) Nyní musíme naopak ukázat, že pro všechny řetízky délky $n+1$ tvoří jejich krajní body dvojice z relace $\mathcal{R}_{n+1} \circ \mathcal{R}_n \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1$.

Vezměme nějaký řetízek $b_0, b_1, \dots, b_n, b_{n+1}$ délky $n+1$. Snadno se ověří, že prvky $b_0, b_1, \dots, b_n$ pak nutně tvoří řetízek délky n z b_0 do b_n. Podle indukčního předpokladu proto musí dvojice krajních bodů (b_0, b_n) ležet v $\mathcal{R}_n \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1$. Podmínka řetízku také říká, že $(b_n, b_{n+1}) \in R_{n+1}$, podle definice skládání dvou relací proto $(b_0, b_{n+1}) \in \mathcal{R}_{n+1} \circ (\mathcal{R}_n \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1)$. To ale znamená, že $(b_0, b_{n+1}) \in \mathcal{R}_{n+1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1$, přesně jak jsme potřebovali.

□

Charakterizace skládání relací pomocí řetízků se nám bude v následujících částech opakovaně hodit. Když se dohodneme, že výraz $\mathcal{R}_n \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1$ má pro $n = 1$ hodnotu $\mathcal{R}_1$, tak lemma platí i pro $n = 1$, protože řetízky délky 1 jsou právě dvojice b_0, b_1 splňující $(b_0, b_1) \in \mathcal{R}_1$.

Často pracujeme s relací $\mathcal{R}$ na množině A, tedy s relací z A do A. Tu je pak možné libovolně napojovat za sebe: $A \xrightarrow{\mathcal{R}} A \xrightarrow{\mathcal{R}} \cdots \xrightarrow{\mathcal{R}} A \xrightarrow{\mathcal{R}} A$. Zapsalo by se to $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \circ \cdots \circ \mathcal{R}$, inspirováni násobením tomu říkáme mocnina.

Definice.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A. Pak definujeme její **mocninu** rekurzivně jako
(0) $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$;
(1) $\mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Let $\mathcal{R}$ be a relation on some set A. We define **powers** of $\mathcal{R}$ recursively by $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$ and $\mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^n$ for $n \in \mathbb{N}$.

Protože je to jen speciální případ skládání více relací, platí i zde naše úvahy o asociativitě a lemma o řetízcích.

Příklad 4a.r: Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na $\mathbb{Z}$ danou předpisem $a\mathcal{R}b \iff b = a+1$.

Mocninu $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ určíme pomocí dvojkroků $a\mathcal{R}b\mathcal{R}c$. Ty musejí splňovat $b = a+1$ a $c = b+1$, tedy $c = a+2$. Naopak každá dvojice (a,c) splňující $c = a+2$ pochází z dvojkroku $a\mathcal{R}(a+1)\mathcal{R}c$.

Ukázali jsme, že $\mathcal{R}^2$ je dána předpisem $a\mathcal{R}^2c \iff c = a+2$.

Obdobně si rozmyslíme, že $\mathcal{R}^3$ je dána předpisem $a\mathcal{R}^3d \iff d = a+3$. Indukcí se pak ukáže, že $\mathcal{R}^n$ se skládá z dvojic (a,z) splňujících $z = a+n$.

△

Příklad 4a.s: Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ danou na $\mathbb{R}$ předpisem $x\mathcal{R}y \iff x < y$.

Mocnina $\mathcal{R}^2$ se skládá z dvojic (x,z) takových, že $x\mathcal{R}y\mathcal{R}z$ pro nějaké $y \in \mathbb{R}$. Pak platí $x < z$. Naopak, pokud $x < z$, tak stačí zvolit $y = \frac{x+z}{2}$ (neboli bod přesně mezi nimi) a máme $x < y < z$, tedy $(x,z) \in \mathcal{R}^2$.

Zjistili jsme, že $\mathcal{R}^2$ je dáno podmínkou $x < z$, takže vlastně $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$. Potom také $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pokud bychom chtěli příklad relace, která se mocninou nemění, a nechtělo by se nám ji tvořit ze známých matematických vztahů, tak by stačilo vzít $A = \{1\}$ a $\mathcal{R} = \big\{(1,1)\big\}$. Pak je pro $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ jediný navazující řetízek $1\mathcal{R}1\mathcal{R}1$ a tedy $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$.

Všimneme si, že pokud bychom uvažovali $<$ na $\mathbb{Z}$, tak by tato relace (nazvěme ji $\mathcal{S}$) už nesplňovala $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}$. Sice bychom ukázali, že všechny dvojice $(x,z) \in \mathcal{S}^2$ musí splňovat $x < z$, ale nefunguje to naopak. Pro dvojici $(13,14)$ budeme marně hledat $b \in \mathbb{Z}$ splňující $13\mathcal{S}b\mathcal{S}14$ neboli $13 < b < 14$.

Když si ale uvědomíme, že na $\mathbb{Z}$ lze tuto relaci popsat také podmínkou $x \le y-1$, tak snadno odvodíme, že $\mathcal{S}^2$ je dána podmínkou $x \le y-2$, obecně pak $\mathcal{S}^n$ podmínkou $x \le y-n$.

Ještě malý návrat ke skládání. Máme relaci $\mathcal{S}$ danou jako $<$ na $\mathbb{Z}$. Jak vypadá $\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{S}$? Tentokráte hledáme všechny dvojkroky $a\mathcal{S}b\mathcal{S}^{-1}c$, což znamená $a < b > c$. Z toho o vztahu a, c nelze vyvodit nic. Tvrdíme, že v této složené relaci jsou všechny možné dvojice, protože pro libovolné $a, c \in \mathbb{Z}$ stačí vzít $b = \max(a,c)+1$ a máme $a < b > c$. Takže $\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{S} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Podobně se ukáže, že pro relaci $\mathcal{R}$ ($<$ na $\mathbb{R}$) platí $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

△

Co se od mocniny $\mathcal{R}^n$ dá čekat? V zásadě cokoliv. Například není zaručeno, že v $\mathcal{R}\circ\mathcal{R}$ zůstanou původní dvojice z $\mathcal{R}$ (příklad 4a.r). Z prvků $(a,b)\in\mathcal{R}$ se do $\mathcal{R}\circ\mathcal{R}$ dostanou jen ty, u kterých lze krok $a\mapsto b$ udělat i přes prostředníka $a\mathcal{R}x\mathcal{R}b$.

Někdy se stane, že se výsledek s každou mocninou změní (příklad 4a.r), jindy zase po určité mocnině již k ničemu novému nedojdeme a všechny další mocniny vypadají stejně (cvičení 4a.13). Jsou dokonce relace, které se umocňováním vůbec nemění, viz příklad 4a.s.

Klidně se může stát, že začneme s relativně bohatou relací, ale po umocnění už zbyde velice málo. Jednoduchý extrémní příklad: Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na množině $A=\{1,2,3\}$ danou jako $\mathcal{R}=\bigl\{(1,2),(3,2)\bigr\}$. Pak nelze vytvořit žádný navazující řetězec $a\mathcal{R}b\mathcal{R}c$, takže $\mathcal{R}^2=\emptyset$. Je ovšem také možný jev přesně opačný: Začneme s relací, párkrát umocníme a dostaneme maximální možnou relaci $A\times A$, kdy je každý s každým v relaci.

Velikost mocniny tedy v jistém smyslu říká, jak dobře na sebe dvojice v $\mathcal{R}$ navazují. Někdy hodně napoví už první skládání.

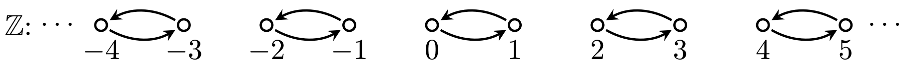
Fakt 4a.11.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A. Jestliže $\mathcal{R}^2\subseteq\mathcal{R}$, pak $\mathcal{R}^n\subseteq\mathcal{R}$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$.

Důkaz (poučný)**:** Dána relace $\mathcal{R}$ na A. Předpokládejme, že platí $\mathcal{R}^2\subseteq\mathcal{R}$. Důkaz tvrzení „$\forall n\in\mathbb{N}$: $\mathcal{R}^n\subseteq\mathcal{R}$“ povedeme indukcí.
(0) Pro $n=1$ máme potvrdit inkluzi $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{R}$, ta evidentně platí.
(1) Uvažujme libovolné $n\in\mathbb{N}$ a předpokládejme, že $\mathcal{R}^n\subseteq\mathcal{R}$. Chceme dokázat, že $\mathcal{R}^{n+1}\subseteq\mathcal{R}$.
Nechť $(a,b)\in\mathcal{R}^{n+1}$. Protože $\mathcal{R}^{n+1}=\mathcal{R}\circ\mathcal{R}^n$, musí existovat $x\in A$ takové, že $(a,x)\in\mathcal{R}^n$ a $(x,b)\in\mathcal{R}$. Podle indukčního předpokladu ovšem $(a,x)\in\mathcal{R}$, takže jak (a,x), tak (x,b) leží v $\mathcal{R}$. Proto $(a,b)\in\mathcal{R}^2$, tedy podle předpokladu pak také $(a,b)\in\mathcal{R}$.

□

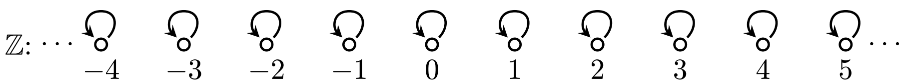
Příklad 4a.t: Uvažujme následující relaci $\mathcal{R}$ na $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{R}=\bigcup_{a\in\mathbb{Z}}\bigl\{(2a,2a+1),(2a+1,2a)\bigr\}=\dots\cup\bigl\{(-2,-1),(-1,-2)\bigr\}\cup\bigl\{(0,1),(1,0)\bigr\}\cup\bigl\{(2,3),(3,2)\bigr\}\cup\cdots$$
$$=\bigl\{\dots,(-2,-1),(-1,-2),(0,1),(1,0),(2,3),(3,2),\dots\bigr\}.$$



Vidíme navazující dvojkroky $(2a)\mathcal{R}(2a+1)\mathcal{R}(2a)$ a $(2a+1)\mathcal{R}(2a)\mathcal{R}(2a+1)$. Jejich zkrácením vznikne mocnina $\mathcal{R}^2$, tedy

$$\mathcal{R}^2=\bigl\{(x,x);\ x\in\mathbb{Z}\bigr\}.$$



Tato relace sestávající ze všech smyček má speciální značení Δ a poznáme ji v dalších sekcích.

$\mathcal{R}^3=\mathcal{R}\circ\mathcal{R}^2=\mathcal{R}\circ\Delta$. Jediné navazující dvojkroky jsou typu $(2a)\mathcal{R}(2a)\mathcal{R}(2a+1)$ a $(2a+1)\mathcal{R}(2a+1)\mathcal{R}(2a)$, jejichž zkrácením dostáváme dvojice $(2a,2a+1)$ a $(2a+1,2a)$. Takže $\mathcal{R}^3=\mathcal{R}$.

Pak $\mathcal{R}^4=\mathcal{R}\circ\mathcal{R}^3=\mathcal{R}\circ\mathcal{R}=\mathcal{R}^2=\Delta$, $\mathcal{R}^5=\mathcal{R}\circ\mathcal{R}^4=\mathcal{R}\circ\Delta=\mathcal{R}$ atd.

Závěr: $\mathcal{R}^k=\mathcal{R}$ pro k liché a $\mathcal{R}^k=\Delta$ pro k sudé. Hodnoty mocniny přeblikávají mezi dvěma relacemi (semafor).
△

Příklad naznačuje, že zajímavou roli u mocnin a skládání obecně hrají smyčky, viz cvičení 4c.1.

Příklad 4a.u: Uvažujme množinu lidí, třeba žijících obyvatel jistého města, a zavedeme na A relaci $\mathcal{R}$ předpisem, že $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když b je biologický rodič a. Co je $\mathcal{R}^2$?

Aby $(a,c)\in\mathcal{R}^2$, musí existovat člověk $b\in A$ takový, že $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}c$, tedy b je rodič a a c je rodič b. Vidíme, že $\mathcal{R}^2$ je relace, která spojuje vnu(č)ky a s jejich dědy a babičkami c. Obdobně si rozmyslíme, že $\mathcal{R}^3$ spojuje pravnu(č)ky s prarodiči atd.
△

Příklad 4a.v: Uvažujme množinu A všech autobusových zastávek v Opavě a relace $\mathcal{R}$ nám říká, kam se dostaneme přímým spojem. Přesně, $a\mathcal{R}b$ jestliže existuje linka, která dovoluje nastoupit v a a vystoupit v b. Pak nám $\mathcal{R}^2$ říká, kam se dostaneme s přesně jedním přestupem, $\mathcal{R}^3$ nám říká, kam se dostaneme s přesně dvěma přestupy, a tak dále. Když to dáme všechno dohromady, tak vidíme, že $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}^n$ je relace, která říká, odkud kam se nějakým způsobem dostaneme autobusem.

△

Relace udávající všechna možná spojení bývá v některých aplikacích velmi užitečná. Studentům computer science asi bude bližší příklad, kdy relace $\mathcal{R}$ popisuje přímé spojení mezi počítači/servery/routery (drát, elmag. vlny, optika, poštovní holub). Mocnina $\mathcal{R}^n$ pak popisuje propojení počítačů přes $n-1$ přestupních bodů a relace $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}^n$ udává, které počítače jsou spolu nějakým způsobem propojeny. Tím je inspirováno názvosloví.

Definice.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A. Relace $\mathcal{R}^* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}^n$ se nazývá **connectivity relation** relace $\mathcal{R}$.

Dobrá otázka samozřejmě je, jak takovou relaci najít v praxi, kde jsou nekonečna trochu problém. Dá se ukázat, že pokud má množina A m prvků, pak se dá libovolný řetízek (viz lemma o řetízcích) zkrátit tak, aby nebyl delší než m. To znamená, že dostaneme $\mathcal{R}^* = \bigcup\limits_{n=1}^{m} \mathcal{R}^n$.

Na závěr se podíváme na kartézský součin.

Příklad 4a.w: Uvažujme množinu T tlumočníků a L lékařů. Cílem je vytvořit z nich dvojice pro krizové oblasti.

Máme také množinu J jazyků a relace $\mathcal{R}$ z T do J říká, jakými jazyky se tlumočníci domluví. Máme také množinu O lékařských odborností a relace $\mathcal{S}$ z L do O zachycuje kvalifikaci jednotlivých lékařů.

Možné týmy jsou shromážděny v množině $T \times L$, tedy jde o dvojice (tlumočník, lékař). Pomocí relací $\mathcal{R}$ a $\mathcal{S}$ se sice k informaci o kvalifikacích takové dvojice dostaneme, ale rádi bychom to měli jako jednu relaci z $T \times L$ do $J \times O$.

Relace jsou množiny, proto je možné z nich také dělat kartézské součiny. Množina $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ se skládá z dvojic (α, β), kde $\alpha \in \mathcal{R}$ a $\beta \in \mathcal{S}$, takže v $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ by se třeba našla dvojice

$$\big((\text{Petr}, \text{swahili}), (\text{Petra}, \text{chirurg})\big).$$

To ale není to, co bychom potřebovali. My chceme informaci o týmech, čili potřebujeme dvojice

$$\big((\text{Petr}, \text{Petra}), (\text{swahili}, \text{chirurg})\big).$$

Když to nejde s tím, co máme, musíme vymyslet něco nového.

△

Obecně řečeno, pracujeme s vektory, přičemž pro každou složku máme zaveden určitý vztah. Rádi bychom na základě toho vytvořili vztah mezi celými vektory. Jedna možnost se zdá přirozená.

Definice.
Nechť $n \in \mathbb{N}$, pro $i = 1, \dots, n$ nechť $\mathcal{R}_i$ je relace z množiny A_i do množiny B_i. Označme $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ a $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$. Definujeme relaci $\mathcal{R}$ z A do B zvanou **součinová relace** (**product relation**) takto: Pro $(a_1, \dots, a_n) \in A$, $(b_1, \dots, b_n) \in B$ platí $(a_1, \dots, a_n)\mathcal{R}(b_1, \dots, b_n)$ právě tehdy, když $(a_i, b_i) \in \mathcal{R}_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$.

Takže chceme-li vědět, zda jsou dva vektory v relaci, tak se podíváme, zda to platí pro všechny jejich složky. Obvykle se pracuje se situací, kdy $A_i = B_i$, jinými slovy, máme relace $\mathcal{R}_i$ na množinách A_i a chceme porovnávat vektory z $A_1 \times \dots \times A_n$.

Příklad 4a.x: Uvažujme kartézský součin $A = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Na první souřadnici, tedy na $A_1 = \mathbb{R}$, mějme relaci $<$; na druhé souřadnici, tedy $A_2 = \mathbb{N}$, uvažujme relaci dělitelnosti $a \mid b$ neboli b je násobek a (viz kapitola 1). Tím vzniká také součinová relace $\mathcal{R}$ na vektorech z $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

Máme například $(-1, 4)\mathcal{R}(\pi, 12)$, protože $-1 < \pi$ a 4 dělí 12, podobně třeba $(2, 13)\mathcal{R}(e, 26)$, ale už neplatí $(1, 6)\mathcal{R}(2, 8)$, protože 6 nedělí 8. Neplatí také $(2, 9)\mathcal{R}(1, 18)$, kde selhává relace $<$ u první složky, a už vůbec ne $(13, 13)\mathcal{R}(11, 23)$.

△

Viz také příklad 4b.i.

Často na všech složkách uvažujeme stejnou relaci.

Příklad 4a.y: Uvažujme relaci $=$ na $\mathbb{R}$. Pokud zvolíme $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = B_1 = \cdots = B_n = \mathbb{R}$, pak $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \mathbb{R}^n = B$. Chceme tedy vytvořit relaci na klasickém prostoru reálných vektorů. Podle definice jsou dva vektory $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)$ spolu v součinové relaci $\mathcal{R}$ právě tehdy, pokud pro všechna i máme $x_i = y_i$. Jinými slovy, v tomto příkladě nám vzniká běžná rovnost vektorů.
△

V případě, kdy máme na všech složkách stejné relace, se pro součinovou relaci často používá stejná značka, což je zrovna případ rovnosti. Podobně můžeme uvažovat reálná čísla s relací $\leq$, pro n-rozměrné vektory z $\mathbb{R}^n$ pak vzniká součinová relace, kterou můžeme zase značit $\leq$ a platí, že $(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n)$ právě tehdy, pokud pro všechna i máme $x_i \leq y_i$.

V této a následujících kapitolách nejprve uvidíme, že tento způsob vytváření relací na vektorech je dobrý nápad, a posléze že zase není až tak dobrý (což se zrovna týká součinové relace $\leq$), takže pro jisté specializované použití budeme potřebovat jiný nápad.

Cvičení

Cvičení 4a.1 (rutinní)**:** Uvažujme relace na množině $A = \{0, 2, 4, 6\}$ definované pro $a, b \in A$ takto:
a) $a\mathcal{R}_1 b$ jestliže $a < b$; b) $a\mathcal{R}_2 b$ jestliže $a + 10 < 3b$; c) $a\mathcal{R}_3 b$ jestliže $2a \leq b$.
Pro každou z nich napište danou relaci jako množinu dvojic a nakreslete její graf. Pak pro každou z nich najděte inverzní relaci. Na závěr najděte $\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3$ a $\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2$.

Cvičení 4a.2 (rutinní, poučné)**:** Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ z množiny $A = \{1, 7, 8, 10, 20\}$ do množiny $B = \{a, d, s, t\}$ definovanou pro $a \in A$ a $b \in B$ takto: $(a, b) \in \mathcal{R}$ jestliže se písmeno b objeví ve slovním vyjádření (českém) čísla a. Napište danou relaci jako množinu dvojic, nakreslete její graf a určete její inverzní relaci.

Cvičení 4a.3 (rutinní)**:** Uvažujme množinu A studentů a množinu B učitelů určitého ústavu (vzdělávacího). Pro $a \in A$, $b \in B$ definujme relaci $\mathcal{R}$ předpisem $a\mathcal{R}b$ jestliže a měl učitele b na přednášku a relaci $\mathcal{S}$ předpisem $a\mathcal{S}b$ jestliže a měl učitele b na cvičení. Interpretujte relace $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$, $\mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$, $\overline{\mathcal{R}}$ a $\overline{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$.

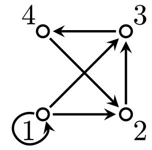
Cvičení 4a.4 (poučné)**:** Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na $\mathbb{N}$ danou pro $a, b \in \mathbb{N}$ předpisem $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když existuje $k \in \mathbb{N}_0$ takové, že $b = a^k$.
a) Najděte všechna $a \in \mathbb{N}$ taková, že $a\mathcal{R}64$.
b) Najděte všechna $b \in \mathbb{N}$ taková, že $3\mathcal{R}b$.
c) Uvažujme relaci $\mathcal{S}$ na $\mathbb{N}$ danou pro $a, b \in \mathbb{N}$ předpisem $a\mathcal{S}b$ právě tehdy, když existují $k, l \in \mathbb{N}_0$ taková, že $a^l = b^k$. Platí $\mathcal{R} = \mathcal{S}$?

Cvičení 4a.5 (poučné)**:** Nechť $\mathcal{R}$ je relace z množiny A do množiny B. Dokažte, že $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$.

Cvičení 4a.6 (rutinní)**:** Nechť $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ jsou relace z množiny A do množiny B. Dokažte, že pak
a) $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \cup \mathcal{S}^{-1}$; b) $(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{S}^{-1}$.
Viz věta 4a.7.

Cvičení 4a.7 (rutinní)**:** Uvažujme dvě relace na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$, relaci $\mathcal{R} = \big\{(1,1), (1,4), (2,1), (3,4)\big\}$ a relaci $\mathcal{S} = \big\{(1,3), (1,4), (3,2), (4,3)\big\}$.
Najděte relace $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ a $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.

Cvičení 4a.8 (rutinní)**:**
Uvažujte relaci $\mathcal{R}$ danou grafem napravo.
a) Zapište ji seznamem dvojic.
b) Najděte $\mathcal{R}^2$.



Cvičení 4a.9 (rutinní)**:** Nechť A je množina lidí. Definujme relaci $\mathcal{R}$ na A předpisem $a\mathcal{R}b$ jestliže b je rodič a a relaci $\mathcal{S}$ předpisem $a\mathcal{S}b$ jestliže je a je sourozencem b. Co je $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$?
Poznámka: Není zvykem považovat sebe za svého vlastního sourozence, tak to tady také nebudeme dělat.

Cvičení 4a.10 (poučné)**:** Uvažujme následující relace na $\mathbb{N}$: $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $3a \leq b$; a $a\mathcal{S}b$ právě tehdy, když $a + 1 < b$.
Najděte $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ a $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$. Jsou si tyto relace rovny?

Cvičení 4a.11 (rutiní, poučné, *dobré)**:** Uvažujme následující relace na $\mathbb{R}$: $\mathcal{R}_1$ je relace $>$, $\mathcal{R}_2$ je relace $\geq$, $\mathcal{R}_3$ je relace $=$, $\mathcal{R}_4$ je relace $\neq$, $\mathcal{R}_5$ je relace $<$, $\mathcal{R}_6$ je relace $|x| = |y|$.
Určete, čemu se rovnají složené relace

a) $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$;
b) $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$;
c) $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_3$;
d) $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_4$;
e) $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_5$;
f) $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_2$;
g)* $\mathcal{R}_4 \circ \mathcal{R}_4$;
h)* $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_6$;
i)* $\mathcal{R}_6 \circ \mathcal{R}_1$.

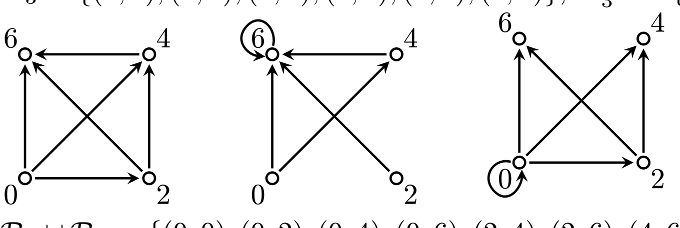
Cvičení 4a.12 (poučné, *dobré)**:**
A) Nechť $\mathcal{R}$ je relace z množiny A do množiny B, nechť $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ jsou relace z B do množiny C. Dokažte, že pak
a) $(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) \circ \mathcal{R} = (\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R})$;
b) $(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) \circ \mathcal{R} \subseteq (\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}) \cap (\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R})$;
c)* $(\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}) \setminus (\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R}) \subseteq (\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_2) \circ \mathcal{R}$.
B) Nechť $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ jsou relace z množiny A do množiny B, nechť $\mathcal{S}$ je relace z B do množiny C. Dokažte, že pak
a) $\mathcal{S} \circ (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) = (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}_1) \cup (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}_2)$;
b) $\mathcal{S} \circ (\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \subseteq (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}_1) \cap (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}_2)$;
c) $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}_1) \setminus (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}_2) \subseteq \mathcal{S} \circ (\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2)$.

Cvičení 4a.13 (poučné, *dobré)**:** Pro následující relace $\mathcal{R}$ si nejprve rozmyslete, jak vlastně fungují (najděte nějaké příklady dvojic z $\mathcal{R}$). Pak určete, jak vypadají $\mathcal{R}^2$ a $\mathcal{R}^3$, případně $\mathcal{R}^4$, poté uhodněte $\mathcal{R}^n$ a $\mathcal{R}^*$.
a) $\mathcal{R} = \{(k,k) \in \mathbb{Z}^2;\ k \in \mathbb{Z}\}$;
b) $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2;\ a \leq b\}$;
c) $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2;\ b = a + 2\}$;
d) $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2;\ a \text{ liché}, b \text{ sudé}\}$;
e)* $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2;\ |b - a| \leq 1\}$;
f)* $N \in \mathbb{N}$. $\mathcal{R}$ on $A = \{1, 2, \dots, N\}$, $\mathcal{R} = \{(a,a);\ a \in A\} \cup \{(a, a+1);\ a \in A, a \leq N - 1\}$;
g)* $\mathcal{R}$ na $\mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a,a);\ a \in \mathbb{N}\} \cup \{(a, a+1);\ a \in \mathbb{N}\}$.

Cvičení 4a.14: Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na množině $A = \{1,2,3\}$ danou předpisem $a\mathcal{R}b \iff b = 2a$ a relaci $\mathcal{S}$ na množině $B = \{a,b,c\}$ danou předpisem $\alpha\mathcal{S}\beta$ právě tehdy, když je α v abecedě před β.
Nechť $\mathcal{T}$ je součinová relace na $A \times B$. Napište ji jako výpis dvojic.

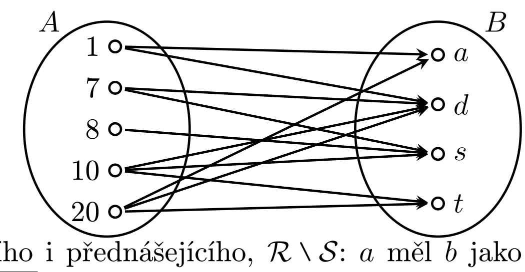
Řešení:

4a.1: $\mathcal{R}_1 = \{(0,2),(0,4),(0,6),(2,4),(2,6),(4,6)\}$, $\mathcal{R}_1^{-1} = \{(2,0),(4,0),(6,0),(4,2),(6,2),(6,4)\}$;
$\mathcal{R}_2 = \{(0,4),(0,6),(2,6),(4,6),(6,6)\}$, $\mathcal{R}_2^{-1} = \{(4,0),(6,0),(6,2),(6,4),(6,6)\}$;
$\mathcal{R}_3 = \{(0,0),(0,2),(0,4),(0,6),(2,4),(2,6)\}$, $\mathcal{R}_3^{-1} = \{(0,0),(2,0),(4,0),(6,0),(4,2),(6,2)\}$.



$\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3 = \{(0,0),(0,2),(0,4),(0,6),(2,4),(2,6),(4,6),(6,6)\}$, $\mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 = \{(0,4),(0,6),(2,6)\}$,
$\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2 = \{(0,2),(2,4)\}$.

4a.2:
$\mathcal{R} = \{(1,a),(1,d),(7,d),(7,s),(8,s),(10,d),(10,s),(10,t),$
$(20,a),(20,d),(20,t)\}$
$\mathcal{R}^{-1} = \{(a,1),(a,20),(d,1),(d,7),(d,10),(d,20),$
$(s,7),(s,8),(s,10),(t,10),(t,20)\}$



4a.3: $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$: a potkal b coby vyučujícího, $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$: a měl b jako cvičícího i přednášejícího, $\mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$: a měl b jako přednášejícího, ale ne cvičícího, $\overline{\mathcal{R}}$: a neměl b jako přednášejícího, $\overline{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$: a vůbec oficiálně neměl b, takže ho nemusí zdravit.

4a.4: a) Hledáme $a \in \mathbb{N}$ takové, že $a^k = 64$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Protože $64 = 2^6$, $64 = 4^3$, $64 = 8^2$ a $64 = 64^1$, řešení jsou $a = 2$, $a = 4$, $a = 8$ a $a = 64$.
b) Hledaná b splňují $b = 3^k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Proto množina všech b je $\{3^k;\ k \in \mathbb{N}\} = \{3, 9, 27, 81, \dots\}$.
c) Relace nejsou stejné. Například $4^3 = 8^2$, proto $4\mathcal{S}8$, ale nelze vyjádřit $8 = 4^k$ pro $k \in \mathbb{N}$, takže neplatí $4\mathcal{R}8$.

Platí nicméně inkluze $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$. Důkaz: $(a,b) \in \mathcal{R} \implies \exists k \in \mathbb{N}$: $b = a^k$. Pak $a^k = b^1$, zde $k \in \mathbb{N}$ a $l = 1 \in \mathbb{N}$, proto $(a,b) \in \mathcal{S}$.

4a.5: Nechť $a \in A, b \in B$. $(a,b) \in (\mathcal{R}^{-1})^{-1} \iff (b,a) \in \mathcal{R}^{-1} \iff (a,b) \in \mathcal{R}$.

4a.6: a) Nechť $a \in A, b \in B$. $(b,a) \in (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{-1} \iff (a,b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \iff [(a,b) \in \mathcal{R} \vee (a,b) \in \mathcal{S}]$
$\iff [(b,a) \in \mathcal{R}^{-1} \vee (b,a) \in \mathcal{S}^{-1}] \iff (b,a) \in \mathcal{R}^{-1} \cup \mathcal{S}^{-1}$.
b) Nechť $a \in A, b \in B$. $(b,a) \in (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^{-1} \iff (a,b) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S} \iff [(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (a,b) \in \mathcal{S}]$
$\iff [(b,a) \in \mathcal{R}^{-1} \wedge (b,a) \in \mathcal{S}^{-1}] \iff (b,a) \in \mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{S}^{-1}$.

4a.7: Najdeme řetězce $1\mathcal{R}1\mathcal{S}3$, $1\mathcal{R}1\mathcal{S}4$, $1\mathcal{R}4\mathcal{S}3$, $2\mathcal{R}1\mathcal{S}3$, $2\mathcal{R}1\mathcal{S}4$, $3\mathcal{R}4\mathcal{S}3$, proto
$\mathcal{S}\circ\mathcal{R} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3)\}$; najdeme řetězce $1\mathcal{S}3\mathcal{R}4$, $3\mathcal{S}2\mathcal{R}1$, $4\mathcal{S}3\mathcal{R}4$, proto $\mathcal{R}\circ\mathcal{S} = \{(1,4),(3,1),(4,4)\}$.

4a.8: $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(3,4),(4,2)\}$; $\mathcal{R}^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(3,2),(4,3)\}$.

4a.9: $(a,c) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ znamená $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{S}c$ pro nějakého člověka b. Takže c je strýc nebo teta a.

4a.10: $(a,c) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \iff a\mathcal{R}b\mathcal{S}c \iff [3a \le b \wedge b+1 < c]$. To dává podmínku $3a+1 < c$. Opačný směr: pro $3a+1 < c$ stačí zvolit $b = 3a$ a je $a\mathcal{R}b\mathcal{S}c$. Závěr: $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a,c);\ 3a+1 < c\}$.
$(a,c) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S} \iff a\mathcal{S}b\mathcal{R}c \iff [a+1 < b \wedge 3b \le c]$. To dává podmínku $3(a+1) < c$. Opačný směr: pro $3(a+1) < c$ stačí zvolit $b = a+1$ a je $a\mathcal{S}b\mathcal{R}c$. Závěr: $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a,c);\ 3a+3 < c\}$.
Protože $3a+1 < 3a+3$, máme implikaci $3a+3 < c \implies 3a+1 < c$, proto platí $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$. Rovny si nebudou, najdeme protipříklad: $(1,5) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, ale neplatí $(1,5) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.

4a.11: a) $(x,z) \in \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 \longrightarrow \exists y$: $x\mathcal{R}_1 y \wedge y\mathcal{R}_2 z \longrightarrow \exists y$: $x > y \wedge y \ge z \longrightarrow x > z$. Naopak: Když $x > z$, volíme nějaké y mezi x a z a máme $x > y > z$ neboli $x\mathcal{R}_1 y\mathcal{R}_2 z$, proto $(x,z) \in \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$. Závěr: $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1$.
b) $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1$, důkaz obdobný. c) $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1$, důkaz obdobný. d) $(x,z) \in \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_4 \iff \exists y$: $x \ne y \wedge y > z$, to lze pro libovolnou dvojici (x,z), proto $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_4 = \mathbb{R}^2$.
e) $\mathbb{R}^2$. f) $\mathcal{R}_2$. g) $\mathbb{R}^2$. h) $|x| = |y|$ dává $y = x$ nebo $y = -x$, proto $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_6 = \{(x,z);\ x > z \vee -x > z\}$, dokonce lze napsat $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_6 = \{(x,z);\ |x| > z\}$. i): $\{(x,z);\ x > z \vee x > -z\}$ či $\{(x,z);\ x > -|z|\}$.

4a.12: Nechť $a \in A, c \in C$.
A)a) 1) $(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) \circ \mathcal{R} \subseteq (\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R})$: $(a,c) \in (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) \circ \mathcal{R} \longrightarrow \exists b \in B$: $[(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2]$
$\longrightarrow \exists b \in B$: $[(a,b) \in \mathcal{R} \wedge ((b,c) \in \mathcal{S}_1 \vee (b,c) \in \mathcal{S}_2)]$
$\longrightarrow \exists b \in B$: $[((a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{S}_1) \vee ((a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{S}_2)]$
$\longrightarrow [\exists b \in B$: $((a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{S}_1)] \vee [\exists b \in B$: $((a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{S}_2)]$
$\longrightarrow [(a,c) \in \mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R} \vee (a,c) \in \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R}] \longrightarrow (a,c) \in (\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R})$;
2) $(\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R}) \subseteq (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) \circ \mathcal{R}$: $(a,c) \in (\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R}) \longrightarrow [(a,c) \in (\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}) \vee (a,c) \in (\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R})]$
$\longrightarrow [\exists b_1 \in B$: $((a,b_1) \in \mathcal{R} \wedge (b_1,c) \in \mathcal{S}_1)] \vee [\exists b_2 \in B$: $((a,b_2) \in \mathcal{R} \wedge (b_2,c) \in \mathcal{S}_2)]$
$\longrightarrow \exists b \in B$: $[(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2] \longrightarrow (a,c) \in (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) \circ \mathcal{R}$.
A)b) $(a,c) \in (\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) \circ \mathcal{R} \longrightarrow \exists b \in B$: $[(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2]$
$\longrightarrow \exists b \in B$: $[(a,b) \in \mathcal{R} \wedge ((b,c) \in \mathcal{S}_1 \wedge (b,c) \in \mathcal{S}_2)]$
$\longrightarrow \exists b \in B$: $[((a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{S}_1) \wedge ((a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{S}_2)] \longrightarrow$
$[\exists b \in B$: $((a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{S}_1)] \wedge [\exists b \in B$: $((a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{S}_2)] \longrightarrow [(a,c) \in \mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R} \wedge (a,c) \in \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R}]$
$\longrightarrow (a,c) \in (\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}) \cap (\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R})$;
Poznámka: Rovnost nastat nemusí, třeba pro $\mathcal{R} = \{(a,b_1),(a,b_2)\}$, $\mathcal{S}_1 = \{(b_1,c)\}$, $\mathcal{S}_1 = \{(b_2,c)\}$, kde $b_1 \ne b_2$, dostáváme $(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) \circ \mathcal{R} = \emptyset \circ \mathcal{R} = \emptyset$, ale $(\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}) \cap (\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R}) = \{(a,c)\}$.
A)c) $(\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}) \setminus (\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R}) \subseteq (\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_2) \circ \mathcal{R}$: $(a,c) \in (\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}) \setminus (\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R})$
$\longrightarrow [(a,c) \in (\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}) \wedge (a,c) \notin (\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R})]$
$\longrightarrow [\exists b_1 \in B$: $((a,b_1) \in \mathcal{R} \wedge (b_1,c) \in \mathcal{S}_1)] \wedge [\neg\exists b_2 \in B$: $((a,b_2) \in \mathcal{R} \wedge (b_2,c) \in \mathcal{S}_2)]$
$\longrightarrow \exists b_1 \in B$: $[(a,b_1) \in \mathcal{R} \wedge (b_1,c) \in \mathcal{S}_1 \wedge (b_1,c) \notin \mathcal{S}_2] \longrightarrow \exists b_1 \in B$: $[(a,b_1) \in \mathcal{R} \wedge (b_1,c) \in \mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_2]$
$\longrightarrow (a,c) \in (\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_2) \circ \mathcal{R}$.
Poznámka: Rovnost nastat nemusí, třeba pro $\mathcal{R} = \{(a,b_1),(a,b_2)\}$, $\mathcal{S}_1 = \{(b_1,c)\}$, $\mathcal{S}_1 = \{(b_2,c)\}$, kde $b_1 \ne b_2$, dostáváme $(\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_2) \circ \mathcal{R} = \{(a,c)\}$, ale $(\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}) \cap (\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R}) = \{(a,c)\} \setminus \{(a,c)\} = \emptyset$.
B) Důkazy jsou obdobné.

4a.13: a) Jediné dvojkroky jsou $k\mathcal{R}k\mathcal{R}k$, proto $\mathcal{R}^2 = \{(k,k)\} = \mathcal{R}$. Obdobně $\mathcal{R}^3 = \mathcal{R}$. Odhad: $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}$ a $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$.
b) Dvojkrok $a\mathcal{R}b\mathcal{R}c$ znamená $a \le b \le c$ neboli $a \le c$, platí i naopak, každé $a \le c$ lze udělal jako dvojkrok $a \le a \le c$. Proto $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$. Obdobně $\mathcal{R}^3 = \mathcal{R}^n = \mathcal{R}^* = \mathcal{R}$.
c) Platí $\mathcal{R} = \{(a,a+2)\}$. Dvojkrok navazuje, tedy musí být $(a,a+2)$ a $(a+2,a+4)$, proto $\mathcal{R}^2$ je množina dvojic $(a,a+4)$. Formálně: $\mathcal{R}^2 = \{(a,b) \in \mathbb{Z};\ b = a+4\}$. Obdobně $\mathcal{R}^3 = \{(a,b) \in \mathbb{Z};\ b = a+6\}$. Odhad: $\mathcal{R}^n = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2;\ b = a+2n\}$. Pak $\mathcal{R}^* = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2;\ \exists n \in \mathbb{N}:\ b = a+2n\}$. Dá se to také zapsat jako $\mathcal{R}^* = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2;\ b \equiv a \pmod 2 \wedge b > a\}$.
d) Nelze vyrobit navazující dvojice, proto $\mathcal{R}^2 = \emptyset$. Závěr: $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$, $\mathcal{R}^n = \emptyset$ pro $n \ge 2$. $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$.

e) Tři typy dvojic v $\mathcal{R}$: (a,a), $(a,a-1)$, $(a,a+1)$. Devět možností, jak navázat dvojkrok, do $\mathcal{R}^2$ vyjdou dvojice (a,a), $(a,a\pm 1)$ a $(a,a\pm 2)$. Proto $\mathcal{R}^2=\{(a,b)\in\mathbb{Z};\ |b-a|\leq 2\}$, obdobně $\mathcal{R}^3=\{(a,b)\in\mathbb{Z};\ |b-a|\leq 3\}$. Odhad: $\mathcal{R}^n=\{(a,b)\in\mathbb{Z};\ |b-a|\leq n\}$. Proto $\mathcal{R}^*=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
f) $\mathcal{R}^2=\mathcal{R}\circ\mathcal{R}$: Dvojkroky $a\mathcal{R}a\mathcal{R}a$, $a\mathcal{R}a\mathcal{R}a+1$, $a\mathcal{R}a+1\mathcal{R}a+1$, $a\mathcal{R}a+1\mathcal{R}a+2$, takže (a,a), $(a,a+1)$, $(a,a+2)$. Proto $\mathcal{R}^2=\mathcal{R}\cup\{(a,a+2);\ a\leq N-2\}$. Lze napsat
$\mathcal{R}^2=\{(a,a+i)\in A^2;\ i=0,1,2\}=\{(a,b)\in A^2;\ a\leq b\leq a+2\}$.
$\mathcal{R}^3=\mathcal{R}\circ\mathcal{R}^2$: Dvojkroky, $\mathcal{R}^2$ se zachová, přibude $(a,a+3)$ pro $1\leq a$ a $a+3\leq N$.
$\mathcal{R}^3=\{(a,a+i)\in A^2;\ i=0,1,2,3\}=\{(a,b)\in A^2;\ a\leq b\leq a+3\}$.
Obecně $\mathcal{R}^n=\{(a,b)\in A^2;\ a\leq b\leq a+n\}$.
Ovšem $a,b\leq N$, takže pro $n\geq N$ už to omezení nehraje roli, všechny dosažitelné dvojice jsou tam. Proto $\mathcal{R}^n=\mathcal{R}^{N-1}$ pro $n\geq n-1$, je to relace na A daná $\leq$.
g) Podobně jako v f) odvodíme $\mathcal{R}^n=\{(a,b)\in N^2;\ a\leq b\leq a+n\}$. Takže v každé mocnině přibudou nové dvojice, pak $\mathcal{R}^*=\bigcup\mathcal{R}^n$ je relace daná $\leq$ na $\mathbb{N}$.
4a.14: $\mathcal{T}=\{((1,a),(2,b)),((1,a),(2,c)),((1,b),(2,c))\}$.

4b. Základní vlastnosti binárních relací

Teď se omezíme pouze na relace na množině A, tedy na případ $B=A$. Takové relace se používají často a podle toho, k čemu je používáme, oceníme různé druhy chování. Užitečným vlastnostem dali lidé jména a zde probereme čtyři, které jsou nejpopulárnější.

!

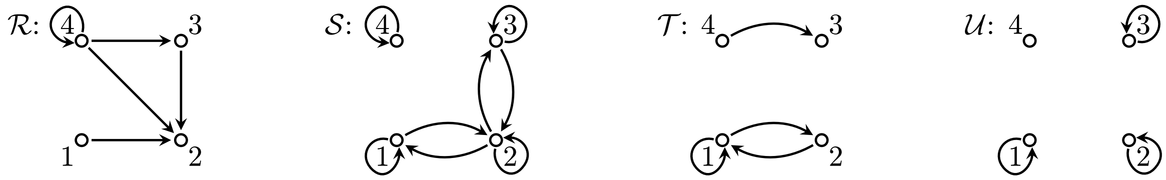
Definice.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A.
Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **reflexivní**, jestliže pro všechna $a\in A$ platí $(a,a)\in\mathcal{R}$.
Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **symetrická**, jestliže pro všechna $a,b\in A$ platí, že
když $(a,b)\in\mathcal{R}$, pak také $(b,a)\in\mathcal{R}$.
Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **antisymetrická**, jestliže pro všechna $a,b\in A$ platí, že
když $(a,b)\in\mathcal{R}$ a $(b,a)\in\mathcal{R}$, tak také $a=b$.
Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **tranzitivní**, jestliže pro všechna $a,b,c\in A$ platí, že
když $(a,b)\in\mathcal{R}$ a $(b,a)\in\mathcal{R}$, tak také $a\mathcal{R}c$.

Consider a relation $\mathcal{R}$ on a set A.
It is called **reflexive** if $(a,a)\in\mathcal{R}$ for all $a\in A$.
It is called **symmetric** if for all $a,b\in A$ we have $(a,b)\in\mathcal{R}\implies(b,a)\in\mathcal{R}$.
It is called **antisymmetric** if for all $a,b\in A$ we have $[(a,b)\in\mathcal{R}\wedge(b,a)\in\mathcal{R}]\implies a=b$.
It is called **transitive** if for all $a,b,c\in A$ we have $[(a,b)\in\mathcal{R}\wedge(b,c)\in\mathcal{R}]\implies(a,c)\in\mathcal{R}$.

Podmínky v alternativním značení:
- reflexivita: $\forall a\in A$: $a\mathcal{R}a$.
- symetrie: $\forall a,b\in A$: $a\mathcal{R}b\implies b\mathcal{R}a$.
- antisymetrie: $\forall a,b\in A$: $[a\mathcal{R}b\wedge b\mathcal{R}a]\implies a=b$.
- tranzitivita: $\forall a,b,c\in A$: $[a\mathcal{R}b\wedge b\mathcal{R}c]\implies a\mathcal{R}c$.

Poznamenejme, že někteří čeští autoři používají namísto „antisymetrie“ termínu „slabá antisymetrie“, pro silnou viz část 4d.
Významu těchto definic nejlépe porozumíme, když se podíváme na několik relací na konečných množinách, které znázorníme grafy. U každé vlastnosti si rozmyslíme, co vyžaduje a co zakazuje, což jsou dva různé pohledy na totéž. U některých je také užitečné si uvědomit, co nevyžaduje. Abychom ušetřili psaní, zavedeme pro vlastnosti značky (iniciály).

! **Příklad 4b.a:** Uvažujme následující čtyři relace na množině $A=\{1,2,3,4\}$:
- $\mathcal{R}=\big\{(1,2),(3,2),(4,2),(4,3),(4,4)\big\}$;
- $\mathcal{S}=\big\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\big\}$;
- $\mathcal{T}=\big\{(1,1),(1,2),(2,1),(4,3)\big\}$;
- $\mathcal{U}=\big\{(1,1),(2,2),(3,3)\big\}$.



Reflexivita je jednoznačná:
• **R** vyžaduje: Každý prvek ze základní množiny A musí být v relaci sám se sebou.
• **R** vyžaduje: U každého vrcholu v grafu musí být smyčka.
• **R** zakazuje: Nějaký vrchol bez smyčky.
Když se ptáme, zda je daná relace reflexivní, tak se optimisté dívají, zda splňuje to, co reflexivita vyžaduje. V případě grafického znázornění projdou očima celý graf a kontrolují přítomnost smyček.
Pesimisté se snaží ukázat, že se reflexivita pokazí, takže se dívají na graf jako celek, zda někde neuvidí vrchol bez smyčky. Pokud jej najdou, mají protipříklad na reflexivitu neboli důkaz její neplatnosti. Jinak usoudí, že relace asi bude reflexivní, a ověří to.
Oba přístupy mají své pro a proti a opakovaně je uvidíme v akci. Zde je odpověď jednoduchá: relace $\mathcal{S}$ je reflexivní, ostatní nejsou.
Rovnou upozorníme, že reflexivita je vlastnost celé relace. Studenti mívají tendenci říkat o prvcích, které jsou v relaci samy se sebou, že jsou reflexivní. Je samozřejmě možné jim dát jméno, ale není dobré použít slovo reflexivní, protože to pak mnohdy vede ke zmatkům a nedorozuměním, například k výrokům jako „Relace $\mathcal{U}$ je reflexivní pro $a = 1, 2, 3$.“ Což nedává smysl, reflexivita je vlastnost relace jako celku, buď pro ni platí, nebo ne. Obdobná poznámka platí také pro další tři vlastnosti.

Symetrie (a další dvě vlastnosti) se od reflexivity podstatně liší. Reflexivita měla požadavek nekompromisní: Všude smyčky. Symmetrie požadavek má, ale jen někdy. Sice je v definici prokaždítko, ale podmínka samotná má podobu implikace, tudíž reálně chce něco jen občas. Procházíme všechny možné dvojice prvků a pokud dvojice spolu nemá vztah (tedy dvojice (a, b) není v relaci), tak je díky nesplněnému předpokladu implikace jako celek automaticky platná a symetrie je tedy spokojená, aniž by něco vyžadovala. Symetrie něco chce jen od takových dvojic, které jsou už ve vztahu.
• **S** nevyžaduje: Všude musí být obousměrné vztahy/šipky.
• **S** vyžaduje: Všechny dvojice prvků, které jsou spolu v relaci, musí být spolu v relaci také v opačném pořadí.
• **S** vyžaduje: Kdekoliv je v grafu šipka, musí vést i opačná.
Optimisté tedy procházejí graf a kontrolují, jak je to se šipkami. Brzy si uvědomí, že smyčky jsou přirozeně obousměrné, protože jakmile je dvojice (a, a) v relaci, tak je tam i dvojice (a, a), kde jsme mezi sebou ty a prohodili. Je tedy zbytečné je kontrolovat. Dostáváme tak modifikovaný praktický pohled:
• **S** vyžaduje: Kdekoliv je v grafu šipka, musí vést i opačná, přičemž ignorujeme smyčky.
Je důležité si uvědomit, že symetrie díky podmínečnosti nevyžaduje, aby nějaké šipky vůbec byly. Prázdná relace je symetrická.
Pesimisté se pokoušejí symetrii zkazit a selský rozum jim napoví, že by to měla zvládnout přítomnost jednosměrné šipky, což je ovšem opět marné hledat mezi smyčkami. Ty tedy v symetrii nehrají roli.
Kromě selského rozumu je možné při pokusu o pokažení symetrie také formálně negovat podmínku z definice a tím zjistit, co hledáme (viz Přehled základ logiky):

$$\begin{aligned}\neg[\forall a, b \in A\colon (a, b) \in \mathcal{R} \implies (b, a) \in \mathcal{R}] &\iff \exists a, b \in A\colon \neg[(a, b) \in \mathcal{R} \implies (b, a) \in \mathcal{R}]\\ &\iff \exists a, b \in A\colon (a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \notin \mathcal{R}.\end{aligned}$$

Máme tedy následující:
• **S** zakazuje: Jednosměrné šipky.
Pesimistickým pohledem tedy zjistíme, že relace $\mathcal{R}$ a $\mathcal{T}$ nejsou symetrické. Pro relaci $\mathcal{R}$ je protipříkladem například dvojice $a = 1$, $b = 2$, která splňuje předpoklad $1\mathcal{R}2$, ale nesplňuje závěr $2\mathcal{R}1$ podmínky z definice symetrie.
U relací $\mathcal{S}$ a $\mathcal{U}$ ověříme, že jsou symetrické. Například u $\mathcal{S}$ pro dvojici $1, 2$ a dvojici $1, 4$ platí ona implikace, ale pokaždé jiným způsobem.
Oblíbenou chybou začátečníka je zmutovat podmínku symetrie do tvaru „$a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a$“. Víme, že je to špatně, ale je užitečné si uvědomit, co se záměnou logické spojky změní. Vznikne požadavek, který už není podmíněný, ale je absolutistický podobně jako u reflexivity: Všechny prvky musí být navzájem propojeny v obou směrech. To dokáže splnit jen jediná relace, $A \times A$ odpovídající úplnému grafu.

Antisymetrie má také formu implikace, tedy jde o podmíněný požadavek. Tentokráte jde o definici technickou; její podoba byla zvolena tak, aby se s ní dobře pracovalo v důkazech. Dá ale trochu práce ji pochopit. Vyžaduje, aby jediné obousměrné vztahy byly ty smyčkové. Z toho se již správný význam dá vidět, ale rovnou nám jej řekne obměna podmínky z definice:

• $\mathcal{R}$ je antisymetrická, pokud pro $a, b \in A$ platí: Jestliže $a \neq b$, pak nesmí nastat $(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \in \mathcal{R}$.
Vidíme dvě podstatné věci: Antisymetrie nekontroluje smyčky, dívá se jen na dvojice různých prvků a mezi nimi vyžaduje, aby nebyl obousměrný vztah. Použijeme kladnou formulaci:
• **A** vyžaduje: Mezi libovolnými dvěma různými prvky může být jen vztah žádný nebo jednosměrný.
• **A** vyžaduje: V grafu se mohou (kromě smyček) vyskytovat jen jednosměrné šipky.
Formální logickou negací podmínky nebo selským rozumem také vidíme toto:
• **A** zakazuje: Obousměrný vztah mezi dvěma různými prvky A neboli obousměrné šipky mezi různými vrcholy.
Pesimista se dívá na grafy a hledá obousměrné nesmyčkové šipky, u relací $\mathcal{S}$ a $\mathcal{T}$ je snadno nachází. Tím zároveň získává protipříklady neboli důkazy neplatnosti vlastností. Například u relace $\mathcal{T}$ splní předpoklad testu dvojice $a = 1$, $b = 2$, ale závěr pro ni neplatí.
Vidíme, že antisymetrické jsou relace $\mathcal{R}$ a $\mathcal{U}$. U relace $\mathcal{R}$ splní předpoklady podmínky z definice jen dvojice $a = 4$, $b = 4$, pro kterou pak platí i závěr.
I zde přidáme užitečnou poznámku. Pokud chceme zakázat obousměrné šipky, tak se nabízí srozumitelná podmínka $(a,b) \in \mathcal{R} \implies (b,a) \notin \mathcal{R}$. Ta je ale mnohem silnější, protože navíc zakazuje smyčky. Je to tedy jiná vlastnost, dokonce má své jméno (viz asymetrie v části 4d), ale v praxi se používá výrazně méně, protože obvykle naopak smyčky preferujeme. Tento pokus ale lze modifikovat, aby už vznikl alternativní popis antisymetrie.
• $\mathcal{R}$ je antisymetrická, pokud $\forall a, b \in A$: Jestliže $a \neq b$ a $(a,b) \in \mathcal{R}$, pak $(b,a) \notin \mathcal{R}$.
Tato podmínka je asi intuitivně výmluvnější než ta z definice, ale méně praktická při důkazech platnosti antisymetrie.
Přidáme ještě druhou významnou poznámku. Po spočítání většího množství příkladů je snadné nabýt dojmu, že antisymetrie a symetrie jsou opaky, které se doplňují, typická zkoumaná relace je buď symetrická nebo antisymetrická. Tento dojem je ještě posílen názvy těchto vlastností, nicméně to není pravda. Relace $\mathcal{U}$ je zároveň symetrická i antisymetrická, takže se tyto vlastnosti nemusejí vylučovat. Mimochodem, souběh symetrie a antisymetrie je vzácný, viz cvičení 4b.15
Relace $\mathcal{T}$ pak ukazuje, že je možné, aby relace nebyla ani symetrická, ani antisymetrická. Tento případ je naopak běžný. Intuice napovídá, že relace vytvořená náhodným výběrem dvojic typicky bude mít něakou jednosměrnou šipku a nějakou obousměrnou, čímž pokazí symetrii i antisymetrii.
Odkud se tedy bere ten mylný dojem, že se symetrie a antisymetrie vylučují a doplňují? Je to tím, že relace, se kterými pracujeme, nejsou náhodné, ale vždy vycházejí z nějaké myšlenky, a lidé mají tendenci přemýšlet o „spořádaných“ věcech (ostatně smyslem vědy je hledat pořádek v chaosu světa).
Abychom to uzavřeli, není možné obecně argumentovat třeba tak, že relace není antisymetrická, protože už je symetrická. Vždy zkoumáme obě vlastnosti individuálně.

Tranzitivita také znamená, že ověřujeme platnost implikace, zde nás zajímají jen situace, kdy jsou tři prvky svázány navazujícími vztahy $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}c$. Pak potřebujeme, aby existovala také zkratka $a\mathcal{R}c$. Tato vlastnost je tedy intuitivně zjevná:
• **T** vyžaduje: Každý dvojkrok musí mít v relaci zkratku.
• **T** zakazuje: Dvojkrok bez zkratky.
Paradoxně se ovšem tato snadná vlastnost z grafu určuje nejhůře, protože není vidět na první pohled; je třeba propátrávat celý graf pro dvojkroky. Začátečníci také mohou některé dvojkroky přehlédnout.
Jaké dvojkroky vidíme v grafu relace $\mathcal{R}$? Jsou tam čtyři. Dvojkrok $4\mathcal{R}3\mathcal{R}2$ má zkratku $4\mathcal{R}2$, zatím dobré. Pak je tam dvojkrok $4\mathcal{R}4\mathcal{R}3$ s existující zkratkou $4\mathcal{R}3$ a obdobně $4\mathcal{R}4\mathcal{R}2$ má $4\mathcal{R}2$. Posledním dvojkrokem je $4\mathcal{R}4\mathcal{R}4$, který má zkratku $4\mathcal{R}4$. Relace $\mathcal{R}$ je tedy tranzitivní.
Není těžké dokázat, že dvojkroky se smyčkou nemohou tranzitivitu nikdy pokazit, takže je zbytečné je testovat. Viz cvičení 4b.13.
V relaci $\mathcal{S}$ snadno najdeme dvojkrok $1\mathcal{S}2\mathcal{S}3$, ke kterému není zkratka, protože neplatí $1\mathcal{S}3$. Tato relace tedy není tranzitivní.
V relaci $\mathcal{T}$ jsou kromě dojkroků se smyčkou, které tranzitivitu neohrozí, také dva dvojkroky, které je snadné přehlédnout: dvojkrok $1\mathcal{T}2\mathcal{T}1$ má zkratku $1\mathcal{T}1$, zatím dobré. Ale dvojkrok $2\mathcal{T}1\mathcal{T}2$ zkratku nemá (neplatí $2\mathcal{T}2$), takže relace $\mathcal{T}$ není tranzitivní. Mimochodem, u relace $\mathcal{S}$ byly čtyři dvojkroky typu „tam a zpět“ a díky smyčkám tranzitivitu neohrozily.
Relace $\mathcal{U}$ je tranzitivní, protože jediné možné dvojkroky vznikají ze smyček a ty tranzitivitu nemohou pokazit.
△

Teď už bychom měli intuitivně rozumět základním vlastnostem relací a (s výjimkou tranzitivity) je vidět v grafech na první pohled. Typicky ovšem máme relace na nekonečných množinách, kde graf k dispozici nemáme a musíme pravdivost podmínek zjišťovat analyticky. Což nás přivádí k úmluvě:

> **Úmluva.**
> Je-li dána relace, tak **vyšetřením jejích vlastností** rozumíme najít odpovědi na otázky, zda je daná relace reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní, a odpovědi dokázat.

Nejprve vyšetříme nejznámější relace.

! **Příklad 4b.b:** Vyšetříme vlastnosti pro relaci $\mathcal{R}$ danou $\leq$ na množině $\mathbb{R}$.
Formálně: $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq b\}$. Méně formálně:
• Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na $\mathbb{R}$ definovanou předpisem $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $a \leq b$.
Budeme zde používat množinové značení.
R: Otázka: Platí $(a,a) \in \mathcal{R}$ pro všechna $a \in \mathbb{R}$? Přeloženo pro naši relaci: Platí $a \leq a$ pro všechna $a \in \mathbb{R}$? Ano.
Závěr: Relace $\mathcal{R}$ je reflexivní.
Je třeba to dokázat, přičemž důkaz musí vést od známého k tomu, co chceme. Reflexivita není dána implikací, tudíž si východisko důkazu musíme vymyslet sami. Chceme něco, co platí a pomůže nám dostat se k cíli.
Dk: Pro $\underline{\text{všechna } a \in \mathbb{R}}$ platí $a \leq a$, tedy i $\underline{(a,a) \in \mathcal{R}}$.
Poznámka: Všimneme si, že podtržené části kopírují definici reflexivity. Pro důkazy vlastností platí všechna pravidla, která jsme se naučili pro důkazy jiných tvrzení.
S: Otázka: Platí vždy implikace $(a,b) \in \mathcal{R} \implies (b,a) \in \mathcal{R}$? Přeloženo pro danou $\mathcal{R}$: Platí vždy $a \leq b \implies b \leq a$? Nikoliv.
Závěr: Relace $\mathcal{R}$ není symetrická.
Dk: p-p: $a = 13$, $b = 23$ splňuje $(a,b) \in \mathcal{R}$ ale nesplňuje $(b,a) \in \mathcal{R}$.
Poznámka: Vyvracení protipříkladem mohlo vypadat třeba i takto:
p-p: Platí $13 \leq 23$, ale neplatí $23 \leq 13$.
Zkušenějšímu čtenáři by to mělo stačit. Je otázkou, jak moc vysvětlovat, jednoznačná odpověď není.
A: Otázka: Platí vždy implikace $[(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \in \mathcal{R}] \implies a = b$? Přeložíme: Platí vždy $[a \leq b \wedge b \leq a] \implies a = b$? Ano, je to jedna ze základních vlastností nerovnosti. Máme vlastně i důkaz, jen to pěkně zapíšeme.
Závěr: Relace $\mathcal{R}$ je antisymetrická.
Dk: Nechť $\underline{a,b \in \mathbb{R}}$ jsou takové, že $\underline{(a,b) \in \mathcal{R} \text{ a } (b,a) \in \mathcal{R}}$. Pak $a \leq b$ a $b \leq a$, tedy $\underline{a = b}$.
Poznámka: Je dobré důkaz začít a skončit s výrazem, který je v obecné definici vlastnosti (viz ono $(a,b) \in \mathcal{R}$, $(b,a) \in \mathcal{R}$), aby si to čtenář spojil. Mohli bychom také rovnou začít těmi nerovnostmi a bylo by to logicky správně, ale je to vhodné spíš pro neformální příležitosti nebo pokročilejší čtenáře.
T: Otázka: Platí vždy implikace $[(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{R}] \implies (a,c) \in \mathcal{R}$?
Přeložíme: Platí vždy $[a \leq b \wedge b \leq c] \implies a \leq c$? Ano, je to jedna ze základních vlastností nerovnosti.
Závěr: Relace $\mathcal{R}$ je tranzitivní.
Dk: Nechť $\underline{a,b,c \in \mathbb{R}}$ jsou takové, že $\underline{(a,b) \in \mathcal{R} \text{ a } (b,c) \in \mathcal{R}}$. Pak $a \leq b$ a $b \leq c$, tedy $a \leq c$. Proto $\underline{(a,c) \in \mathcal{R}}$.

Shrnuto: Relace $\leq$ je na $\mathbb{R}$ reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Jako obvykle je možné, zejména při méně formálních příležitostech, důkazy zestručnit, je také možné použít alterntivní značení. Důkaz tranzitivity bychom mohli psát třeba takto:
$\underline{\forall a,b,c \in A}$: $\underline{a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c} \longrightarrow [a \leq b \wedge b \leq c] \longrightarrow a \leq c \longrightarrow \underline{a\mathcal{R}c}$.
Opět poukážeme na to, že když se ve všech důkazech platnosti podíváme jen na podtržené části, dostaneme definiční podmínku dokazované vlastnosti. To ukazuje, že důkaz má správnou strukturu.
△

! **Poznámka:** Je zajímavé si všimnout, že při důkazech reflexivity, antisymetrie a tranzitivity jsme nikde nepoužili fakt, že čísla vybíráme zrovna z $\mathbb{R}$. Stejné důkazy by platily na libovolné podmnožině reálných čísel. To ale není pravda o důkazu neplatnosti symetrie. Kdybychom relaci $\leq$ uvažovali na množině $A = \{13\}$, tak už bude i symetrická! Proto je důležité vždy předvádět konkrétní protipříklady. Tvrzení, že si nerovnosti $\leq$ a $\geq$ odporují, rozhodně nepostačí.
△

! **Příklad 4b.c:** Tentokráte ukážeme, jak se dá s již známou relací pracovat bez zavádění názvu $\mathcal{R}$.
Uvažujme relaci $a < b$ na $\mathbb{R}$. Vyšetříme pro ni vlastnosti.
R: Otázka: Platí vždy $a < a$? Určitě ne, protipříklad lze zvolit náhodně.
Závěr: Relace $<$ není na $\mathbb{R}$ reflexivní.
Dk: p-p: neplatí $\pi < \pi$.
S: Otázka: Platí pro $a,b \in \mathbb{R}$ splňující $a < b$ také $b < a$? Odpověď je zjevná.
Závěr: Relace $<$ není na $\mathbb{R}$ symetrická.

Dk: p-p: $13 < 23$, ale neplatí $23 < 13$.
A: Otázka: Pokud $a, b \in \mathbb{R}$ splňují $\underline{a < b \text{ a } b < a}$, platí pak $a = b$? To nevypadá nadějně, algebra nám určitě nedovolí z těch dvou nerovností odvodit $a = b$. Pesimisté začnou hledat protipříklad, ale brzy narazí na problém. Protipříklad totiž musí splnit předpoklad, ale to se nedaří. Což má ovšem klíčový dopad na celou implikaci.
Závěr: Relace $<$ je na $\mathbb{R}$ antisymetrická.
Dk: Dány $\underline{a, b \in \mathbb{R}}$. Předpoklad: $a < b \wedge b < a$ je vždy nepravdivý, proto platí implikace $\underline{[a < b \wedge b < a] \implies a = b}$.
T: Otázka: Platí pro $a.b, c \in \mathbb{R}$ splňující $a < b < c$ také $a < c$? Určitě.
Závěr: Relace $<$ je na $\mathbb{R}$ tranzitivní.
Dány $\underline{a, b, c \in \mathbb{R}}$. Předpoklad: $\underline{a < b \text{ a } b < c}$. Pak $\underline{a < c}$.

Shrnuto: Relace $<$ je na $\mathbb{R}$ antisymetrická a tranzitivní.
$\triangle$

Poznámka: Všimněte si, jak jsme v tvrzení o vlastnostech vždy napsali, na které množině jsme ji vyšetřovali. Protože jsme pro $<$ na $\mathbb{R}$ nezavedli značku $\mathcal{R}$, tak ze samotného $<$ nepoznáme, na které množině ji uvažujeme, a musíme to psát. Jak už jsme viděli, to může ovlivnit vlastnosti relace. Například i tato relace by byla symetrická třeba na množině $A = \{-\pi\}$.
Platnost implikace díky nesplnitelnému předpokladu je něco, co je třeba vést stále v patrnosti, nejčastěji to zaúřaduje zrovna u antisymetrie. Dobrou kontrolou je náš zvyk uvádět důsledně protipříklady, a to i pro „jasně neplatná“ tvrzení.
Mimo jiné z toho vyplývá, že prázdná relace $\mathcal{R} = \emptyset$ bude na libovolné množině symetrická, antisymetrická a tranzitivní.
$\triangle$

! **Příklad 4b.d:** Vyšetříme vlastnosti pro relaci $\mathcal{R}$ na $\mathbb{R}$ danou předpisem $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $a = b$.
Zadání naznačuje, že máme používat zápis $a\mathcal{R}b$, tak to uděláme.
R: Otázka: Platí $a = a$ pro všechna $a \in \mathbb{R}$?
Závěr: $\mathcal{R}$ je reflexivní.
Dk: Nechť $\underline{a \in \mathbb{R} \text{ je libovolné}}$. Pak $a = a$, proto $\underline{a\mathcal{R}a}$.
S: Otázka: Platí pro $a, b \in \mathbb{R}$ implikace $a = b \implies b = a$?
Závěr: $\mathcal{R}$ je symetrická.
Dk: Dány $\underline{a, b \in \mathbb{R}}$ splňující $\underline{a\mathcal{R}b}$ neboli $a = b$. Pak $b = a$ neboli $\underline{b\mathcal{R}a}$.
A: Otázka: Platí vždy implikace $[a = b \wedge b = a] \implies a = b$?
Závěr: $\mathcal{R}$ je antisymetrická.
Dk: Dány $\underline{a, b \in \mathbb{R}}$ splňující $\underline{a\mathcal{R}b \text{ a } b\mathcal{R}a}$. To znamená $a = b$ a $b = a$, prostě $\underline{a = b}$.
T: Otázka: Platí vždy implikace $[a = b \wedge b = c] \implies a = c$?
Závěr: $\mathcal{R}$ je tranzitivní.
Dk: Nechť $\underline{a, b, c \in \mathbb{R}}$ splňují $\underline{a\mathcal{R}b \text{ a } b\mathcal{R}c}$ neboli $a = b$ a $b = c$. Pak $a = c$ a tedy $\underline{a\mathcal{R}c}$.
Shrnuto: Relace $=$ je na $\mathbb{R}$ reflexivní, symetrická, antisymetrická a tranzitivní.
Vidíme, že rovnost splňuje všechny čtyři vlastnosti. Není divu, že se nám s ní dobře pracuje.
$\triangle$

Důkazy v tomto příkladě nikde nepracovaly s vlastnostmi reálných čísel. Spoléhaly na to, co platí pro pojem shody objektů, ať už jsou jakékoliv, třeba rovnost množin, rovnost lidí, rovnost algoritmů, cokoliv chceme. Rovnost objektů je univerzální pojem a vzniká tak obecně relace splňující všechny čtyři základní vlastnosti. Má speciální jméno.

Definice.
Nechť A je množina. Definujeme její **diagonální relaci** (**diagonal relation**) jako relaci
$$\Delta(A) = \{(a, a) \in A \times A;\ a \in A\}.$$

Je to tedy relace ze všech „smyček“ a lze ji také vyjádřit předpisem $(x, y) \in \Delta(A) \iff x = y$. Je velice specifická, například je to v zásadě jediný typ relace, který je zároveň symetrický i antisymetrický, viz cvičení 4b.15, zajímavě se také chová při skládání relací (cvičení 4b.19). Ještě ji v této kapitole několikrát potkáme.

Příklad 4b.e: Fakt 1a.1 a věta 1a.21 říkají, že dělitelnost je reflexivní a tranzitivní na $\mathbb{Z}$ a také na $\mathbb{N}$ nebo $\mathbb{N}_0$. Na těchto množinách zjevně není symetrická, pro jistotu najdeme protipříklad: $2\,|\,6$ ale neplatí $6\,|\,2$.
Zajímavé je to s antisymetrií. Víme, že z předpokladu $a\,|\,b$ a $b\,|\,a$ dokážeme odvodit $|a| = |b|$, takže na $\mathbb{Z}$ dělitelnost není antisymetrická (protipříklad $a = 13$, $b = -13$), ale na $\mathbb{N}$ či $\mathbb{N}_0$ už ano (věta 1a.25).
I zde je možné symetrii splnit vhodnou volbou množiny A. Dělitelnost je symetrická například na množinách $A = \{1\}$, $A = \{-1, 1\}$ nebo třeba na množině P všech prvočísel. Ta se totiž navzájem nedělí, takže předpoklad podmínky symetrie je vždy nepravdivý. Tyto hrátky jsou dobrým tréninkem přemýšlení, ale v praxi se s takovými exotickými případy spíš nepotkáme.

Věta 2a.5 ukazuje, že kongruence modulo $n \in \mathbb{N}$ je jako relace na $\mathbb{Z}$ reflexivní, symetrická a tranzitivní. Není ale antisymetrická, pro $n \in \mathbb{N}$ máme jako protipříklad třeba $0 \equiv n \pmod{n}$, $n \equiv 0 \pmod{n}$, ale $0 \neq n$.
△

Zbývá nám ještě jeden důležitý vztah.

Příklad 4b.f: V příkladě 4a.f jsme se na vztah býti podmnožinou podívali jako na relaci. Základní vlastnosti inkluze teď lze vyjádřit novým jazykem: Je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, ať už ji uvažujeme na jakékoliv množině A. Formálně řečeno, jakákoliv relace definovaná podmínkou $M \subseteq N$ bude mít tyto tři vlastnosti.
Je relace inkluze symetrická? Ptáme se, zda pro všechny porovnávané množiny platí

$$M \subseteq N \implies N \subseteq M.$$

Odpověď se zdá zjevná: Toto není pravda. Ovšem byli jsme již varováni, že musíme důsledně vyracet platnost pomocí konkrétních protipříkladů. Nabízí se třeba $M = \{13\}$ a $N = \{13, 23\}$. To ale vyvrací inkluzi pouze v případech, kdy ji používáme na množinách zahrnujících i tyto dvě. Jak ji vyvrátíme, když inkluzi používáme na jiných množinách?
Což nás přivádí k otázce, na jaké množině A množin inkluzi uvažujeme. Začneme obvyklou situací: Máme universum neboli množinu U objektů, ze kterých vytváříme množiny, a $A = P(U)$ neboli A je množina všech podmnožin U. V této A teď hledáme protipříklad na symetrii. Určitě tam najdeme množinu $M = \emptyset$, protože je to jedna z podmnožin libovolného U. K vyvrácení symetrie stačí najít libovolnou neprázdnou podmnožinu U, tedy stačí, aby U obsahovalo nějaký prvek u. Pak zvolíme $N = \{u\}$ a máme protipříklad na symetrii.
Závěr: Relace $\subseteq$ není symetrická na $P(U)$ pro neprázdné U.
Vzhledem k tomu, že $U = \emptyset$ se nepoužívá, tak se dá říci, že symetrie u inkluze obvykle neplatí.
Zajímavější to začne být v situaci, kdy množinu A množin porovnávaných inkluzí tvoříme jinak. Je řada možností, jak zajistit, aby se tam již nenašel protipříklad na symetrii. Nejjednodušší je vzít jako A jednoprvkovou množinu (množin), třeba $A = \big\{\{\diamondsuit, \heartsuit\}\big\}$. Je užitečné poznamenat, že finta není v malé velikosti A, ale v nedostatku porovnatelných množin. Snadno vyrobíme i výrazně větší (třeba nekonečné) množiny A s touto vlastností. Například můžeme A vytvořit z navzájem disjunktních množin. Pak už bude inkluze na takové A symetrická.
Jednoduchý příklad: $A = \big\{\{n\};\ n \in \mathbb{N}\big\}$. Pokud vezmeme $M, N \in A$, pak máme $M = \{m\}$ a $N = \{n\}$ pro nějaké $m, n \in \mathbb{N}$. Jestliže $m = n$, tak platí $M = N$ a proto i inkluze v obou směrech, to symetrii nevyvrátí. Jestliže $m \neq n$, tak neplatí ani $M \subseteq N$, ani $N \subseteq M$ a opět jsme symetrii nevyvrátili. Takže na této množině A je inkluze symetrická.
Shrnuto: Neplatí obecně, že inkluze na libovolné množině je symetrická. Nelze ani obecně říct, že vždy symetrická není, záleží na volbě A. Troufnu si říct, že pro obvyklé (praktické) volby A inkluze symetrická není.
△

Tento příklad nám znovu připomněl, že se symetrie a antisymetrie nemusí vylučovat, což nás nutí vyšetřovat obě. Vede to k obecné otázce, jestli jsou naše čtyři vlastnosti nezávislé, nebo mezi nimi existuje nějaký vztah.
Pro čtyři vlastnosti existuje principiálně celkem $2^4 = 16$ možností, jak je splnit či nesplnit. V případě našich vlastností jsou dvě kombinace nemožné, viz cvičení 4b.16. Ovšem jde o situace velmi specifické, viz cvičení 4b.15, takže se nevyplácí se je učit, aby si člověk ušetřil práci. Obvyklý postup je, že vyšetřujeme všechny čtyři vlastnosti nezávisle.
Jako dobré cvičení na představivost doporučujeme cvičení 4b.17, které vyzývá k vytvoření příkladů relací pro všech 14 existujících kombinací vlastností.

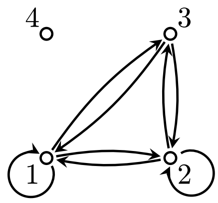
Od relací známých přejdeme k uměle vytvořeným, na kterých budeme trénovat vyšetřování.

Příklad 4b.g: Uvažujme množinu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a na ní relaci

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in A^2;\ a^2 + b^2 \leq 13\}.$$

Vyšetříme její vlastnosti. Protože je relace zadána jako množina dvojic, budeme se tohoto zápisu držet.

Hravě si rozmyslíme, které dvojice v této relaci jsou a které ne, zachytíme to v grafu. Obrázek ukazuje, že relace není reflexivní, protože například chybí smyčka $(3,3)$, viz $3^2+3^2>13$. Je symetrická a není antisymetrická, zde je protipříkladem třeba dvojice $(1,2)$ a $(2,1)$. Co se týče tranzitivity, je třeba procházet dvoukroky. Skoro všechny mají i zkratky, takže bychom si mohli chybně myslet, že relace je tranzitivní, pokud nás nenapadne dvojice $(3,1)\in\mathcal{R}$ a $(1,3)\in\mathcal{R}$, ale neplatí $(3,3)\in\mathcal{R}$. Relace $\mathcal{R}$ tedy není tranzitivní.



Dokážeme k těmto závěrům dojít bez grafu, jen s pomocí definice? Při vyšetřování budeme postupovat jako u předchozích příkladů. Obecnou podmínku z definice vlastnosti si vždy přepíšeme do konkrétní podoby podle definice relace a pak se nad ní zamyslíme.

R: Platí vždy $a\mathcal{R}a$ neboli $a^2+a^2\le 13$ neboli $a^2\le\frac{13}{2}$? Toto nevypadá jako podmínka, která platí „vždy“, otázka je, zda v naší malé A najdeme protipříklad. Najdeme.
Závěr: $\mathcal{R}$ není reflexivní.
Dk: Protipříklad je třeba $a=3$, neboť neplatí $3^2+3^2\le 13$.

S: Platí vždy implikace $a^2+b^2\le 13 \implies b^2+a^2\le 13$? Na první pohled vidíme, že tyto dvě nerovnosti jsou vlastně stejné, protože $a^2+b^2=b^2+a^2$.
Závěr: $\mathcal{R}$ je symetrická.
Dk: Vezměme libovolné $\underline{a,b\in A}$. Jestliže $\underline{(a,b)\in\mathcal{R}}$, tak $a^2+b^2\le 13$. Pak také $b^2+a^2\le 13$, proto $\underline{(b,a)\in\mathcal{R}}$.

A: Platí vždy: Jestliže $a^2+b^2\le 13$ a $b^2+a^2\le 13$, pak $a=b$?
V zásadě jde o řešení soustavy nerovnic, v tomto případě jde vlastně o nerovnici jedinou, jen napsanou rozdílnými způsoby. Zkušenost nám říká, že z nerovnosti $a^2+b^2\le 13$ nedokážeme algebraicky odvodit $a=b$, takže je čas přemýšlet nad protipříkladem.
Závěr: $\mathcal{R}$ není antisymetrická.
Dk: Protipříklad: Platí $(1,2)\in\mathcal{R}$ a $(2,1)\in\mathcal{R}$, ale neplatí $1=2$.

T: Platí vždy implikace $a^2+b^2\le 13$ a $b^2+c^2\le 13$ pak $a^2+c^2\le 13$? Opět máme soustavu dvou nerovnic, tentokráte je cílem odvodit z ní nerovnost jednu s eliminovaným b.
Pokusy narazí na to, že pro nerovnosti máme málo nástrojů. Kdyby to byly rovnosti, tak se b^2 snadno zbavíme jejich odečtením. To by ale u nerovnic šlo jen v případě, že je jedna $\le$ a druhá $\ge$, takže máme smůlu.
Nevyjde ani klasická eliminace. Z první nerovnice získáme odhad $b^2\le 13-a^2$, který bychom rádi „dosadili“ do druhé nerovnice, ale to obecně nelze, pro nerovnosti taková úprava neplatí. A stejně by pak vlevo vzniklo c^2-a^2, ale my potřebujeme součet.
Namísto algebry se tedy zamyslíme. Potřebujme $a^2+c^2\le 13$, tedy čísla by neměla být moc velká. Podmínka $a^2+b^2\le 13$ může znamenat, že jsou to středně malá čísla, ale také se může stát, že jedno číslo je spíš velké a druhé malé, nemáme zde žádnou kontrolu. Totéž platí o $b^2+c^2\le 13$, což nabízí inspiraci, jak hledat protipříklad: co nejvíce zvětšit a a c. Ukáže se, že to jde.
Závěr: $\mathcal{R}$ není tranzitivní.
Dk: Platí $(3,1)\in\mathcal{R}$ a $(1,3)\in\mathcal{R}$, neboť $3^2+1^2=1^2+3^2\le 13$, ale neplatí $3^2+3^2\le 13$, tedy ani $(3,3)\in\mathcal{R}$.
$\triangle$

Tento příklad byl podrobnější, protože jsme chtěli ukázat, jak při vyšetřování vlastností přemýšlíme. Shrneme to do několika dobrých rad.

S **Algoritmus 4b.1.**
pro vyšetřování vlastnosti relací daných podmínkou.

0. Bývá dobré si relaci nejprve „ohmatat“, zejména pokud je komplikovanější. Při jejím zkoumání pomůže, když máme intuitivní představu, jak vlastně relace funguje. Je dobré si vyjasnit, s jakými objekty relace pracuje (tedy co je množina A), pak si najít nějaké dvojice, které v relaci jsou, a naopak dvojice, které v relaci nejsou.

1. U relací zadaných vzorcem se osvědčil následující postup pro zkoumání určité vlastnosti.
Nejprve si přepíšeme její obecnou definici do aktuálního znění, tedy místo obecných výrazů typu $a\mathcal{R}b$ píšeme konkrétní podmínky z definice $\mathcal{R}$. Když se pak člověk na takový konkrétní přepis podívá, většinou vidí, zda je schopen dokázat jeho pravdivost. Pokud to nevypadá nadějně, je to znamení, že je načase hledat protipříklad.
Když platnost či neplatnost nevidíme rovnou, tak bývá dobrý nápad zkusit hledanou vlastnost dokázat. Buď se to povede, pak známe odpověď a máme i důkaz, nebo se důkaz z nějakého důvodu zadrhne, což nás často nasměruje přímo k protipříkladu.

2. Pokud je příklad snadný, vznikne často důkaz již během přemýšlení. Někdy je ale lepší nakonec úvahy pročistit a napsat důkaz znovu načisto. Je třeba zejména pohlídat, že důkaz má správnou logickou strukturu a formální náležitosti.
Vyvrácení vlastnosti je snadné, stačí ukázat protipříklad. Důkaz platnosti vlastnosti pak vychází z její definice. Na začátku je vždy obecný kvantifikátor, proto je třeba pracovat s libovolnou volbou prvku.

U reflexivity rovnou dokazujeme $a\mathcal{R}a$, takže si východisko důkazu vybíráme sami. Obvykle pomůže si v soukromé poznámce stranou vyjít vstříc od konce (ono užitečné „chci“). Důkaz ale musí vést od známého k žádanému.

U ostatních tří vlastností dokazujeme implikaci, obvykle přímým důkazem. Předpokládáme tedy, že platí určité věci o prvcích, a pomocí toho se snažíme dostat k závěru. U tranzitivity to většinou probíhá tak, že máme dvě rovnosti či nerovnosti s proměnnými a, b, c a my se snažíme eliminovat b.

3. Když si myslíme, že je důkaz hotov, vyplatí se (alespoň v duchu) udělat následující kontrolu: Pokusíme se vytvořit definici dokazované vlastnosti tím, že podtrhneme vhodně vybrané části pokusu o důkaz, viz příklady. Pokud to nejde, je důkaz nejspíše špatně. Pokud to jde, tak je možná chyba ještě jinde, ale alespoň to má správnou strukturu.

Čtenář by měl z našeho zápisu poznat, co jsou naše úvahy a co je výsledný důkaz. Je dobré je výrazně oddělit a všeobecně čtenáři pomoci v navigaci naším textem.

$\triangle$

! **Příklad 4b.h:** Vyšetříme relaci $\mathcal{R}$ na $\mathbb{N}$ danou následující podmínkou: $(a, b) \in \mathcal{R}$ právě tehdy, když existuje $k \in \mathbb{N}$ splňující $b = a^k$.

Nejprve se ujistíme, že definici dobře rozumíme, viz cvičení 4a.4. Klíčové je si uvědomit, že to k je lokální pro každou dvojici. Když se dvě čísla a, b ptají, zda jsou spolu v relaci, tak se pokusí najít vhodné k, je tedy jejich privátní převodní konstantou. Takže třeba víme, že $(2, 8) \in \mathcal{R}$, protože existuje $k = 3 \in \mathbb{N}$ splňující $8 = 2^3$. Také $(2, 16) \in \mathcal{R}$, to má zase své $k = 4 \in \mathbb{N}$ splňující $16 = 2^4$. Naopak $(2, 9) \notin \mathcal{R}$, protože nenajdeme $k \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo $9 = 2^k$. Máme v relaci $(2, 8)$, takže je přirozené se zeptat, jestli je tam i $(8, 2)$. Není, protože nejde najít $k \in \mathbb{N}$ splňující $2 = 8^k$ (sice najdeme $k = \frac{1}{3}$, ale to není z $\mathbb{N}$). To nám napovědělo něco o jisté vlastnosti.

Kdo chce, zkusí si rozmyslet, jestli je v relaci dvojice $(3, 3)$, popřípadě se podívá třeba na dvojice $(2, 8)$ a $(8, 64)$.

R: Platí vždy (pro $a \in \mathbb{N}$) že $(a, a) \in \mathcal{R}$ neboli $a = a^k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$? To umíme zařídit.

Závěr: $\mathcal{R}$ je reflexivní, protože pro $\underline{\text{každé } a \in \mathbb{N}}$ existuje $k = 1 \in \mathbb{N}$ splňující $a = a^1$, tedy $\underline{(a, a) \in \mathcal{R}}$.

S: Platí vždy, že když $b = a^k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, tak také $a = b^l$ pro nějaké $l \in \mathbb{N}$? (Všimněte si jiného jména převodní konstanty, dvojice b, a si hledá svou, nezávisle na tom k nalezeném dvojicí a, b.)

Algebraický přístup: Ve výchozí rovnici $b = a^k$ umíme prohodit role: $a = b^{1/k}$. Takže bychom museli mít $l = \frac{1}{k}$, ale pak nevypadá nadějně, že by platilo $l \in \mathbb{N}$. To nás inspiruje k nalezení protipříkladu.

Intuitivní přístup: Ve fázi rozmýšlení jsme už protipříklad našli.

Závěr: $\mathcal{R}$ není symetrická, protože dvojice $a = 2$, $b = 8$ splňuje $8 = 2^3$ neboli $(2, 8) \in \mathcal{R}$, ale nesplňuje $(8, 2) \in \mathcal{R}$.

A: Platí vždy, že když $b = a^k$ a $a = b^l$ pro nějaká $k, l \in \mathbb{N}$, pak nutně $a = b$? (Opět jsme každé dvojici museli dát možnost mít vlastní převodní konstantu.)

Možná to někdo vidí. Pokud ne, poslechneme radu a rovnou začneme psát důkaz, třeba to vyjde.

Vezměme libovolné $\underline{a, b \in \mathbb{N}}$ takové, že $\underline{(a, b) \in \mathcal{R} \text{ a } (b, a) \in \mathcal{R}}$. Pak pro nějaká $k, l \in \mathbb{N}$ platí $b = a^k$ a $a = b^l$. Dosazením první rovnice do druhé dostaneme $a = a^{kl}$. Toto je pro $a \in \mathbb{N}$ možné jedině tehdy, když $kl = 1$. Toto je zase pro $k, l \in \mathbb{N}$ možné jedině tehdy, když $k = l = 1$. Dostáváme proto $\underline{b = a^1 = a}$.

Závěr: $\mathcal{R}$ je antisymetrická.

Poznámka: Pokud nám důkaz vznikne za pochodu, obvykle zahrnuje i rozličné pomocné úvahy. Bývá dobré pak pro čtenáře zvýraznit, která místa tvoří důkaz samotný.

Poznámka: Šel by i jiný důkaz. Můžeme si všimnout, že pro $a, k \in \mathbb{N}$ platí $a^k \geq a$. Pro dvojici $(a, b) \in \mathcal{R}$ proto platí $b \geq a$. Z předpokladů $[(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R}]$ tak dostáváme $[b \geq a \wedge a \geq b]$, odkud hned máme $a = b$.

T: Platí vždy, že z předpokladu $b = a^k$ a $c = b^l$ pro nějaká $k, l \in \mathbb{N}$ vyplývá, že $c = a^m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$?

Tradiční přístup je eliminovat z daných rovnic b, což se snadno povede dosazením z první rovnice do druhé. Dostáváme $c = (a^k)^l$, což vypadá téměř jako to, co chceme dokázat.

Závěr: $\mathcal{R}$ je tranzitivní.

Dk: Vezměme libovolné $\underline{a, b, c \in \mathbb{N}}$ a předpokládejme, že $\underline{(a, b) \in \mathcal{R} \text{ a } (b, c) \in \mathcal{R}}$. To znamená, že existují $k, l \in \mathbb{N}$ splňující $b = a^k$ a $c = b^l$. Dosazením získáme $c = (a^k)^l = a^{kl}$ a také platí $kl \in \mathbb{N}$, proto dle definice $\underline{(a, c) \in \mathcal{R}}$.

$\triangle$

S **Poznámka:** Nejčastější chyby v důkazech jsou vynechaný kvantifikátor na začátku důkazu či špatný směr úvahy, což nastává zejména u reflexivity. U předchozího příkladu často potkávám takovýto „důkaz“:

$\forall a \in \mathbb{N},\ a\mathcal{R}a \implies a = a^1$ platí.

Pomineme-li nevhodné použití implikace, hlavním problémem je, že tento text dokazuje, že $a = a^1$ (je to konec řetězce úvah). To jsme ale dokázat nechtěli. Navíc se k tomu použila informace $a\mathcal{R}a$, ale my ještě nevíme, zda to platí, takže to neobstojí ani jako důkaz toho $a = a^1$.

Toto vniká nešikovným přepisem slovní úvahy „Platí $a\mathcal{R}a$, protože $a = a^1$“. Jenže v této větě plyne informace zprava doleva, od konce na začátek. Vystihne to zápis $a\mathcal{R}a \longleftarrow a = a^1$, ale v logice se zpětný chod nepoužívá. Je tedy potřeba si nejprve věci rozmyslet bokem a pak je napsat správně.
△

! **Příklad 4b.i:** Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na $\mathbb{Z}^2$ danou předpisem $(u,v)\mathcal{R}(x,y)$ právě tehdy, když $u \le x$ a $v \ge y$.
Intuice: Tato relace pracuje s vektory, takže ty a,b,c z definice vlastností teď budou vektory. Relace spojuje vektory, které jsou v souřadnicích velikostně „do kříže“, v první zvětšujeme, v druhé zmenšujeme, třeba $(3,3)\mathcal{R}(13,1)$. Necháme na čtenáři, aby podmínky z definic vlastností napsal v jazyce této relace, my se u každé rovnou pokusíme o důkaz.
R: Zde je třeba začátek důkazu najít. Poznámka stranou: Chceme $(u,v)\mathcal{R}(u,v)$, takže chceme $u \le u$ a $v \ge v$, to umíme zařídit.
Relace $\mathcal{R}$ je reflexivní. Pro libovolné $\underline{(u,v) \in \mathbb{Z}^2}$ totiž platí $u \le u$ a $v \ge v$, tudíž $\underline{(u,v)\mathcal{R}(u,v)}$.
S: Mějme $(u,v)\mathcal{R}(x,y)$, tedy $u \le x$ a $v \ge y$. Potřebujeme se dostat k $x \le u$, to se určitě nepovede vždy.
Relace $\mathcal{R}$ není symetrická, protože $(3,3)\mathcal{R}(13,1)$, ale neplatí $(13,1)\mathcal{R}(3,3)$.
A: Mějme $\underline{(u,v),(x,y) \in \mathbb{Z}^2}$. Předpokládejme, že $\underline{(u,v)\mathcal{R}(x,y)}$ a $\underline{(x,y)\mathcal{R}(u,v)}$. Pak $u \le x$ a $v \ge y$ a také $x \le u$ a $y \ge v$. Spárujeme nerovnosti: Máme $u \le x$ a $x \le u$ a také $v \ge y$ a $y \ge v$. Proto $u = x$ a $v = y$, tedy $\underline{(u,v) = (x,y)}$. Relace $\mathcal{R}$ je antisymetrická.
Poznámka: Nemohli jsme skončit tím $u = x$ a $v = y$. Definice antisymetrie končí faktem $a = b$, který musíme potvrdit pro volbu $a = (u,v)$ a $b = (x,y)$, tedy je třeba v závěru mluvit o vektorech (se kterými relace pracuje), nikoliv o složkách (ty nám pomohly udělat důkaz).
T: Mějme $\underline{(r,s),(u,v),(x,y) \in \mathbb{Z}^2}$. Předpokládejme, že $\underline{(r,s)\mathcal{R}(u,v)}$ a $\underline{(u,v)\mathcal{R}(x,y)}$. Pak $r \le u$ a $s \ge v$ a také $u \le x$ a $v \ge y$. Spárujeme nerovnosti: Máme $r \le u$ a $u \le x$ a také $s \ge v$ a $v \ge y$. Proto $r \le x$ a $s \ge y$, tedy $\underline{(r,s)\mathcal{R}(x,y)}$. Relace $\mathcal{R}$ je tedy tranzitivní.
△

S **Poznámka:** Tato relace je vlastně příkladem součinové relace na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, viz předchozí sekce 4a. Jsou příjemné, protože pracujeme s každou souřadnicí zvlášť. Budeme ale potkávat i jiné než součinové relace na vektorech. Typicky jsou dány algebraickými podmínkami, které zahrnují více souřadnic.
Vyšetřování vlastností pak může být náročnější, ale i mezi těmito relacemi jsou takové, se kterými se pracuje lépe. Bývá to v případech, kdy se definující algebraickou podmínku podaří přepsat tak, aby každý vektor měl svou stranu. Při troše štěstí se pak taková podmínka dá interpretovat jako porovnávání vektorů podle určité intuitivně uchopitelné vlastnosti.
Příklad: $(u,v)\mathcal{R}(x,y) \iff u - x = v - y$. Přepis: $u - v = x - y$. Vidíme, že relace spojuje vektory se stejnými rozdíly, například $(5,1)$ s rozdílem 4 bude v relaci s vektory $(8,4)$, $(13,9)$, $(1,-3)$ atd. Měla by tedy být reflexivní, symetrická a tranzitivní.
Příklad: $(u,v)\mathcal{R}(x,y) \iff u^2 - x^2 = y^2 - v^2$. Přepis: $u^2 + v^2 = x^2 + y^2$. Vidíme, že relace spojuje vektory stejné velikosti. Měla by tedy být reflexivní, symetrická a tranzitivní.
Příklad: $(u,v)\mathcal{R}(x,y) \iff 2u - x = y - 2v$. Přepis: $2(u+v) = x + y$. Relace bere v úvahu součet souřadnic a chce, aby ve dvojicích dvojnásobil. To nevypadá symetricky a zlobit bude i tranzitivita, protože když základní hodnotu zdvojnásobíme dvakrát, tak to nebude totéž jako jeden dvojnásobek.
Viz cvičení 4b.7.
Pro někoho může být intuitivnější pracovat s vektory (a_1,a_2), (b_1,b_2). Malé indexy nás nutí se více soustředit na to, která složka vektoru se vlastně myslí, na druhou stranu je hned vidět, na který vektor se odvoláváme. Například u první relace této poznámky máme definici

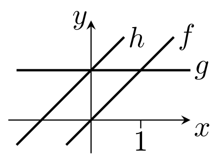
$$(a_1,a_2)\mathcal{R}(b_1,b_2) \iff a_1 - b_1 = a_2 - b_2,$$

podmínku jsme přepsali jako $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$. Pokud to čtenáři přijde příjemnější, může si takto přepsat například cvičení 4b.7, které doporučujeme.
△

Příklad 4b.j: Nechť A je nějaká množina všech (živých) lidí. Definujeme relaci $a\mathcal{R}b$ jestliže a a b mají stejného (biologického) otce nebo mají stejnou (biologickou) matku.
Protože každý má stejného otce či matku sám se sebou, je tato relace reflexivní. Evidentně je také symetrická, protože ve výroku „a a b mají stejnou matku/otce“ je role a a b symetrická.
Antisymetrická v principu nebude: Jestliže mají a a b stejnou matku/otce a také b a a mají stejnou matku/otce, pak rozhodně nemusí jít o stejnou osobu, tedy neplatí $a = b$. Otázka ovšem je, zda se nám podaří v množině A najít protipříklad. Kdybychom například definovali A jako množinu jedináčků, pak už by $\mathcal{R}$ na takovémto A byla antisymetrická. Závěr tedy je, že relace $\mathcal{R}$ antisymetrická obecně není, ale pro konkrétní volbu A být může.

Tranzitivita: Nechť $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}c$. Pak mají a a b stejného rodiče a také b a c mají stejného rodiče. Znamená to, že pak i a a c sdílejí nějakého rodiče? Neznamená. Představme si následující situaci. Paní M_1 má s panem O_1 dítě a. Poté si pan O_1 udělá dítě b s paní M_2 a stává se tak spojovacím můstkem, díky kterému $a\mathcal{R}b$ (mají shodného otce O_1). Paní M_2 už má z předchozího manželství s panem O_2 dítě c, takže mají b a c společnou matku M_2 a tudíž $b\mathcal{R}c$. Jenže a a c nemají ani společnou matku, ani společného otce a tudíž neplatí $a\mathcal{R}c$, tato relace tedy není tranzitivní. Pokud se tedy takováto konstelace v množině A najde. Takže zase nevíme, dokud se nedozvíme přesnou specifikaci A.
Což jen ukazuje, že když se mezi zkoumané objekty dostanou lidé, začnou potíže, protože si dělají, co je napadne. Není divu, že v oborech jako psychologie, medicína či ekonomika zdaleka nedosáhli spolehlivosti závěrů, jaké nabízí třeba fyzika.
Původně bylo záměrem zkoumat relaci „a je sourozencem b“. Zatímco symetrie byla zjevná, v debatách se studenty jsme se zadrhli nejen na tranzitivitě a antisymetrii, ale také na reflexivitě. Relace v tomto příkladě je pokus vnést do toho alespoň trochu jasno.
Pokud v definici použijeme namísto spojky „nebo“ spojku „a“, tedy požadujeme shodu obou rodičů, tak dostaneme relaci, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
△

! **Příklad 4b.k:** Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na množině F všech reálných funkcí danou předpisem $f\mathcal{R}g$ právě tehdy, když $f(x)=g(x)$ pro nějaké $x\in D(f)\cap D(g)$.
Poznámka: Budeme předpokládat, že každá reálná funkce má neprázdný definiční obor.
Intuice: Tato relace pracuje s funkcemi, můžeme si představovat jejich grafy. Dvě funkce jsou v relaci, pokud se shodují jejich hodnoty alespoň v jednom bodě, tedy pokud se jejich grafy někde protnou. Například $f(x)=x$ a $g(x)=1$ jsou spolu v relaci, protože $f(1)=1=g(1)$. Naopak $f(x)=x$ a $h(x)=x+1$ spolu v relaci nejsou. Také $f(x)=\sqrt{x-1}$ a $g(x)=\sqrt{-x}$ spolu v relaci nejsou, protože jejich definiční obory nemají společný bod.
Všimneme si, že každá dvojice funkcí, které jsou v relaci, má svůj vlastní speciální bod x. Například $f(x)=x$ je také v relaci s $g(x)=4-x$, tentokráte $f(2)=2=g(2)$.
R: Intuice: Graf každé funkce se protne sám se sebou.
Relace $\mathcal{R}$ je reflexivní. Pro libovolné $\underline{f\in F}$ existuje $x\in D(f)$ a pro něj platí $f(x)=f(x)$, tedy $\underline{f\mathcal{R}f}$.
S: Intuice: Podmínka $f(x)=g(x)$ nezáleží na pořadí funkcí.
Relace $\mathcal{R}$ je symetrická.
Dk: Mějme $\underline{f,g\in F}$ splňující $\underline{f\mathcal{R}g}$. Pak existuje $x\in\mathbb{R}$ takové, že $f(x)=g(x)$, tudíž také $g(x)=f(x)$. Proto $\underline{g\mathcal{R}f}$.
A: Intuice: Jestliže se grafy dvou funkcí někde protínají, musí už být stejné?
Relace $\mathcal{R}$ není antisymetrická. Protipříklad: $f(x)=x$, $g(x)=2-x$. Pak $f(1)=g(1)$, tedy $f\mathcal{R}g$ a $g\mathcal{R}f$, ale $f\neq g$.
T: Mějme $f,g,h\in F$ splňující $f\mathcal{R}g$ a $g\mathcal{R}h$. Pak existuje $x\in\mathbb{R}$ takové, že $f(x)=g(x)$, a existuje $y\in\mathbb{R}$ takové, že $g(y)=h(y)$. Intuitivně, grafy f a g se někde protnou a grafy g a h se někde protnou. Umíme přinutit grafy f a h, aby se někde protnuly? Chvilka črtání naznačí, že ne.
Relace $\mathcal{R}$ není tranzitivní. Protipříklad: Uvažujme $f(x)=x$, $g(x)=1$ a $h(x)=x+1$. Pak $f(1)=1=g(1)$, tedy $f\mathcal{R}g$, a $g(0)=1=h(0)$, tedy $g\mathcal{R}h$, ale neplatí $f\mathcal{R}h$, protože rovnice $f(x)=h(x)$ neboli $x=x+1$ nemá řešení, popřípadě si všimneme, že grafy jsou rovnoběžné neshodné přímky.

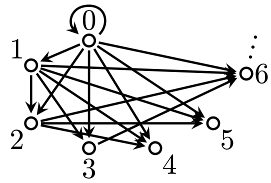


△

Pro začátečníka je asi nejobtížnější zvyknout si na antisymetrii. Ukážeme ještě jedno zajímavé chování.

! **Příklad 4b.l:** Vyšetříme vlastnosti relace $\mathcal{R}$ dané na $\mathbb{N}_0$ podmínkou $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $2a\leq b$.
Intuice: Relace $a\leq b$ spojuje menší čísla s většími. Naše relace při porovnávání to a zdvojnásobí, takže spojuje čísla a s mnohem většími čísly b.
R: Platí $2a\leq a$? Někdy možná ano, ale ne vždy.
Relace $\mathcal{R}$ není reflexivní. Protipříklad: Pro $a=1$ neplatí $2\cdot 1\leq 1$ a tedy neplatí $a\mathcal{R}a$.
S: U nerovnosti symetrii nečekáme, ovšem záleží na A, zda tam najdeme protipříklad.
Relace $\mathcal{R}$ není symetrická. Protipříklad: Platí $1\mathcal{R}3$, protože $2\leq 3$, ale neplatí $6\leq 1$ a tedy ani $3\mathcal{R}1$.
A: Zde to není úplně jasné, proto zkusíme strategii „začni s důkazem a uvidíš“.
Mějme $\underline{a,b\in\mathbb{N}_0}$ splňující $\underline{a\mathcal{R}b \text{ a } b\mathcal{R}a}$. Pak $2a\leq b$ a $2b\leq a$. Spojíme: $4a\leq 2b\leq a$, tedy $4a\leq a$. Pak $3a\leq 0$ neboli $a\leq 0$. To je pro $a\in\mathbb{N}_0$ možné jen pro $a=0$. Pak $2b\leq 0$ a $b\in\mathbb{N}_0$, tedy také $b=0$ a proto $\underline{a=b}$.
Relace $\mathcal{R}$ je tedy antisymetrická.
T: Nerovnosti obvykle tranzitivní jsou, uvidíme, jak dopadne důkaz.
Mějme $\underline{a,b,c\in\mathbb{N}_0}$ splňující $\underline{a\mathcal{R}b \text{ a } b\mathcal{R}c}$. Pak $2a\leq b$ a $2b\leq c$. Spojíme: $4a\leq 2b\leq c$, tedy $4a\leq c$. To není přesně to, co chceme, naštěstí pro $a\in\mathbb{N}_0$ platí $2a\leq 4a$, tedy dostáváme $2a\leq 4a\leq c$. Proto $2a\leq c$ a tedy $\underline{a\mathcal{R}c}$.

Relace $\mathcal{R}$ je tranzitivní.
Poznámka k antisymetrii: Je důležité si uvědomit, co se v důkazu stalo. Určitě není pravda, že bychom „dokázali antisymetrii pro $a = b = 0$“. Již jsme připomínali, že podmínky u vlastností musí platit všeobecně. Proto také u této relace nemělo smysl tvrdit, že „reflexivita platí pro $a = 0$“, ačkoliv $0\mathcal{R}0$. Náš důkaz antisymetrie se nijak neomezoval a opravdu začal libovolnými $a, b \in \mathbb{N}_0$. Cílem bylo ukázat, že z podmínky $[a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a]$ plyne $a = b$ a nám v průběhu důkazu vyšlo, že tu podmínku v naší relaci splňuje jen jedna dvojice čísel, pro kterou shodou okolností $a = b$. Pro ostatní dvojice a, b předpoklad splněný není a celá implikace (podmínka antisymetrie) tedy také platí.



Na obrázku vpravo vidíme, jak relace vypadá na množině $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Pro malá čísla se podobá relaci $a \le b$, ale pro větší už ubývají šipky, například z $a = 2$ vede první šipka do $b = 4$, z $a = 3$ až do $b = 6$, z $a = 4$ až do $b = 8$ atd. Podstatné je, že jediné obousměrné spojení je smyčka u nuly, což je přesně informace, kterou nám poskytl analytický přístup k antisymetrii.
Pro úplnost ještě ukážeme dvě alternativy, jak si poradit s podmínkou antisymetrie. Nerovnosti $2a \le b$ a $2b \le a$ je možné sečíst a dostat $2a + 2b \le a + b$, odtud $a + b \le 0$. Protože $a \ge 0$ a $b \ge 0$, je jedinou možností $a = b = 0$. Je také možné využít toho, že pro $a \in \mathbb{N}_0$ platí $a \le 2a$, spojením s $2a \le b$ dostaneme $a \le b$. Obdobně z $2b \le a$ odvodíme $b \le a$. Spojením $a \le b$ a $b \le a$ vyjde $a = b$. Tento důkaz nás dostal k cílové rovnosti bez informace o tom, že obousměrné spojení je jen jedno.
△

Další vyšetřování relací si vyzkoušejte ve cvičeních 4b.5, 4b.6, 4b.7, 4b.8, 4b.9 a 4b.10. Dobrou strategií může být vyzkoušet u všech cvičení úvodní relace a) až řekněme e), které jsou snažší, a pak se propracovat k náročnějším. Dobrým tréninkem intuice jsou cvičení 4b.11 a 4b.12.

Než se dostaneme k další sekci, podíváme se ještě na tranzitivní relace. Ty umějí zkrátit dvojkroky na jednokroky. Tuto myšlenku je možné aplikovat opakovaně, takže i trojkroky, čtyřkroky a podobně lze postupně zkracovat na jednokroky. Dostáváme tak silnější podmínku.

Fakt 4b.2.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A. Je tranzitivní právě tehdy, když pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ a prvky $a_0, a_1, \dots, a_n \in A$ takové, že $a_{i-1}\mathcal{R}a_i$ pro všechna $i = 1, 2 \dots, n$, platí také $a_0\mathcal{R}a_n$.

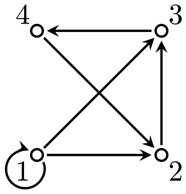
Všimněte si, že prvky $a_0, a_1, \dots, a_n$ tvoří řetízek délky n, viz lemma o řetízcích 4a.10. Tvrzení je ekvivalence, takže tradičně dokážeme dvě implikace.

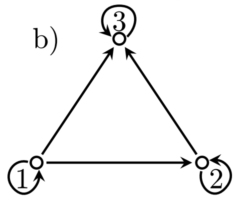
Důkaz (rutinní)**:** 1) $\Longleftarrow$: Předpokládejme, že daná podmínka platí. Pak ji lze použít pro $n = 2$, což říká, že kdykoliv $a_0\mathcal{R}a_1\mathcal{R}a_2$, pak $a_0\mathcal{R}a_2$. To je přesně definice tranzitivity.
2) $\Longrightarrow$: Předpokládejme, že $\mathcal{R}$ je tranzitivní. Platnost podmínky dokážeme indukcí na n.
(0) Pro $n = 2$ podmínka platí, je to definice tranzitivity.
(1) Mějme $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \ge 2$. Předpokládejme, že když libovolné prvky $a_0, \dots, a_n \in A$ splňují $a_{i-1}\mathcal{R}a_i$ pro všechna $i = 1, 2 \dots, n$, pak $a_0\mathcal{R}a_n$. Platí to také pro řetízky délky $n + 1$?
Vezměme prvky $a_0, \dots, a_n, a_{n+1} \in A$ takové že $a_{i-1}\mathcal{R}a_i$ pro všechna $i = 1, 2 \dots, n+1$. Pak to platí i pro $i \le n$ a aplikací indukčního předpokladu na $a_0 \dots, a_n$ zjistíme, že $a_0\mathcal{R}a_n$. Spolu s $a_n\mathcal{R}a_{n+1}$ a tranzitivitou dostaneme $a_0\mathcal{R}a_{n+1}$ a důkaz je hotov.
□

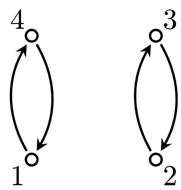
Cvičení

Připomeňme, že vyšetřit vlastnosti znamená zjistit, zda určitá vlastnost (reflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita) platí, a tuto odpověď dokázat.

Cvičení 4b.1 (rutinní)**:** Rozhodněte, které vlastnosti platí pro relace dané následujícími grafy.

a) 

b) 

c) 

Cvičení 4b.2 (rutinní)**:** Uvažujte následující relace na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Rozhodněte, které vlastnosti pro ně platí. Pak nakreslete jejich grafy a ověřte na nich své odpovědi.
a) $\mathcal{R} = \{(1,1), (1,4), (2,1), (3,4)\}$; b) $\mathcal{R} = \{(1,4), (3,4), (4,3), (4,4)\}$.

Cvičení 4b.3 (rutinní)**:** Uvažujte relaci $\mathcal{R}$ danou na množině $A = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$ podmínkou $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když a dělí b. Napište ji jako množinu dvojic, nakreslete její graf a pak určete její vlastnosti.

Cvičení 4b.4 (rutinní)**:** Uvažujte relaci $\mathcal{R}$ na množině lidí A danou $a\mathcal{R}b$ jestliže a a b sdílí křestní jméno. Určete její vlastnosti.

Cvičení 4b.5 (rutinní, *dobré)**:** Vyšetřete vlastnosti pro následující relace na $\mathbb{Z}$:
a) $a\mathcal{R}b \iff |a| = |b|$;
b) $a\mathcal{R}b \iff a \geq b$;
c) $a\mathcal{R}b \iff a \neq b$;
d) $a\mathcal{R}b \iff a = b + 1$;
e) $a\mathcal{R}b \iff b = 2a$;
f) $a\mathcal{R}b \iff a - b = 2k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$;
g) $a\mathcal{R}b \iff \gcd(a, b) > 1$;
h) $a\mathcal{R}b \iff a + b = 13$;
i) $a\mathcal{R}b \iff a \cdot b > 13$;
j)* $a\mathcal{R}b \iff a \geq b^2$ (viz následující cvičení).

Cvičení 4b.6 (rutinní, *dobré)**:** Vyšetřete vlastnosti pro následující relace na $\mathbb{R}$:
a) $x\mathcal{R}y \iff y - x \in \mathbb{Z}$;
b) $x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Q}$;
c) $x\mathcal{R}y \iff xy \geq 0$;
d) $x\mathcal{R}y \iff xy > 0$;
e) $x\mathcal{R}y \iff xy \geq 1$;
f) $x\mathcal{R}y \iff x = y^2$;
g) $x\mathcal{R}y \iff |x| \leq |y|$;
h)* $x\mathcal{R}y \iff x \geq y^2$ (viz předchozí cvičení).

Cvičení 4b.7 (rutinní, *dobré)**:** Vyšetřete vlastnosti pro následující relace definované na $\mathbb{R}^2$:
a) $(u, v)\mathcal{R}(x, y)$ právě tehdy, když $u - x = v - y$;
b) $(u, v)\mathcal{R}(x, y)$ právě tehdy, když $u^2 - x^2 = y^2 - v^2$;
c) $(u, v)\mathcal{R}(x, y)$ právě tehdy, když $u + v = x + y$;
d) $(u, v)\mathcal{R}(x, y)$ právě tehdy, když $2u - x = y - 2v$;
e) $(u, v)\mathcal{R}(x, y)$ právě tehdy, když $u \leq x \wedge v < y$;
f) $(u, v)\mathcal{R}(x, y)$ právě tehdy, když $u^2 - y = x^2 - v$;
g)* $(u, v)\mathcal{R}(x, y)$ právě tehdy, když $u^2 - y = v^2 - x$;
h)* $(u, v)\mathcal{R}(x, y)$ právě tehdy, když $(u, v) - (x, y) \in N$, kde $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 13\}$ (mimochodem, kružnice okolo počátku s poloměrem $\sqrt{13}$);
i)* $(u, v)\mathcal{R}(x, y)$ právě tehdy, když $(u, v) - (x, y) \in N$, kde $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ (mimochodem, vedlejší diagonála).

Cvičení 4b.8 (rutinní, *dobré)**:** Vyšetřete vlastnosti pro následující relace definované na množině F všech funkcí $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ (tedy pro zjednodušení bereme funkce s definičním oborem celé $\mathbb{R}$).
a) $f\mathcal{R}g$ právě tehdy, když $f(1) = g(1)$ a $f(2) = g(2)$;
b) $f\mathcal{R}g$ právě tehdy, když $f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
c) $f\mathcal{R}g$ právě tehdy, když $f(x) \leq g(x)$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$.
d)* $f\mathcal{R}g$ právě tehdy, když $f(0)g(0) = 2$;
e)* $f\mathcal{R}g$ právě tehdy, když $f(1) = g(2)$;

Cvičení 4b.9 (rutinní)**:** Vyšetřete vlastnosti pro následující relace definované na množině $M_{2\times 2}$ všech 2×2 reálných matic:
a) $A\mathcal{R}B$ právě tehdy, když $|A| = |B|$ (stejný determinant);
b) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mathcal{R} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ právě tehdy, když $a_{11} = b_{22}$.

Cvičení 4b.10 (rutinní)**:** Vyšetřete vlastnosti pro následující relace definované na množině $P[x]$ všech reálných polynomů:
a) $p\mathcal{R}q$ právě tehdy, když $\deg(p) = \deg(q)$ neboli když mají p a q stejný stupeň;
b) $p\mathcal{R}q$ právě tehdy, když $\deg(p) \leq \deg(q)$.
c) $p\mathcal{R}q$ právě tehdy, když mají p a q stejné reálné kořeny včetně násobnosti;
d) $p\mathcal{R}q$ právě tehdy, když mají p a q stejné kořeny (reálné i komplexní) včetně násobnosti.
Poznámka: Umíte najít dva polynomy p, q, které jsou spolu v relaci podle c) ale ne podle d)?

Cvičení 4b.11 (rutinní)**:** Vyšetřete vlastnosti pro následující relace definované na množině A všech přímek v rovině:
a) $p\mathcal{R}q$ právě tehdy, když $p \parallel q$ neboli když jsou p a q rovnoběžné;
b) $p\mathcal{R}q$ právě tehdy, když $p \perp q$ neboli když jsou p a q kolmé;
c) $p\mathcal{R}q$ právě tehdy, když $p \cap q \neq \emptyset$ neboli když se p a q protínají.

Cvičení 4b.12 (rutinní)**:** Nechť A je množina neprázdných konečných řetězců z 26 malých písmen anglické abecedy (slov, podrobněji viz příklad 7c.h). Určete vlastnosti pro následující relace na A:
a) $\alpha\mathcal{R}\beta$ právě tehdy, když řetězce α a β nemají žádná společná písmena;
b) $\alpha\mathcal{R}\beta$ právě tehdy, když řetězce α a β sdílejí alespoň jedno písmeno;
c) $\alpha\mathcal{R}\beta$ právě tehdy, když je každé písmeno řetězce α obsaženo v řetězci β;
d) $\alpha\mathcal{R}\beta$ právě tehdy, když řetězce α a β nemají stejnou délku;
e) $\alpha\mathcal{R}\beta$ právě tehdy, když je řetězec α delší než β.

Cvičení 4b.13 (poučné)**:** Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na množině A, která splňuje podmínku
• $\forall a,b,c\in A$, $a\neq b$, $b\neq c$: $[a\mathcal{R}b\wedge b\mathcal{R}c] \implies a\mathcal{R}c$.
Dokažte, že $\mathcal{R}$ je pak tranzitivní.

Cvičení 4b.14 (poučné)**:** Dokažte, že pro libovolnou množinu A je relace $\Delta(A)$ reflexivní, symetrická, antisymetrická a tranzitivní.

Cvičení 4b.15 (poučné)**:** Dokažte, že pro libovolnou množinu A a relaci $\mathcal{R}$ na A platí, že jestliže je $\mathcal{R}$ symetrická i antisymetrická, pak $\mathcal{R}\subseteq\Delta(A)$.
Jinak řečeno, relace, která je symetrická a antisymetrická zároveň, nemůže mít jiné dvojice než typu (a,a).

Cvičení 4b.16 (poučné)**:** Dokažte, že pro libovolnou množinu A a relaci $\mathcal{R}$ na A platí, že jestliže je $\mathcal{R}$ symetrická i antisymetrická, pak je tranzitivní.
Může pomoci cvičení 4b.15.

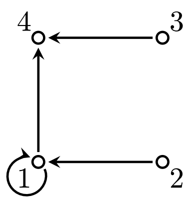
Cvičení 4b.17 (poučné, dobré)**:** Uvažujme množinu $A=\{a,b,c\}$. Máme čtyři vlastnosti (reflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita), každá může a nemusí být splněna, což dává celkem $2^4=16$ možností. Pro každou možnost vytvořte nějaký příklad relace na A, která má přesně tuto kombinaci vlastností, či odůvodněte, proč to nejde (viz cvičení 4b.16).
Nápověda: Vytvářet relace dané nějakým vztahem může být náročné, jednodušší je zadat potřebnou relaci grafem s vhodně vymyšlenými šipkami či jen seznamem dvojic.

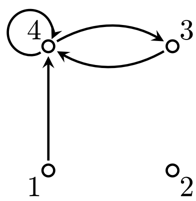
Cvičení 4b.18 (poučné, dobré)**:** Najděte chybu v následujícím „důkazu“, že jestliže je nějaká relace $\mathcal{R}$ na množině A symetrická a tranzitivní, pak už musí být i reflexivní:
Nechť $a\in A$. Vezměme $b\in A$ takové, aby $a\mathcal{R}b$. Podle symetrie pak $b\mathcal{R}a$, máme dvojkrok $a\mathcal{R}b\mathcal{R}a$, tedy podle tranzitivity $a\mathcal{R}a$.

Cvičení 4b.19 (poučné)**:** Nechť $\mathcal{R}$ je relace z množiny A do množiny B. Dokažte, že pak $\mathcal{R}\circ\Delta(A)=\mathcal{R}$ a $\Delta(B)\circ\mathcal{R}=\mathcal{R}$.

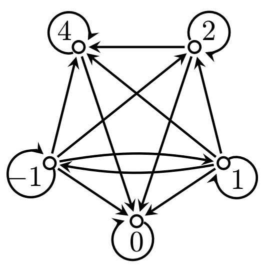
Řešení:

4b.1: a) **R**: ne; chybí smyčka třeba u 2. **S**: ne; třeba $1\mathcal{R}2$, ale neplatí $2\mathcal{R}1$. **A**: ano; jediný případ s $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$ je $a=b=1$ (alternativa: pro $a\neq b$ nikdy nevedou šipky oběma směry). **T**: ne; je $1\mathcal{R}3$ a $3\mathcal{R}4$, ale není $1\mathcal{R}4$.
b) **R**: ano. **S**: ne; p-p $1\mathcal{R}2$ ale ne $2\mathcal{R}1$. **A**: ano; $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$ nastává jen u smyček, kdy $a=b$ platí. **T**: ano; dvojkroky bez smyček jsou jen $1\mathcal{R}2\mathcal{R}3$ a ten má zkratku $1\mathcal{R}3$.
c) **R**: ne; chybí smyčka třeba u 1. **S**: ano; pro každou šipku je i zpět. **A**: ne; p-p $1\mathcal{R}4$, $4\mathcal{R}1$ ale $1\neq 4$. **T**: ne; p-p $1\mathcal{R}4$ a $4\mathcal{R}1$, ale není $1\mathcal{R}1$.
4b.2: a) **R**: ne; chybí třeba $(2,2)$. **S**: ne; p-p $(1,4)\in\mathcal{R}$, ale $(4,1)\notin\mathcal{R}$. **A**: ano; jediný případ s $(a,b)\in\mathcal{R}$ a $(b,a)\in\mathcal{R}$ je $a=b=1$. **T**: ne; p-p $(2,1)\in\mathcal{R}$ a $(1,4)\in\mathcal{R}$, ale $(2,4)\notin\mathcal{R}$.
b) **R**: ne; chybí $(1,1)$. **S**: ne; p-p $(1,4)\in\mathcal{R}$, ale $(4,1)\notin\mathcal{R}$. **A**: ne; p-p $(3,4)\in\mathcal{R}$ a $(4,3)\in\mathcal{R}$ ale $3\neq 4$; **T**: ne; například $(1,4)\in\mathcal{R}$ a $(4,3)\in\mathcal{R}$, ale $(1,3)\notin\mathcal{R}$.

a)


b)


4b.3: $\mathcal{R}=\big\{(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2),(4,4),(-1,0),(-1,1),(-1,2),(-1,4),(1,0),(1,-1),(1,2),(1,4),(2,0),(2,4),(4,0)\big\}$.
Relace je relfexivní a tranzitivní. Není symetrická (p-p $a=1$, $b=2$) a není antisymetrická (p-p $a=-1$, $b=1$).



4b.4: Je **R**,**S**,**T**.
4b.5: a) **R**: ano; $\forall a\in\mathbb{Z}$ platí $|a|=|a|$, proto $a\mathcal{R}a$.

S: ano; $\forall a,b\in\mathbb{Z}$ splňující $a\mathcal{R}b$ je $|a|=|b|\longrightarrow|b|=|a|\longrightarrow b\mathcal{R}a$.
A: ne, z $|a|=|b|$ a $|b|=|a|$ nedostaneme $a=b$; p-p $13\mathcal{R}(-13)$ a $(-13)\mathcal{R}13$, ale $-13\neq 13$.
T: ano; $\forall a,b,c\in\mathbb{Z}$ splňující $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}c$ máme $|a|=|b|$ a $|b|=|c|\longrightarrow|a|=|c|\longrightarrow a\mathcal{R}c$.
b) **R**: ano; $\forall a\in A$ je $a\geq a$, tedy $a\mathcal{R}a$. **S**: ne; p-p $2\mathcal{R}1$ ale neplatí $1\mathcal{R}2$;
A: ano; $a\mathcal{R}b\wedge b\mathcal{R}a\longrightarrow a\geq b\wedge b\geq a\longrightarrow a=b$. **T**: ano; $a\mathcal{R}b\wedge b\mathcal{R}c\longrightarrow a\geq b\wedge b\geq c\longrightarrow a\geq c\longrightarrow a\mathcal{R}c$.
c) **R**: ne; p-p: neplatí $1\neq 1$ proto neplatí $1\mathcal{R}1$. **S**: ano; $a\mathcal{R}b\longrightarrow a\neq b\longrightarrow b\neq a\longrightarrow b\mathcal{R}a$.
A: ne; p-p $1\mathcal{R}2\wedge 2\mathcal{R}1$, ale $1\neq 2$. **T**: ne; p-p $1\mathcal{R}2$ a $2\mathcal{R}1$, ale neplatí $1\mathcal{R}1$.
d) **R**: ne; p-p neplatí $13\mathcal{R}13$. **S**: ne; p-p $2\mathcal{R}1$ ale neplatí $1\mathcal{R}2$. **A**: ano; $a,b\in\mathbb{Z}$, $a\mathcal{R}b\wedge b\mathcal{R}a\longrightarrow a=a+2$ nikdy nenastane. **T**: ne; p-p $2\mathcal{R}1$ a $1\mathcal{R}0$, ale neplatí $2\mathcal{R}0$.
e) **R**: ne; p-p neplatí $13\mathcal{R}13$. **S**: ne; p-p $1\mathcal{R}2$ ale neplatí $2\mathcal{R}1$. **A**: ano; $a,b\in\mathbb{Z}$, $a\mathcal{R}b\wedge b\mathcal{R}a\longrightarrow b=2a\wedge a=2b\longrightarrow b=4b\longrightarrow b=0$ pak $a=0=b$. **T**: ne; p-p $1\mathcal{R}2$ a $2\mathcal{R}4$, ale neplatí $1\mathcal{R}4$.
f) **R**: ano; $\forall a$: $a-a=2\cdot 0\longrightarrow a\mathcal{R}a$. **S**: ano; $a\mathcal{R}b\longrightarrow a-b=2k\longrightarrow[b-a=2(-k)$ a $(-k)\in\mathbb{Z}]\longrightarrow b\mathcal{R}a$. **A**: ne; p-p $1\mathcal{R}3$ a $3\mathcal{R}1$, ale $1\neq 3$.
T: ano; $[a\mathcal{R}b\wedge b\mathcal{R}c]\longrightarrow[a-b=2k\wedge b-c=2l,\ k,l\in\mathbb{Z}]\longrightarrow[a-c=2(k+l),\ k+l\in\mathbb{Z}]\longrightarrow a\mathcal{R}c$.
g) **R**: ne; p-p $a=1$. **S**: ano; $a,b\in\mathbb{Z}$ splňují $a\mathcal{R}b$. Pak $\gcd(a,b)>1$, proto $\gcd(b,a)=\gcd(a,b)>1\longrightarrow b\mathcal{R}a$. **A**: ne; p-p $2\mathcal{R}4$ a $4\mathcal{R}2$ (společný dělitel 2), ale $2\neq 4$. **T**: ne; a,b mají společného dělitele >1, b,c mají společného dělitele >1, z toho nic společného pro a,c neplyne. Protipříklad: $2\mathcal{R}6$ a $6\mathcal{R}3$, ale neplatí $2\mathcal{R}3$.
h) **R**: ne; p-p $a=1$; **S**: ano; $a,b\in\mathbb{Z}$, $a\mathcal{R}b\longrightarrow a+b=13\longrightarrow b+a=13\longrightarrow b\mathcal{R}a$. **A**: ne; p-p $a=2$, $b=11$. **T**: ne; p-p $a=13$, $b=0$, $c=13$.
i) **R**: ne; p-p $a=1$. **S**: ano; $a,b\in\mathbb{Z}$, $a\mathcal{R}b\longrightarrow ab>13\longrightarrow ba>13\longrightarrow b\mathcal{R}a$. **A**: ne; p-p $a=4$, $b=5$. **T**: ne; p-p $a=2$, $b=8$, $c=4$.
j) **R**: ne; p-p $a=2$; **S**: ne; p-p $4\mathcal{R}2$; **A**: ano; $a,b\in\mathbb{Z}$, $a\mathcal{R}b\wedge b\mathcal{R}a\longrightarrow a\geq b^2\wedge b\geq a^2$. Z první nerovnosti $a\geq 0$, proto se dá umocnit, $a^2\geq b^4$, spolu s druhou $b\geq b^4$. To platí v $\mathbb{Z}$ jen pro $b=0,1$. V obou případech z nerovnic $b\geq a^2\geq b^4$ vyplyne $a=b$. **T**: ano; $a,b\in\mathbb{Z}$, $a\mathcal{R}b\wedge b\mathcal{R}c\longrightarrow a\geq b^2\wedge b\geq c^2$. Pro $b\in\mathbb{Z}$ platí $b^2\geq b$, proto navázat nerovnice, $a\geq b\geq c^2\longrightarrow a\geq c^2\longrightarrow a\mathcal{R}c$.
4b.6: a) **R**: ano; $x\in\mathbb{R}$, $x-x=0\in\mathbb{Z}\longrightarrow a\mathcal{R}a$. **S**: ano; $x,y\in\mathbb{R}$, $y-x\in\mathbb{Z}\longrightarrow x-y=-(y-x)\in\mathbb{Z}$. **A**: ne; p-p $1\mathcal{R}2$ a $2\mathcal{R}1$. **T**: ano; $x,y,z\in\mathbb{R}$, $y-x\in\mathbb{Z}\wedge(z-y)\in\mathbb{Z}\longrightarrow(z-x)=(y-x)+(z-y)\in\mathbb{Z}$.
b) **R**: ano; $x\in\mathbb{R}$, $x-x=0\in\mathbb{Q}\longrightarrow a\mathcal{R}a$. **S**: ano; $x,y\in\mathbb{R}$, $y-x\in\mathbb{Q}\longrightarrow x-y=-(y-x)\in\mathbb{Q}$. **A**: ne; p-p $1\mathcal{R}2$ a $2\mathcal{R}1$. **T**: ano; $x,y,z\in\mathbb{R}$, $y-x\in\mathbb{Q}\wedge(z-y)\in\mathbb{Q}\longrightarrow(z-x)=(y-x)+(z-y)\in\mathbb{Q}$.
c) **R**: ano; $x\in\mathbb{R}$, $xx=x^2\geq 0\longrightarrow x\mathcal{R}x$. **S**: ano; $x,y\in\mathbb{R}$, $xy\geq 0\longrightarrow yx\geq 0$. **A**: ne; p-p $1\mathcal{R}2$ a $2\mathcal{R}1$; **T**: ne; p-p $(-1)\mathcal{R}0$ a $0\mathcal{R}1$
d) **R**: ne; p-p $x=0$. **S**: ano; $x,y\in\mathbb{R}$, $xy>0\longrightarrow yx>0$. **A**: ne; p-p $1\mathcal{R}2$ a $2\mathcal{R}1$; **T**: ano; $x,y,z\in\mathbb{R}$, $xy>0\wedge yz>0$, vynásobíme, $xzy^2>0$, vydělíme číslem $y^2>0$, $xz>0$. Nebo: $xy>0$, $yz>0$ proto $x,y,z\neq 0$ a x,y stejná znaménka, y,z stejná znaménka, skrz y pak x,z stejná znaménka a tedy $xz>0$.
e) **R**: ne; p-p $x=0$. **S**: ano; $x,y\in\mathbb{R}$, $xy\geq 1\longrightarrow yx\geq 1$. **A**: ne; p-p $2\mathcal{R}1$ a $1\mathcal{R}2$. **T**: ne; p-p $\frac{1}{2}\mathcal{R}4$ a $4\mathcal{R}1$.
f) **R**: ne; p-p $x=2$; **S**: ne; p-p $4\mathcal{R}2$. **A**: ano; $x,y\in\mathbb{R}$, $x=y^2\wedge y=x^2\longrightarrow x,y\geq 0\wedge x=x^4\wedge y=y^4\longrightarrow x=y=1\vee x=y=0$. **T**: ne; p-p $16\mathcal{R}4$ a $4\mathcal{R}2$.
g) **R**: ano; $|x|\leq|x|\longrightarrow x\mathcal{R}x$. **S**: ne; p-p $1\mathcal{R}2$. **A**: ne; p-p $1\mathcal{R}(-1)$ a $(-1)\mathcal{R}1$. **T**: ano; $x,y,z\in\mathbb{R}$, $|x|\leq|y|\wedge|y|\leq|z|\longrightarrow|x|\leq|z|$.
h) **R**: ne; p-p $x=2$. **S**: ne; p-p $4\mathcal{R}2$. **A**: ne; p-p $x=0.1$, $y=0.2$ neboť $0.1\geq(0.2)^2$ a $0.2\geq(0.1)^2$ ale neplatí $0.1=0.2$. **T**: ne; p-p $(0.5)\mathcal{R}(0.7)$ neboť $0.5\geq(0.7)^2=0.49$, $(0.7)\mathcal{R}(0.8)$ neboť $0.7\geq 0.64$, ale není $0.5\geq 0.64$ neboli neplatí $0.5\mathcal{R}0.8$ (tohle asi bylo drobet zákeřné).
4b.7: a) $(u,v)\mathcal{R}(x,y)\iff u-v=x-y$. **R**: ano; $u-v=u-v\longrightarrow(u,v)\mathcal{R}(u,v)$. **S**: ano; $(u,v)\mathcal{R}(x,y)\longrightarrow u-v=x-y\longrightarrow x-y=u-v\longrightarrow(x,y)\mathcal{R}(u,v)$. **A**: ne; p-p $(2,1)\mathcal{R}(3,2)$ a $(3,2)\mathcal{R}(2,1)$ ale $(2,1)\neq(3,2)$. **T**: ano; $(r,s)\mathcal{R}(u,v)\wedge(u,v)\mathcal{R}(x,y)\longrightarrow r-s=u-v=x-y\longrightarrow r-s=x-y\longrightarrow(r,s)\mathcal{R}(x,y)$.
Pokud nepřepíšeme podmínku: **T**: $(r,s)\mathcal{R}(u,v)\wedge(u,v)\mathcal{R}(x,y)\longrightarrow r-u=s-v\wedge u-x=v-y$, sečíst: $r-u+u-x=s-v+v-y\longrightarrow r-x=s-y\longrightarrow(r,s)\mathcal{R}(x,y)$.
b) $(u,v)\mathcal{R}(x,y)\iff u^2+v^2=x^2+y^2$. **R**: ano; $u^2+v^2=u^2+v^2\longrightarrow(u,v)\mathcal{R}(u,v)$. **S**: ano; $(u,v)\mathcal{R}(x,y)\longrightarrow u^2+v^2=x^2+y^2\longrightarrow x^2+y^2=u^2+v^2\longrightarrow(x,y)\mathcal{R}(u,v)$. **A**: ne; p-p $(2,0)\mathcal{R}(0,2)$ a $(0,2)\mathcal{R}(2,0)$ ale $(2,0)\neq(0,2)$. **T**: ano; $(r,s)\mathcal{R}(u,v)\wedge(u,v)\mathcal{R}(x,y)\longrightarrow r^2+s^2=u^2+v^2=x^2+y^2\longrightarrow r^2+s^2=x^2+y^2\longrightarrow(r,s)\mathcal{R}(x,y)$.
c) **R**: ano; $u+v=u+v\longrightarrow(u,v)\mathcal{R}(u,v)$. **S**: ano; $(u,v)\mathcal{R}(x,y)\longrightarrow u+v=x+y\longrightarrow x+y=u+v\longrightarrow(x,y)\mathcal{R}(u,v)$. **A**: ne; p-p $(2,0)\mathcal{R}(0,2)$ a $(0,2)\mathcal{R}(2,0)$ ale $(2,0)\neq(0,2)$. **T**: ano; $(r,s)\mathcal{R}(u,v)\wedge(u,v)\mathcal{R}(x,y)\longrightarrow r+s=u+v=x+y\longrightarrow r+s=x+y\longrightarrow(r,s)\mathcal{R}(x,y)$.
d): $(u,v)\mathcal{R}(x,y)\iff 2(u+v)=x+y$. **R**: ne; neplatí obecně $2(u+v)=u+v$, p-p $(1,0)$. **S**: ne; $(1,0)\mathcal{R}(2,0)$ ale ne $(2,0)\mathcal{R}(1,0)$. **A**: ne; z rovnic $2(u+v)=x+y\wedge 2(x+y)=u+v$ máme získat $u=v$ a $x=y$. Redukcí $4(u+v)=u+v$, tedy $u+v=0$, pak $x+y=0$, to nestačí, p-p $(1,-1)\mathcal{R}(0,0)$ a $(0,0)\mathcal{R}(1,-1)$, ale $(1,-1)\neq(0,0)$. **T**: ne; $(1,0)\mathcal{R}(2,0)$ a $(2,0)\mathcal{R}(2,2)$, ale ne $(1,0)\mathcal{R}(2,2)$.

e) **R**: ne; p-p $(0,0)$ nesplňuje $0 < 0$ proto neplatí $(0,0)\mathcal{R}(0,0)$. **S**: ne; $(1,1)\mathcal{R}(2,2)$ ale ne $(2,2)\mathcal{R}(1,1)$. **A**: ano; $(u,v)\mathcal{R}(x,y) \wedge (x,y)\mathcal{R}(u,v) \longrightarrow v < y \wedge y < v$. To nikdy nenastane, proto implikace vždy platí. **T**: ano; $(r,s)\mathcal{R}(u,v) \wedge (u,v)\mathcal{R}(x,y) \longrightarrow r \le u \wedge s < v \wedge u \le x \wedge v < y$. Proto $r \le x \wedge s < y \longrightarrow (r,s)\mathcal{R}(x,y)$.
f) $(u,v)\mathcal{R}(x,y) \iff u^2+v = x^2+y$. **R**: ano; $u^2+v = u^2+v \longrightarrow (u,v)\mathcal{R}(u,v)$ **S**: ano; $(u,v)\mathcal{R}(x,y) \longrightarrow u^2+v = x^2+y \longrightarrow x^2+y = u^2+v \longrightarrow (x,y)\mathcal{R}(u,v)$. **A**: ne; p-p $(1,4)\mathcal{R}(2,1)$ a $(2,1)\mathcal{R}(1,4)$. **T**: ano; $(r,s)\mathcal{R}(u,v) \wedge (u,v)\mathcal{R}(x,y) \longrightarrow r^2+s = u^2+v = x^2+y \longrightarrow s^2+y = x^2+t \longrightarrow (r,s)\mathcal{R}(x,y)$.
Pokud si nepřepíšeme podmínku: **T**: $(r,s)\mathcal{R}(u,v) \wedge (u,v)\mathcal{R}(x,y) \longrightarrow r^2-v = u^2-s \wedge u^2-y = x^2-v$ sečíst $r^2-v+u^2-y = u^2-s+x^2-v \longrightarrow r^2-y = x^2-s \longrightarrow (r,s)\mathcal{R}(x,y)$.
g) $(u,v)\mathcal{R}(x,y) \iff u^2-v^2 = y-x$. **R**: ne; p-p $(2,3)$, neplatí $2^2-3^2 = 3-2$. **S**: ne; p-p $(2,1)\mathcal{R}(1,4)$ ale neplatí $(1,4)\mathcal{R}(2,1)$. **A**: ne; p-p $(1,0)\mathcal{R}(0,1)$ a $(0,1)\mathcal{R}(1,0)$. **T**: ne; p-p $(2,1)\mathcal{R}(1,4)$ a $(1,4)\mathcal{R}(16,1)$ ale neplatí $(2,1)\mathcal{R}(16,1)$.
h) Přepis: $(u,v)R(x,y) \iff (u-x)^2+(v-y)^2 = 13$. **R**: ne; $(u-u)^2+(v-v)^2 = 0 \neq 13$. **S**: ano; $(u,v)\mathcal{R}(x,y) \longrightarrow (u-x)^2+(v-y)^2 = 13 \longrightarrow (x-u)^2+(y-v)^2 = 13 \longrightarrow (x,y)\mathcal{R}(u,v)$. **A**: ne; p-p $(4,3)\mathcal{R}(1,1)$ a $(1,1)\mathcal{R}(4,3)$. **T**: ne; p-p $(4,3)\mathcal{R}(1,1)$ a $(1,1)\mathcal{R}(4,3)$ ale neplatí $(4,3)\mathcal{R}(4,3)$.
i) Přepis: $(u,v)R(x,y) \iff (u-x)+(v-y) = 0 \iff u+v = x+y$, viz (iii).
Samostatně: **R**: ano; $(u-u)+(v-v) = 0$. **S**: ano; $(u,v)\mathcal{R}(x,y) \longrightarrow (u-x)+(v-y) = 0 \longrightarrow (x-u)+(y-v) = -0 = 0 \longrightarrow (x,y)\mathcal{R}(u,v)$. **A**: ne; p-p $(1,3)\mathcal{R}(2,2)$ a $(2,2)\mathcal{R}(1,3)$. **T**: ano; $(r,s)\mathcal{R}(u,v) \wedge (u,v)\mathcal{R}(x,y) \longrightarrow (r-u)+(s-v) = 0 \wedge (u-x)+(v-y) = 0$ sečíst rovnice: $(r-x)+(s-y) = 0 \longrightarrow (r,s)\mathcal{R}(x,y)$.
4b.8: a) **R**: ano; libovolná $f \in F$ splňuje $f(1) = f(1)$ a $f(2) = f(2)$. **S**: ano; $f\mathcal{R}g \longrightarrow [f(1) = g(1) \wedge f(2) = g(2)] \longrightarrow [g(1) = f(1) \wedge g(2) = f(2)] \longrightarrow g\mathcal{R}f$. **A**: ne; p-p $f(x) = 0$, $g(x) = (x-1)(x-2)$. **T**: ano; $f\mathcal{R}g \wedge g\mathcal{R}h \longrightarrow [f(1) = g(1) \wedge f(2) = g(2) \wedge g(1) = h(1) \wedge g(2) = h(2)] \longrightarrow [f(1) = h(1) \wedge f(2) = h(2)] \longrightarrow f\mathcal{R}h$.
b) **R**: ano; libovolná $f \in F$ splňuje $f(x) \le f(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$. **S**: ne; p-p $f(x) = x$, $g(x) = x+13$. **A**: ano; $f\mathcal{R}g$ a $g\mathcal{R}f$, pro každé $x \in \mathbb{R}$ pak $f(x) \le g(x)$ a $g(x) \le f(x)$, tedy $f(x) = g(x) \longrightarrow f = g$. **T**: ano; $f\mathcal{R}g \wedge g\mathcal{R}h \longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$: $[f(x) \le g(x) \wedge g(x) \le h(x)] \longrightarrow f(x) \le h(x)$. Proto $f\mathcal{R}h$.
c) **R**: ano; libovolná $f \in F$ splňuje $f(0) \le f(0)$. **S**: ne; p-p $f(x) = x$, $g(x) = x+13$. **A**: ne; p-p $f(x) = x$, $g(x) = -x$. Pak $f(0) \le g(0)$ a $g(0) \le f(0)$, proto $f\mathcal{R}g$ a $g\mathcal{R}f$, ale $f \neq g$. **T**: ne; p-p $f(x) = x$, $g(x) = 1$, $h(x) = x-1$, pak $f(0) \le g(0)$ tedy $f\mathcal{R}g$, také $g(3) \le h(3)$, ale nikde neplatí $f(x) \le h(x)$.
d) **R**: ne; p-p $f(x) = x+1$ má $f(0)f(0) = 1\cdot 1 = 1$. **S**: ano; $f\mathcal{R}g \longrightarrow f(0)g(0) = 2 \longrightarrow g(0)f(0) = 2 \longrightarrow g\mathcal{R}f$. **A**: ne; p-p $f(x) = x+1$, $g(x) = 3x+2$, pak $f(0)g(0) = 1\cdot 2 = 2 = g(0)f(0)$, tedy $f\mathcal{R}g$ a $g\mathcal{R}f$, ale není $f = g$. **T**: ne; p-p $f(x) = x+1$, $g(x) = 3x+2$, $h(x) = (x+1)^2$, pak $f\mathcal{R}g$ a $g\mathcal{R}h$, ale neplatí $f\mathcal{R}h$, protože $f(0)h(0) = 1$.
e) **R**: ne; p-p $f(x) = x$ má $f(1) = 1$ a $f(2) = 2$. **S**: ne; p-p $f(x) = x+1$ a $g(x) = x$, pak $f(1) = 2 = g(2)$, proto $f\mathcal{R}g$, ale neplatí $g(1) = f(2)$. **A**: ne; p-p $f(x) = (2x-3)^2$, $g(x) = 1$, pak $f(1) = 1 = g(2)$ a $g(1) = 1 = f(2)$, tedy $f\mathcal{R}g$ a $g\mathcal{R}f$, ale není $f = g$. **T**: ne; p-p $f(x) = x+1$, $g(x) = x$, $h(x) = x-1$, pak $f\mathcal{R}g$ a $g\mathcal{R}h$, ale neplatí $f\mathcal{R}h$, protože $f(1) = 2$ a $h(2) = 1$.
4b.9: a) **R**: ano; $|A| = |A| \longrightarrow A\mathcal{R}A$. **S**: ano; $A\mathcal{R}B \longrightarrow |A| = |B| \longrightarrow |B| = |A| \longrightarrow B\mathcal{R}A$. **A**: ne; p-p matice ze samých nul a nenulová matice s opakujícími se řádky mají obě nulový determinant, ale nejsou si rovny.
T: ano; $A\mathcal{R}B \wedge B\mathcal{R}C \longrightarrow |A| = |B| \wedge |B| = |C| \longrightarrow |A| = |C| \longrightarrow A\mathcal{R}C$.
b) **R**: ne; p-p $A = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, nerovnají se levý horní a pravý dolní roh, proto neplatí $A\mathcal{R}A$.
S: ne, p-p $A = \left(\begin{smallmatrix}13&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ a $B = \left(\begin{smallmatrix}13&0\\0&13\end{smallmatrix}\right)$, platí $A\mathcal{R}B$, ale ne $B\mathcal{R}A$;
A: ne; p-p $A = \left(\begin{smallmatrix}13&0\\0&23\end{smallmatrix}\right)$ a $B = \left(\begin{smallmatrix}23&0\\0&13\end{smallmatrix}\right)$ splňují $A\mathcal{R}B$ a $B\mathcal{R}A$, ale nesplňují $A = B$.
T: ne; p-p $A = \left(\begin{smallmatrix}13&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix}23&0\\0&13\end{smallmatrix}\right)$ a $C = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&23\end{smallmatrix}\right)$ splňují $A\mathcal{R}B$ a $B\mathcal{R}C$, ale nesplňují $A\mathcal{R}C$.
4b.10: a) **R**: ano; $\deg(p) = \deg(p) \longrightarrow p\mathcal{R}p$. **S**: ano; $p\mathcal{R}q \longrightarrow \deg(p) = \deg(q) \longrightarrow \deg(q) = \deg(p) \longrightarrow q\mathcal{R}p$. **A**: ne; p-p $p = x$ a $q = 2x+1$. **T**: ano; $p\mathcal{R}q \wedge q\mathcal{R}r \longrightarrow \deg(p) = \deg(q) \wedge \deg(q) = \deg(r) \longrightarrow \deg(p) = \deg(r) \longrightarrow p\mathcal{R}r$.
b) **R**: ano; $\deg(p) = \deg(p) \longrightarrow \deg(p) \le \deg(p) \longrightarrow p\mathcal{R}p$. **S**: ne; p-p $p = x$, $q = x^2$. **A**: ne; p-p $p = x$ a $q = 2x+1$. **T**: ano; $p\mathcal{R}q \wedge q\mathcal{R}r \longrightarrow \deg(p) \le \deg(q) \wedge \deg(q) \le \deg(r) \longrightarrow \deg(p) \le \deg(r) \longrightarrow p\mathcal{R}r$;
c) **R**: ano; p má stejné reálné kořeny jako p. **S**: ano; mít stejné kořeny je symetrická vlastnost. **A**: ne; p-p $p = x-1$ a $q = 2x-2$; **T**: ano; mít stejné kořeny je vlastnost shody, ta je tranzitivní.
d) viz c).
Bonus: $p = (x-1)$, $q = (x-1)(x^2+1)$. Mají stejné reálné kořeny ale nemají stejné komplexní kořeny.
4b.11: a) **R**: ano; $p \parallel p$. **S**: ano; $p \parallel q \longrightarrow q \parallel p$. **A**: ne; p-p $y = x$ a $y = x+1$. **T**: ano; $[p \parallel q \wedge q \parallel r] \implies p \parallel r$.
b) **R**: ne. **S**: ano; $p \perp q \longrightarrow q \perp p$. **A**: ne; p-p $p : y = x$ a $q : y = -x$. **T**: ne; $[p \perp q \wedge q \perp r] \implies p \parallel r$! p-p $p : y = x$, $q : y = -x$, $r : y = x$.
c) **R**: ano; $p \cap p = p \neq \emptyset$. **S**: ano; $p \cap q \neq \emptyset \longrightarrow q \cap p = p \cap q \neq \emptyset$. **A**: ne; p-p $p : y = x$ a $q : y = 0$. **T**: ne; p-p $p : y = x$, $q : y = 0$, $r : y = x+1$.
4b.12: a) **R**: ne; p-p cokoliv. **S**: ano. **A**: ne; p-p cat$\mathcal{R}$dog. **T**: ne; p-p jo$\mathcal{R}$ne$\mathcal{R}$jo.
b) **R**: ano. **S**: ano. **A**: ne; p-p com$\mathcal{R}$mon. **T**: ne; p-p cat$\mathcal{R}$duck$\mathcal{R}$dog.

c) **R**: ano. **S**: ne; p-p slime$\mathcal{R}$sublime. **A**: ne; p-p např. but$\mathcal{R}$butt, bart$\mathcal{R}$brat, bare$\mathcal{R}$bear, kuna$\mathcal{R}$nanuk etc. **T**: ano.
d) **R**: ne; p-p cokoliv. **S**: ano. **A**: ne; p-p long$\mathcal{R}$short. **T**: ne; p-p long$\mathcal{R}$short$\mathcal{R}$long.
e) **R**: ne; p-p cokoliv. **S**: p-p short$\mathcal{R}$long. **A**: ano; $\alpha\mathcal{R}\beta \wedge \beta R\alpha$ nikdy nenastane. **T**: ano.
4b.13: Nechť $a, b, c \in A$ splňují $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}c$. Případ 1: Pokud $a \neq b$ a $b \neq c$, pak podle předpokladu $a\mathcal{R}c$. Případ 2: Pokud $a = b$, pak $b\mathcal{R}c$ vlastně znamená $a\mathcal{R}c$. Případ 3: Pokud $b = c$, pak $a\mathcal{R}b$ vlastně znamená $a\mathcal{R}c$. Takže vždy $a\mathcal{R}c$.
4b.14: **R**: přímo z definice $(a, a) \in \Delta(A)$. **S**: Jestliže $(a, b) \in \Delta(A)$, pak $b = a$, proto $(b, a) = (a, a) = (a, b)$ a tedy $(b, a) \in \Delta(A)$. **A**: pokud $(a, b) \in \Delta(A) \wedge (b, a) \in \Delta(A)$, už z toho prvního je $a = b$.
T: Nechť $(a, b) \in \Delta(A) \wedge (b, c) \in \Delta(A)$, pak $a = b = c$ a tedy $(a, c) = (a, a) \in \Delta(A)$.
4b.15: Nechť $(a, b) \in \mathcal{R}$. Ze symetrie také $(b, a) \in \mathcal{R}$, tedy z antisymetrie $a = b$ a proto $(a, b) = (a, a) \in \Delta(A)$.
4b.16: Pokud je relace $\mathcal{R}$ na A symetrická i antisymetrická, tak podle cvičení 4b.15 platí $\mathcal{R} \subseteq \Delta(A)$.
Pokud $(a, b) \in \mathcal{R}$ a $(b, c) \in \mathcal{R}$, pak $(a, b) \in \Delta(A)$, tedy $a = b$, a proto $(a, c) = (b, c) \in \mathcal{R}$.
4b.17: Nic nemá $\mathcal{R} = \{(a, b), (b, a), (b, c)\}$: Chybí (a, a) proto není **R**, k $b\mathcal{R}c$ chybí $c\mathcal{R}b$ proto není **S**, je tam $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$ pro $a \neq b$ proto není **A**, je tam $a\mathcal{R}b\mathcal{R}c$ ale ne $a\mathcal{R}c$ proto není **T**.
Dále jen zkratky, třeba $\mathcal{R}_{R,A}$ bude relace, která je reflexivní a antisymetrická, ale není nic jiného (to se také musí zajistit a ověřit). Podle cvičení 4b.15 máme [**S**$\wedge$**A**] $\Longrightarrow$ **T**, proto nelze vytvořit relaci, která je sym. and antisym. ale není trans., tedy neexistují $\mathcal{R}_{S,A}$ a $\mathcal{R}_{R,S,A}$. Ostatní lze:
$\mathcal{R}_R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c)\}$, $\mathcal{R}_S = \{(a, b), (b, a)\}$, $\mathcal{R}_T = \{(a, b), (b, a), (b, c), (a, a), (b, b), (a, c)\}$,
$\mathcal{R}_A = \{(a, b), (b, c)\}$, $\mathcal{R}_{R,S} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$, $\mathcal{R}_{R,A} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c)\}$,
$\mathcal{R}_{R,T} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (a, c)\}$, $\mathcal{R}_{S,T} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$, $\mathcal{R}_{A,T} = \{(a, b)\}$,
$\mathcal{R}_{R,S,T} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$, $\mathcal{R}_{R,A,T} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$, $\mathcal{R}_{S,A,T} = \{(a, a)\}$,
$\mathcal{R}_{R,S,A,T} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.
4b.18: Jak víme, že k danému a existuje b, které je s nim v relaci?
Přednesený argument dokazuje následující: Nechť je $\mathcal{R}$ symetrická a tranzitivní. Pokud je $a \in A$ s někým v relaci, pak už musí platit $a\mathcal{R}a$.
Mimochodem, v teorii grafů se prvkům, které nejsou s nikým propojeny, říká izolované.
4b.19: a) 1) $\mathcal{R} \circ \Delta(A) \subseteq \mathcal{R}$: $(a, b) \in \mathcal{R} \circ \Delta(A) \implies \exists x \in A$: $[(a, x) \in \Delta(A) \wedge (x, b) \in \mathcal{R}]$. Ale $(a, x) \in \Delta(A)$ znamená $a = x$, proto $(a, b) \in \mathcal{R}$.
2) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ \Delta(A)$ plyne ze cvičení 4c.1.
b) Důkaz je obdobný.

4c. Vlastnosti vlastností relací

Poznali jsme čtyři populární vlastnosti relací. Protože jsou to matematické pojmy, i tyto vlastnosti mají nějaké vlastnosti, například mohou různě interagovat s operacemi na relacích. Jak brzy uvidíme, dá se dokázat řada užitečných pravidel, která se popravdě řečeno nemá smysl učit. Z pohledu matematické teorie je samozřejmě důležité vědět, jak věci fungují, ale pravidla, která níže odhalíme, si v případě potřeby snadno vymyslíme, pokud tedy rozumíme dobře relacím. To je také hlavní účel této sekce. Přemýšlení nad pravidly napomůže ujasnit si fungování relací a také je to dobrý trénink matematické představivosti a vymýšlení důkazů.
Začneme otázkou, jak chování operací ukazuje na vlastnosti relace a naopak. Poté se zaměříme na to, zda aplikování operací na relace změní jejich vlastnosti (4c.4). Na závěr se podíváme, jak se dají vlastnosti relací zlepšit (uzávěr, 4c.13).

4c.1 Testování vlastností

Reflexivita pracuje s dvojicemi (a, a), které jsou shromážděny v diagonální relaci $\Delta(A)$. U symetrie obracíme pořadí ve dvojicích, což určitě nějak souvisí s inverzní relací, u tranzitivity zase dvojice napojujeme, což je hlavní myšlenka skládání relací. Šlo by pomocí těchto pojmů poznat, zda nějaká vlastnost platí?

Věta 4c.2.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A.
(i) $\mathcal{R}$ je reflexivní právě tehdy, když $\Delta(A) \subseteq R$.
(ii) $\mathcal{R}$ je symetrická právě tehdy, když $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.
(iii) $\mathcal{R}$ je antisymetrická právě tehdy, když $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq \Delta(A)$
(iv) $\mathcal{R}$ je tranzitivní právě tehdy, když $\mathcal{R}^2 \subseteq \mathcal{R}$.

S Rozbor: Protože všechna tvrzení jsou ekvivalence, čeká nás osm důkazů implikací. Podívejme se na (iii) $\Longrightarrow$. Základní východisko:

- Máme: $\mathcal{R}$ antisymetrická
- Chceme: $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq \Delta(A)$

Abychom se dostali k závěru, musíme ukázat, že každý prvek neboli každá dvojice (a,b) z $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ leží v $\Delta(A)$, tedy že je typu (a,a). Máme tak následující náhradní cíl:

- Máme: $\mathcal{R}$ antisymetrická
- Chceme: $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq \Delta(A)$

$$\begin{array}{c} \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq \Delta(A) \\ \uparrow \\ \forall a,b \in A\colon (a,b) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \implies a = b \end{array}$$

Nyní se podívejme na to, co máme:
- $\forall a,b \in A\colon [(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \in \mathcal{R}] \implies a = b.$

Ovšem předpoklad si dokážeme ekvivalentně přepsat,
- $\forall a,b \in A\colon [(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (a,b) \in \mathcal{R}^{-1}] \implies a = b.$

Což zase ekvivalentně umíme přepsat jako
- $\forall a,b \in A\colon [(a,b) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}] \implies a = b.$

Jinými slovy jsme právě odhalili, jak manipulací předpokladu postupně dojít k cíli. Vznikne tak důkaz typu „přímé odvození závěru“.

Měli jsme ovšem značné štěstí na přátelské tvrzení. Pokud se takto pokusíme dokázat třeba (iv), tak ztroskotáme. Jak jsme již konstatovali v poznámce 4a.5, tento přímočarý typ důkazu je málo flexibilní a zejména u relací často selže. Proto také v této sekci silně doporučíme přístup „závěr jako cesta“ s vloženou implikací.

Jak to bude vypadat v případě zde rozebírané implikace? Pomocí přepisu původního cíle dostaneme následující strukturu důkazu:

$$P: \ \mathcal{R} \text{ antisymetrická}$$

$$a,b,c \in A\colon \ (a,b) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \longrightarrow \xrightarrow{P} \cdots \longrightarrow a = b \longrightarrow (a,b) \in \Delta(A).$$

Zbývá doplnit část uprostřed. Abychom mohli použít předpoklad o $\mathcal{R}$, musíme se k němu od $\mathcal{R}^{-1}$ dostat, což by neměl být problém pomocí definice inverzní relace.

Podobně si rozmyslíme další vlastnosti. U reflexivity nám pomůže její interpretace coby implikace $a \in A \implies a\mathcal{R}a$. Protože se v tvrzeních pracuje s inkluzí mezi relacemi, bude vhodné se na ně dívat jako na množiny dvojic a používat jazyk $(a,b) \in \mathcal{R}$. Pokud by chtěl někdo mermomocí pracovat se značením $a\mathcal{R}b$, musel by si inkluze v tvrzeních přeložit do tohoto jazyka.

Důkaz (poučný)**:** (i): $\Longrightarrow$: Předp: $\mathcal{R}$ reflexivní. Pokud $\underline{x \in \Delta(A)}$, pak dle definice této relace $x = (a,a)$ pro nějaké $a \in A$ a díky reflexivitě $\underline{x = (a,a) \in \mathcal{R}}$.
$\Longleftarrow$: Předp: $\Delta(A) \subseteq \mathcal{R}$. Dáno $\underline{a \in A}$. Pak $(a,a) \in \Delta(A) \subseteq \mathcal{R}$, tedy $\underline{(a,a) \in \mathcal{R}}$. $\mathcal{R}$ je reflexivní.
(ii): $\Longrightarrow$: Předp: $\mathcal{R}$ je symetrická. 1) Nechť $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}}$. Pak podle symetrie také $(b,a) \in \mathcal{R}$ a proto dle definice inverzní relace $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}}$. Takže $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^{-1}$.
2) Naopak nechť $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}}$. Pak $(b,a) \in \mathcal{R}$ a podle symetrie $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}}$. Takže také $\mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{R}$. Závěr: $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.
$\Longleftarrow$: Předp: $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$. Nechť $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}}$, pak podle $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$ nutně musí být $(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}$ a tedy podle definice inverzní relace $\underline{(b,a) \in \mathcal{R}}$. $\mathcal{R}$ je tedy symetrická.
(iii): $\Longrightarrow$: Předp: $\mathcal{R}$ je antisymetrická. Nechť $a,b \in A$ splňují $\underline{(a,b) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}}$. Pak $(a,b) \in \mathcal{R}$ a $(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}$, tedy podle definice $\mathcal{R}^{-1}$ je $(b,a) \in \mathcal{R}$. Protože (a,b) i (b,a) jsou v $\mathcal{R}$, podle antisymetrie nutně $a = b$ a proto $\underline{(a,b) = (a,a) \in \Delta(A)}$.
$\Longleftarrow$: Předp: $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq \Delta(A)$. Nechť tedy $a,b \in A$ jsou takové, že $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}}$ a $\underline{(b,a) \in \mathcal{R}}$. Z toho druhého máme $(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}$, takže $(a,b) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$. Podle předpokladu to je podmnožina $\Delta(A)$, takže $(a,b) \in \Delta(A)$. To je ovšem možné jen tehdy, když $\underline{a = b}$.
(iv): $\Longrightarrow$: Předp: $\mathcal{R}$ je tranzitivní. Vezměme libovolné $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}^2} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$. Pak podle definice skládání musí existovat $x \in A$ takové, že $(a,x) \in \mathcal{R}$ a $(x,b) \in \mathcal{R}$. Podle tranzitivity potom také $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}}$.
$\Longleftarrow$: Předp: $\mathcal{R}^2 \subseteq \mathcal{R}$. Vezměme libovolné $a,b,c \in A$ takové, že $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}}$ a $\underline{(b,c) \in \mathcal{R}}$. Pak podle definice skládání $(a,c) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}^2$. Předpoklad pak dává $\underline{(a,c) \in \mathcal{R}}$.

□

S Poznámka: Jako obvykle si u tohoto typu důkazu všimneme, že když v každé části spojíme podtržené pasáže, tak dostaneme přesně definiční vyjádření závěru, který dokazujeme. Pomůže nám to ověřit strukturální správnost důkazu, ale je to také nápověda, jak jej sestavit.

Spojením (iv) a faktu 4a.11 dostaneme, že pro tranzitivní relace platí $\mathcal{R}^n \subseteq \mathcal{R}$. To ukazuje, že tranzitivní relace se v mocnině nemohou zvětšovat. Ve cvičení 4c.1 c) naopak vidíme, že se reflexivní relace nemohou v mocnině zmenšovat. Dostáváme tak následující tvrzení.

Důsledek 4c.3.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A. Jestliže je $\mathcal{R}$ reflexivní a tranzitivní, tak $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

4c.4 Vlastnosti a operace

Zde prozkoumáme, zda se vlastnosti zachovávají, když vytváříme nové relace pomocí operací. Začneme inverzní relací. Meditace nad rozličnými obrázky a dopadem toho, že obrátíme směry šipek, by nás měla dovést k pocitu, že se tak nedají vlastnosti pokazit ani získat. To vede na obousměrný vztah.

Věta 4c.5.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A. Tato relace má některou ze základních čtyř vlastností právě tehdy, pokud ji má $\mathcal{R}^{-1}$.

S **Rozbor:** Teoreticky bychom měli dokázat osm implikací (dvě pro každou vlastnost). Ovšem nám stačí polovina. Představme si, že dokážeme, že se jistá vlastnost přenáší z $\mathcal{R}$ na $\mathcal{R}^{-1}$ pro libovolnou relaci $\mathcal{R}$. Pak toto musí platit i pro $\mathcal{R}^{-1}$, tedy tato vlastnost se z $\mathcal{R}^{-1}$ přenáší na $(\mathcal{R}^{-1})^{-1}$, ovšem tato relace se rovná relaci $\mathcal{R}$ (fakt 4a.3) neboli dostali jsme přenos vlastnosti z $\mathcal{R}^{-1}$ na $\mathcal{R}$.
Stačí tedy dokázat, že se vlastnosti přenášejí z $\mathcal{R}$ na $\mathcal{R}^{-1}$. I zde by některé důkazy šly udělat přímo. Uvažujme například definici tranzitivity pro $\mathcal{R}$, kdy pro všechna $a, b, c \in \mathcal{R}$ platí
• $[a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c] \implies a\mathcal{R}c$.
Ovšem $a\mathcal{R}b$ je ekvivalentní tvrzení $b\mathcal{R}^{-1}a$, obdobně pro další dvě. Když takto nahradíme v implikaci, dostáváme
• $[b\mathcal{R}^{-1}a \wedge c\mathcal{R}^{-1}b] \implies c\mathcal{R}^{-1}a$.
Záměnou pořadí v závorce dostaneme
• $[c\mathcal{R}^{-1}b \wedge b\mathcal{R}^{-1}a] \implies c\mathcal{R}^{-1}a$,
což potvrzuje tranzitivitu pro relaci $\mathcal{R}^{-1}$.
Jako obvykle ovšem doporučíme flexibilnější důkaz typu závěr jako cesta.

Důkaz (rutinní, poučný)**:** Dána relace $\mathcal{R}$ na množině A.
1) Předpokládejme, že $\mathcal{R}$ je reflexivní.
Pro $\underline{a \in A}$ pak máme $a\mathcal{R}a$ a proto i $\underline{a\mathcal{R}^{-1}a}$ (prohodili jsme ta a). Relace $\mathcal{R}^{-1}$ je tedy reflexivní.
2) Předpokládejme, že $\mathcal{R}$ tranzitivní.
Vezměme $\underline{a, b, c \in A}$ takové, že $\underline{a\mathcal{R}^{-1}b \text{ a } b\mathcal{R}^{-1}c}$. Pak také $b\mathcal{R}a$ a $c\mathcal{R}b$ neboli $c\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$. Podle tranzitivity $\mathcal{R}$ platí $c\mathcal{R}a$ neboli $\underline{a\mathcal{R}^{-1}c}$. Závěr: $\mathcal{R}^{-1}$ je tranzitivní.
Důkazy dalších dvou vlastností jsou snad ještě snažší a necháme je jako cvičení 4c.2. Jako procvičování doporučujeme dokázat přenos vlastností z $\mathcal{R}^{-1}$ na $\mathcal{R}$ elementárním důkazem, nikoliv tou fintou výše.

□

S **4c.6 Poznámka:** Doporučený postup vytváření důkazů tohoto typu:
• Stanovíme předpoklad, ale dále s ním nepracujeme.
• Přepíšeme závěr podle definice příslušné vlastnosti aplikované na cílovou relaci. Tím je dán začátek a konec hlavního běhu důkazu.
• Najdeme kroky vedoucí od počátku do cíle cesty, přičemž hlavní motivace je dostat se do situace, kdy je možné použít hlavní předpoklad.
• Poté, co vytvoříme důkaz, pro jistotu zkontrolujeme, že začátek a konec hlavního řetězce úvah opravdu dává to, co chceme dokázat v závěru.
Tyto kroky by měly pomoci vyhnout se chybám. Oblíbenou je například začít důkaz přenosu tranzitivity takto:
Předpoklad: $\mathcal{R}$ tranzitivní.
$\forall a, b, c \in \mathcal{R}$: $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \longrightarrow \cdots$
Kde je problém? Hlavní běh zde začíná pomocným předpokladem $a\mathcal{R}b$, takže ať už odvodíme cokoliv, tak to bude o relaci $\mathcal{R}$, nikoliv o relaci $\mathcal{R}^{-1}$.
Další oblíbený nedůkaz se týká přenosu antisymetrie. Uvažujme následující argument:
Předpoklad: $\mathcal{R}$ antisymetrická.
$(a, b) \in \mathcal{R}^{-1} \longrightarrow (b, a) \in \mathcal{R} \xrightarrow{\mathcal{R} \text{ je } \mathbf{A}} a = b.$
V tomto pokusu jsou dokonce dvě chyby. První je úvahová. Autor se v druhém kroku odvolává na antisymetrii $\mathcal{R}$, ale ta k závěru $a = b$ potřebuje dva předpoklady, přičemž ten $(b, a) \in \mathcal{R}$ chybí. Tento krok tedy není správný. Druhá chyba je strukturální. Podíváme-li se na začátek a konec, zjistíme, že kdyby ty kroky byly dobře, tak se dokázalo $(a, b) \in \mathcal{R}^{-1} \implies a = b$, což ale není antisymetrie.

Proti těmto chybám pomůže, když se držíme základních principů.
Připomeňme rovněž poznámku 4a.6 o správném zápisu.
$\triangle$

Ukázali jsme, že pokud je relace dána nějakým principem, pak je stejným principem dána i její restrikce. Pak bychom také očekávali, že bude mít stejné vlastnosti. Je to skoro pravda, vlastnosti se nemohou restrikcí ztratit.

Věta 4c.7.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A, nechť $\mathcal{S}$ je restrikce $\mathcal{R}$ na nějakou $B \subseteq A$. Jestliže má $\mathcal{R}$ některou ze základních čtyř vlastností, tak ji má $\mathcal{S}$ také.

S **Rozbor:** Zde přímý důkaz použít nelze, například u tranzitivity není jasné, jakými korektními kroky se od tranzitivity pro $\mathcal{R}$ neboli podmínky
$[(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{R}] \implies (a,c) \in \mathcal{R}$
dostat přímo k obdobnému tvrzení pro $\mathcal{S}$. Použijeme tedy doporučované schéma, v tomto případě

• Máme: $\mathcal{R}$ tranzitivní
$\mathcal{S} = \mathcal{R}|_B$

• Chceme: $\mathcal{S}$ tranzitivní
$\uparrow$
$[(a,b) \in \mathcal{S} \wedge (b,c) \in \mathcal{S}] \implies (a,c) \in \mathcal{S}$

Z toho vyplývá struktura důkazu:

$$P:\ \mathcal{R} \text{ tranzitivní}$$
$$(a,b) \in \mathcal{S}, (b,c) \in \mathcal{S} \longrightarrow \xrightarrow{P} \cdots \longrightarrow (a,c) \in \mathcal{S}.$$

Zbývá doplnit část uprostřed. Abychom mohli použít předpoklad o $\mathcal{R}$, musíme se k němu od $\mathcal{S}$ dostat. Zde je dobré si připomenout definici restrikce: $\mathcal{S}$ obsahuje přesně ty dvojice z $\mathcal{R}$, jejichž prvky jsou z B. Mimo jiné to také znamená, že $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$.
Pro ostatní vlastnosti si to rozmyslíme obdobně. Také doporučíme množinový jazyk, protože restrikce pracuje s tím, kam který prvek náleží.

Důkaz (rutinní, poučný)**:** Dány relace $\mathcal{R}$ na A, $B \subseteq A$ a $\mathcal{S} = \mathcal{R}|_B$.
Předpokládejme, že $\mathcal{R}$ je tranzitivní. Ukážeme, že i $\mathcal{S}$ je tranzitivní.
Nechť $\underline{a,b,c \in B}$ jsou takové, že $\underline{(a,b) \in \mathcal{S} \text{ a } (b,c) \in \mathcal{S}}$. Protože $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$, pak $(a,b) \in \mathcal{R}$ a $(b,c) \in \mathcal{R}$ a z tranzitivity $\mathcal{R}$ plyne $(a,c) \in \mathcal{R}$. Protože také $a,c \in B$, dostáváme $(a,c) \in \mathcal{R} \cap (B \times B) = \mathcal{R}|_B$ neboli $\underline{(a,c) \in \mathcal{S}}$.
Tedy i $\mathcal{S}$ je tranzitivní.
Ostatní vlastnosti viz cvičení 4c.3.

$\square$

Když jsme tedy dokázali, že dělitelnost je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní jako relace na $\mathbb{N}_0$, pak má tyto vlastnosti i tehdy, když ji uvažujeme na $\mathbb{N}$, na $\{13, 14, 23\}$ nebo třeba na množině všech prvočísel.
Všimněte si, že tvrzení o restrikci nemá tvar ekvivalence, čili klidně se může stát, že $\mathcal{R}$ nějakou vlastnost nemá, ale přechodem k restrikci ji získáme. Je to tím, že jsme zmenšením množiny A mohli přijít o protipříklady, jak už jsme ostatně několikrát viděli. To se ale stává jen u exotických množin, takže v typickém případě má restrikce stejné vlastnosti jako původní relace.

Vedle restrikce jsme také uvažovali vztah inkluze $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ mezi relacemi na stejné množině A. To lze interpretovat tak, že jsme z relace $\mathcal{R}$ vytvořili novou relaci přidáním dvojic, nebo jsme z relace $\mathcal{S}$ vytvořili novou relaci ubráním dvojic. Když si to představíme v grafu, kde přidáváme či ubíráme šipky (zdůrazněme, že relace jsou na stejné množině, tedy jednotlivé prvky A zůstávají stejné), tak jistě záhy zjistíme, že takto snadno pokazíme existující vlastnosti, tudíž nemůžeme vždy zaručit jejich zachování. Ovšem s dvěma výjimkami.

Věta 4c.8.
Nechť $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ jsou relace na množině A. Předpokládejme, že $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$. Pak platí:
(i) Jestliže je $\mathcal{R}$ reflexivní, pak je $\mathcal{S}$ také reflexivní.
(ii) Jestliže je $\mathcal{S}$ antisymetrická, pak je $\mathcal{R}$ také antisymetrická.

S **Rozbor:** Množinový pojem inkluze v tvrzení naznačuje vhodnost množinového zápisu dvojic. Podívejme se na tvrzení (ii), opět aplikujeme doporučovaný typ cestovního důkazu. Jak vypadá závěr?
Chceme: $\forall a,b \in A$: $[(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \in \mathcal{R}] \implies a = b$.

Naše cesta tedy má jasně definovaný začátek i konec. Mezikroky nás musí ze začátku $(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \in \mathcal{R}$ dostat do situace, kdy můžeme použít předpoklad, který je o relaci $\mathcal{S}$. To je jasná inspirace k tomu, co dělat, zejména když si připomeneme, že předpoklady jsou vlastně dva, ještě je tam $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$.
Podobně si to rozmyslíme pro tvrzení (i).

Důkaz (poučný)**:** Dány relace $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ na A. Předpoklad: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$.
(i): Předpoklad: $\mathcal{R}$ je reflexivní.
Nechť $\underline{a \in A}$. Protože je $\mathcal{R}$ reflexivní, platí $(a,a) \in \mathcal{R}$. Protože $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, musí také platit $\underline{(a,b) \in \mathcal{S}}$.
$\mathcal{S}$ je tedy reflexivní.
(ii): Předpoklad: $\mathcal{S}$ je antisymetrická.
Nechť $\underline{a,b \in A}$ splňují $\underline{(a,b) \in \mathcal{R} \text{ a } (b,a) \in \mathcal{R}}$. Díky $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ pak $(a,b) \in \mathcal{S}$ a $(b,a) \in \mathcal{S}$, což podle antisymetrie $\mathcal{S}$ dává $\underline{a = b}$. Proto je $\mathcal{R}$ antisymetrická.

□

Doporučujeme čtenáři, aby našel pro ostatních šest situací protipříklady, že se vlastnosti nemusejí přenášet. Viz cvičení 4c.4.
Nyní se podíváme na vytváření relací pomocí množinových operací.

Věta 4c.9.
Nechť $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ jsou relace na množině A.
(i) Jestliže jsou $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ reflexivní, tak jsou také $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ a $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ reflexivní a $\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2$ není reflexivní pro $A \neq \emptyset$.
(ii) Jestliže jsou $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ symetrické, tak jsou také $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ a $\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2$ symetrické.
(iii) Jestliže jsou $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ antisymetrické, tak jsou také $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ a $\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2$ antisymetrické.
(iv) Jestliže jsou $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ tranzitivní, tak je také $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ tranzitivní.

Vidíme, že nejlépe se přenáší symetrie a nejhůře tranzitivita.
Tuto informaci je také možné strukturovat jinak: Průnik relací zachovává všechny čtyři vlastnosti, sjednocení zachovává reflexivitu a symetrii, rozdíl zachovává symetrii a antisymetrii.
Všimněte si jedné zvláštnosti. Když v matematice uvažujeme nějakou zákonitost, tak obvykle buď dokážeme, že platí, nebo ji vyvrátíme pomocí protipříkladu. Pak dotyčná zákonitost neplatí (jako obecné tvrzení), ale to neznamená, že se pokazí vždycky. Někdy platit může, někdy ne. V (i) ale vidíme neobvyklé tvrzení, že se reflexivita pro množinový rozdíl pokazí vždycky. Tím vlastně vzniká obecné tvrzení, které je třeba dokázat.
Poznamenejme ještě, že ve dvou případech tvrzení vyplývá z věty 4c.8, protože $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. My zde ale uděláme nezávislé důkazy.

Důkaz necháme zčásti jako cvičení 4c.5, ukážeme jen pár zajímavějších momentů. Protože zde používáme množinové operace, bude rozumnější pracovat s relacemi jako s množinami (což je konec konců jejich definice). U všech důkazů budeme používat doporučený typ důkazu a pro úsporu místa ukážeme jen hlavní běhy vnořených implikací.

Důkaz (rutinní)**:** (i): $\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2$ není reflexivní (protipříkladem): Protože $A \neq \emptyset$, existuje $a \in A$. Protože je $\mathcal{R}_1$ reflexivní, je $(a,a) \in \mathcal{R}_1$. Podobně ale také $(a,a) \in \mathcal{R}_2$, proto (a,a) neleží v $\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2$.
(ii): $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ symetrická: Nechť $a,b \in A$ splňují $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2}$. To znamená, že $(a,b) \in \mathcal{R}_1$ a $(a,b) \in \mathcal{R}_2$. Obě relace jsou symetrické, proto $(b,a) \in \mathcal{R}_1$ a $(b,a) \in \mathcal{R}_2$, tedy $\underline{(b,a) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2}$.
$\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2$ symetrická: Symetrie $\mathcal{R}_1$ dává implikaci $(a,b) \in \mathcal{R}_1 \implies (b,a) \in \mathcal{R}_1$, symetrie $\mathcal{R}_2$ díky obměně zase $(a,b) \notin \mathcal{R}_2 \implies (b,a) \notin \mathcal{R}_2$. Nechť $a,b \in A$ splňují $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2}$. Pak $(a,b) \in \mathcal{R}_1$ a $(a,b) \notin \mathcal{R}_2$, proto i $(b,a) \in \mathcal{R}_1$ a $(b,a) \notin \mathcal{R}_2$ a máme $\underline{(b,a) \in \mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2}$.
(iii) $\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2$ antisymetrická: Nechť $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2 \text{ a } (b,a) \in \mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2}$. Pak $(a,b) \in \mathcal{R}_1$ a $(b,a) \in \mathcal{R}_1$, ta je antisymetrická a proto $\underline{a = b}$.

□

Poznámka: Zajímavé nejsou jen pozitivní výsledky z věty. Stejně užitečné je zamyslet se nad tím, co se tam neříká.
Proč chybí v (iii) sjednocení? Zkusíme takové tvrzení dokázat.
Nechť $a,b \in A$ jsou takové, že $(a,b) \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ a $(b,a) \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. Platí tedy

$$[(a,b) \in \mathcal{R}_1 \vee (a,b) \in \mathcal{R}_2] \wedge [(b,a) \in \mathcal{R}_1 \vee (b,a) \in \mathcal{R}_2].$$

Teď bychom rádi použili antisymetrii z předpokladu, jenže ta platí pro $\mathcal{R}_1$ a pro $\mathcal{R}_2$ jako samostatné relace, čili bychom potřebovali ty dvojice donutit, aby se sešly v jedné relaci, tedy $(a,b) \in \mathcal{R}_1$ a $(b,a) \in \mathcal{R}_1$, popřípadě

totéž s $\mathcal{R}_2$. To se ale nemůže povést, protože každá dvojice (a,b), (b,a) si svobodně vybírá, skrz kterou relaci se do sjednocení dostane. Pokud se rozhodnou opačně, tak s tím nic neuděláme.
Tato slepá ulička nám zároveň napoví, jak vytvořit protipříklad, viz cvičení 4c.5 g).
Poznamenejme pro úplnost, že na druhou stranu není zaručeno, že se antisymetrie u sjednocení vždy pokazí, protože se může stát, že se ty dvě relace dobře sejdou a sjednocení antisymetrické bude (konec konců, stačí vzít $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$). Proto jsme také v (iii) nenapsali natvrdo, že antisymetrie $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ selže, na rozdíl od (i), kde bylo selhání reflexivity zaručeno.
Podobně si rozmyslete, kde se zarazí důkaz tranzitivity pro sjednocení a rozdíl (cvičení 4c.6), a ověřte, že protipříkladem pro rozdíl jsou třeba relace $\mathcal{R}_1 = \bigl\{(1,2),(2,3),(1,3)\bigr\}$ a $\mathcal{R}_2 = \bigl\{(1,3)\bigr\}$.
△

Další operací s relacemi je skládání.

Fakt 4c.10.
Nechť $\mathcal{R}$ a $\mathcal{S}$ jsou relace na množině A.
Jestliže jsou $\mathcal{R}$ a $\mathcal{S}$ reflexivní, pak je také $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ reflexivní.

Důkaz (rutinní)**:** Dány: Reflexivní relace $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ na A.
Nechť $a \in A$. Protože jsou $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$ reflexivní, dostáváme $(a,a) \in \mathcal{R}$ a $(a,a) \in \mathcal{S}$ (navazující dvojice), takže podle definice skládání $(a,a) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

□

Poznámka: Určitě jste si všimli, že ve faktu chybí symetrie, antisymetrie a tranzitivita. Kde je problém?
Zkusme začít důkaz pro symetrii. Nechť $a,b \in A$ splňují $(a,b) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$. Pak existuje $x \in A$ takové, že $(a,x) \in \mathcal{R}$ a $(x,b) \in \mathcal{S}$. Obě relace jsou symetrické, máme tedy $(b,x) \in \mathcal{S}$ a $(x,a) \in \mathcal{R}$, tedy $(b,a) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$. Těsně vedle, máme opačné pořadí v tom skládání; potřebovali bychom $(b,a) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.
Zkusme na tomto průšvihu založit protipříklad, použijeme $A = \{1,2,3,4\}$. Relace $\mathcal{R} = \bigl\{(1,2),(2,1)\bigr\}$ a $\mathcal{S} = \bigl\{(2,3),(3,2)\bigr\}$ jsou symetrické, ale $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \bigl\{(1,3)\bigr\}$ není. Takže se symetrie při skládání opravdu obecně nezachová.
Mimochodem, vlastně jsme ukázali, že symetrie se zachovává při skládání relací splňujících $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$. To je pravda například v případě $\mathcal{S} = \mathcal{R}$, viz níže.
Teď antisymetrie. Vezměme $a,b \in A$ takové, že $(a,b) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ a $(b,a) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$. Z toho prvního podle definice skládání dostaneme $\exists x \in A$: $a\mathcal{R}x$ a $x\mathcal{S}c$. Z toho druhého zase dostaneme $\exists y \in A$: $b\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{S}a$. Máme tedy $a\mathcal{R}x$ a $b\mathcal{R}y$. Abychom mohli použít antisymetrii relace $\mathcal{R}$, potřebovali bychom vynutit $a = b$ a $x = y$, ale nenabízí se k tomu nástroj, předpoklady jsme už vyčerpali.
Je to tedy podezřelé a další bádání ukáže, že oprávněně. Uvažujme na $A = \{1,2\}$ relace $\mathcal{R} = \bigl\{(1,2),(2,2)\bigr\}$ a $\mathcal{S} = \bigl\{(2,1),(2,2)\bigr\}$. Tyto relace jsou antisymetrické, ale $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \bigl\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\bigr\}$ není antisymetrická (shodou okolností je ale symetrická).
Pro tranzitivitu si důkaz zkusíte sami, abyste viděli, kde se zadrhne. Tradiční protipříklad, abyste věřili, že to nefunguje: $\mathcal{R} = \bigl\{(1,2),(3,4)\bigr\}$ a $\mathcal{S} = \bigl\{(2,3),(4,5)\bigr\}$ jsou relace tranzitivní (žádné navazující dvojice ani jedna z nich nemá, tudíž tranzitivita platí triviálně), složením ale dostaneme $\mathcal{T} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \bigl\{(1,3),(3,5)\bigr\}$, kde lze vytvořit řetízek $1\mathcal{T}3\mathcal{T}5$, který na jeden krok nezvládneme, dvojice $(1,5)$ v tom složení není.

Mocnině je speciální případ skládání a dá se doufat, že se bude i lépe chovat.

Věta 4c.11.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A.
(i) Jestliže je $\mathcal{R}$ reflexivní, pak je také $\mathcal{R}^n$ reflexivní pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Jestliže je $\mathcal{R}$ symetrická, pak je také $\mathcal{R}^n$ symetrická pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
(iii) Jestliže je $\mathcal{R}$ tranzitivní, pak je také $\mathcal{R}^n$ tranzitivní pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz (drsný, poučný)**:** (i): Typický přístup by byl indukcí pomocí faktu 4c.10, ale existuje zajímavá alternativa, viz cvičení 4c.7.
Zbývající důkazy budou silně založeny na lemma 4a.10 o řetízcích.
(ii): Nechť $a,b \in A$ splňují $a\mathcal{R}^n b$. Pak existuje řetízek $a = c_0\mathcal{R}c_1\mathcal{R}c_2\mathcal{R}\cdots\mathcal{R}c_{n-1}n\mathcal{R}c_n = b$ délky n z a do b. Protože je $\mathcal{R}$ symetrická, lze všechny dvojice $c_{i-1}\mathcal{R}c_i$ obrátit na $c_i\mathcal{R}c_{i-1}$ a dostaneme řetízek $b = c_n\mathcal{R}c_{n-1}\mathcal{R}\cdots\mathcal{R}c_1\mathcal{R}c_0 = a$ délky n z b do a, proto $b\mathcal{R}^n a$.
(iii): Nechť $a,b,c \in A$ splňují $a\mathcal{R}^n b$ a $b\mathcal{R}^n c$. Pak existuje řetízek $a = \hat{c}_0\mathcal{R}\hat{c}_1\mathcal{R}\cdots\mathcal{R}\hat{c}_n = b$ délky n z a do b a řetízek $b = \tilde{c}_0\mathcal{R}\tilde{c}_1\mathcal{R}\cdots\mathcal{R}\tilde{c}_n = c$ délky n z b do c. Protože $\hat{c}_n = b = \tilde{c}_0$, lze tyto řetízky navázat a dostaneme řetízek délky $2n$, $a = \hat{c}_0\mathcal{R}\hat{c}_1\mathcal{R}\cdots\mathcal{R}\hat{c}_n\mathcal{R}\tilde{c}_1\mathcal{R}\tilde{c}_2\mathcal{R}\cdots\mathcal{R}\tilde{c}_n = c$.

Tento řetízek obsahuje celkem $2n$ relací, proto jej lze rozdělit na dvojice $a\mathcal{R}\hat{c}_1\mathcal{R}\hat{c}_2$, $\hat{c}_2\mathcal{R}\hat{c}_3\mathcal{R}\hat{c}_4, \dots, \tilde{c}_{n-2}\mathcal{R}\tilde{c}_{n-1}\mathcal{R}c$. Na každou z nich aplikujeme tranzitivitu a dostaneme n dvojic $a\mathcal{R}\hat{c}_2$, $\hat{c}_2\mathcal{R}\hat{c}_4, \dots, \tilde{c}_{n-2}\mathcal{R}c$. Ty tvoří řetízek z a do c délky n, proto $a\mathcal{R}^n c$.

Poznámka: Doporučujeme čtenáři, aby si rozmyslel, jak to zkracování probíhá v místě, kde se napojují původní dva řetízky, je třeba rozlišit případy n sudé a n liché.

□

Antisymetrie se mocninou zachovat nemusí. Uvažujme relaci $\mathcal{R} = \bigl\{(1,2),(2,4),(4,3),(3,1)\bigr\}$ na $A = \{1,2,3,4\}$. Tato relace je antisymetrická. Snadno se ale nahlédne, že $\mathcal{R}\circ\mathcal{R} = \mathcal{R}^2 = \bigl\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\bigr\}$, což není antisymetrická relace.

V první sekci jsme definovali součinové uspořádání na kartézském součinu. Je snadné ukázat, že pokud mají všechny relace $\mathcal{R}_i$ nějakou z vyšetřovaných vlastností, tak ji má příslušná součinová relace také.

věta 4c.12.
Nechť $n \in \mathbb{N}$, pro $i = 1, \dots, n$ nechť $\mathcal{R}_i$ je relace na množině A_i. Uvažujme odpovídající součinovou relaci $\mathcal{R}$ na $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Pak platí:
(i) Jestliže jsou pro všechna $i = 1, \dots, n$ relace $\mathcal{R}_i$ reflexivní, pak je také $\mathcal{R}$ reflexivní.
(ii) Jestliže jsou pro všechna $i = 1, \dots, n$ relace $\mathcal{R}_i$ symetrické, pak je také $\mathcal{R}$ symetrická.
(iii) Jestliže jsou pro všechna $i = 1, \dots, n$ relace $\mathcal{R}_i$ antisymetrické, pak je také $\mathcal{R}$ antisymetrická.
(iv) Jestliže jsou pro všechna $i = 1, \dots, n$ relace $\mathcal{R}_i$ tranzitivní, pak je také $\mathcal{R}$ tranzitivní.

Důkaz (rutinní)**: R**: Nechť $(a_i) = (a_1, \dots, a_n) \in A$. Protože jsou všechna $\mathcal{R}_i$ reflexivní, tak $a_i\mathcal{R}_i a_i$ pro všechna i, tedy dle definice součinové relace $(a_i)\mathcal{R}(a_i)$.

Ostatní tři vlastnosti s důvěrou přenecháme čtenáři, viz cvičení 4c.8.

□

4c.13 Uzávěry relace

Tato sekce je spíš doplňková, ale na druhou stranu občas docela zábavná. Je to také dobrý trénink čtení matematiky, protože definice uzávěru obsahuje nápady, které jsme tu ještě neměli.

Základní situace je jednoduchá. Máme relaci, která nesplňuje určitou vlastnost a nás to mrzí. Mohli bychom ji pozměnit a tím již žádanou vlastnost dostat?

Protože nechceme ztratit informaci v relaci obsaženou, nebudeme z ní chtít odebírat dvojice. V řadě aplikací ale nevadí, když do relace nějaké dvojice přidáme. Například pokud relace není reflexivní, tak jí chybí některá z dvojic (a,a), což vyloženě volá po tom, abychom je doplnili.

Protože nechceme původní relaci příliš měnit, snažíme se přidat co nejméně dvojic. Co tedy chceme? Máme-li relaci $\mathcal{R}$ a vlastnost P, tak chceme najít relaci $\mathcal{S}$, která v sobě zahrnuje $\mathcal{R}$, splňuje P a navíc je to nejmenší relace, která to umí. Jak se tento požadavek vyjádří matematičtinou? Existuje na to standardní postup.

Definice.
Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na množině A. Je-li P některá z vlastností relace, pak definujeme P-**uzávěr** relace $\mathcal{R}$ jako relaci $\mathcal{S}$, která
(i) splňuje $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$,
(ii) má vlastnost P a
(iii) kdykoliv je $\mathcal{T}$ relace s vlastností P splňující $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$, pak nutně $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$.

Ne všechny vlastnosti se dají získat přes uzávěr, například pro vytvoření antisymetrické relace z nějaké $\mathcal{R}$ bychom spíš potřebovali z $\mathcal{R}$ prvky odebírat než přidávat. Antisymetrický uzávěr bychom tedy sice definovat mohli, ale pak bychom museli konstatovat, že obecně neexistuje. Soustředíme se tedy na uzávěry reflexivní, symetrický a tranzitivní.

Mějme nějakou relaci $\mathcal{R}$ na A. Abychom zajistili reflexivitu, musíme k ní přidat všechny možné dvojice (a,a). Pokud už nějaká v relaci je, tak tím nic nezkazíme. Přidáváme sjednocením, a všechny možné dvojice (a,a) pro $a \in A$ jsme už v minulé sekci shromáždili v diagonální relaci $\Delta(A)$.

Symetrie: Pokud chceme mít jistotu, že pro každé $(a,b) \in \mathcal{R}$ existuje v uzávěru i opačná dvojice (b,a), tak ji tam prostě přidáme. Opačné dvojice k těm z $\mathcal{R}$ už máme shromážděny v inverzní relaci $\mathcal{R}^{-1}$, takže se pro symetrický uzávěr nabízí kandidát $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$. Pak ovšem musíme ověřit symetrii pro tuto novou relaci, tedy budeme chtít

přítomnost (b,a) nejen pro dvojice $(a,b) \in \mathcal{R}$, ale pro (a,b) z celé nové relace $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$. Jak uvidíme níže, nebude to problém.
Při testování tranzitivity bereme všechny možné dvojkroky $(a,b),(b,c) \in \mathcal{R}$. Potřebujeme zajistit, aby se v relaci objevila dvojice (a,c), ale tu najdeme ve složené relaci $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}^2$, která vzniká právě z takovýchto dvojkroků. Určitě tedy budeme pracovat s relací $\mathcal{S} = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2$. Může to být hledaný uzávěr?
Jak testujeme tranzitivitu této relace? Vezmeme $(a,b),(b,c) \in \mathcal{S}$ a ptáme se, zda $\mathcal{S}$ obsahuje zkratku (a,c). Pokud by (a,b) a (b,c) ležely v $\mathcal{R}$, tak určitě $(a,c) \in \mathcal{S}$, tak jsme to zařídili. Jenže (a,b) či (b,c) mohou být jedny z těch dvojic, které jsme nově doplnili z $\mathcal{R}^2$, a o těch potřebné věci nevíme.
Například u relace $\mathcal{R} = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ chybí zkratky $(1,3)$ a $(2,4)$, ale když je doplníme, vznikne relace, ve které lze uvažovat dvojkrok $(1,3)$ a $(3,4)$, jehož zkratka $(1,4)$ v doplněné relaci zase chybí.
V dalším kole bychom se tedy měli podívat na tyto nově vzniklé páry a doplnit příslušné zkratky. Navazující původní a nový pár se najde jako prvek $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^2 = \mathcal{R}^3$, dva navazující nové páry se najdou jako prvky $\mathcal{R}^2 \circ \mathcal{R}^2 = \mathcal{R}^4$, takže i tyto musíme přidat. Tím ale mohly vzniknout nové páry atd. až do zblbnutí. Výsledný vzorec je nasnadě. Pokud vám něco připomíná, připomeňte si connectivity relation z první sekce.

Věta 4c.14.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A.
(i) Její **reflexivní uzávěr** (**reflexive closure**) je dán jako $\mathcal{R} \cup \Delta(A)$.
(ii) Její **symetrický uzávěr** (**symmetric closure**) je dán jako $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$.
(iii) Její **tranzitivní uzávěr** (**transitive closure**) je dán jako $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}^n$.

Rovnou si všimneme, že ve všech vzorcích přidáváme dvojice k původní relaci, takže první podmínka z definice uzávěru platí. Klíčové tedy bude dokázat další dvě podmínky: že uvedená relace má opravdu požadovanou vlastnost a že to nejde s menší relací, tedy že jakmile máme nějakou „nadrelaci“ dané $\mathcal{R}$ s vlastností P, tak už je ta naše v ní také.

Důkaz (poučný, drsný)**:** (i): $\Delta(A)$ je reflexivní a $\Delta(A) \subseteq \mathcal{R} \cup \Delta(A)$, proto je podle věty 4c.8 reflexivní i ta relace napravo.
Nechť $\mathcal{T}$ je reflexivní relace splňující $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$. Coby reflexivní relace $\mathcal{T}$ obsahuje všechny (a,a) pro $a \in A$, takže také $\Delta(A) \subseteq \mathcal{T}$ a proto $\mathcal{R} \cup \Delta(A) \subseteq \mathcal{T}$. Ukázali jsme, že $\mathcal{R} \cup \Delta(A)$ je nejmenší reflexivní nadrelace $\mathcal{R}$.
(ii): Relace $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ je symetrická, viz cvičení 4c.13.
Minimalita: Nechť $\mathcal{T}$ je nějaká symetrická relace, která obsahuje $\mathcal{R}$. Obsahuje i $\mathcal{R}^{-1}$?
Nechť $(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}$. Pak $(b,a) \in \mathcal{R}$, proto i $(b,a) \in \mathcal{T}$. Ale $\mathcal{T}$ je symetrická, proto i $(a,b) \in \mathcal{T}$. Ukázali jsme, že $\mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{T}$, spolu s $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$ to dává $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{T}$.
(iii): Označme $\mathcal{R}^* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}^n$. Pak zjevně $\mathcal{R} = \mathcal{R}^1 \subseteq \mathcal{R}^*$.
Je $\mathcal{R}^*$ tranzitivní? Předpokládejme, že $(a,b) \in \mathcal{R}^*$ a $(b,c) \in \mathcal{R}^*$. Pak existují $m,n \in \mathbb{N}$ takové, že $(a,b) \in \mathcal{R}^m$ a $(b,c) \in \mathcal{R}^n$. Podle lemma 4a.10 o řetízcích proto existuje řetízek $\tilde{c}_0,\dots,\tilde{c}_m$ délky m z a do b a existuje řetízek $\hat{c}_0,\dots,\hat{c}_n$ délky n z b do c. Protože $\tilde{c}_m = b = \hat{c}_0$, je možné tyto řetízky napojit. Definujeme $c_i = \tilde{c}_i$ pro $i = 0,\dots,m$ a $c_i = \hat{c}_{i-m}$ pro $i = m+1,\dots,m+n$. Je snadné ověřit, že pak $c_0,\dots,c_{m+n}$ tvoří řetízek délky $m+n$ z a do c a proto $(a,c) \in \mathcal{R}^{m+n} \subseteq \mathbb{R}^*$. $\mathcal{R}^*$ tedy je tranzitivní.
Je $\mathcal{R}^*$ minimální relace s touto vlastností? Nechť $\mathcal{T}$ je relace taková, že $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$ a $\mathcal{T}$ je tranzitivní. Dokážeme, že $\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{T}$.
Uvažujme $(a,b) \in \mathcal{R}^*$. Pak podle definice musí existovat $n \in \mathbb{N}$ takové, že $(a,b) \in \mathcal{R}^n$. Podle lemma 4a.10 pak musí existovat v relaci $\mathcal{R}$ řetízek $\{c_i\}$ délky n od a do n. Máme $(c_{i-1},c_i) \in \mathcal{R}$, podle $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$ tedy také $(c_{i-1},c_i) \in \mathcal{T}$. To znamená, že $\{c_i\}$ je řetízek od a do b v $\mathcal{T}$, která je tranzitivní, proto podle faktu 4b.2 platí $(a,b) \in \mathcal{T}$.

□

Další fakta o uzávěrech najdete ve cvičeních, jednoduché příklady jsou ve cvičení 4c.11. Pro jeden užitečný uzávěr se můžete podívat na cvičení 5a.14. Uzávěr a také (překvapivě) antisymetrie hrají významnou roli v kapitole 6, viz 6a.7.

Cvičení

Cvičení 4c.1 (poučné)**:** Dokažte:
a) Jestliže je $\mathcal{R}$ reflexivní relace na A a $\mathcal{S}$ relace z A do B, pak $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.
b) Jestliže je $\mathcal{R}$ relace z A do B a $\mathcal{S}$ reflexivní relace na B, pak $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.
c) Jestliže je $\mathcal{R}$ reflexivní relace na A, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^n$.

Cvičení 4c.2 (rutinní)**:** Nechť $\mathcal{R}$ je relace na A. Dokažte následující (viz věta 4c.5):
a) $\mathcal{R}$ je reflexivní právě tehdy, když je $\mathcal{R}^{-1}$ reflexivní.
b) $\mathcal{R}$ je symetrická právě tehdy, když je $\mathcal{R}^{-1}$ symetrická.
c) $\mathcal{R}$ je antisymetrická právě tehdy, když je $\mathcal{R}^{-1}$ antisymetrická.
Pro každou implikaci použijte elementární přímý důkaz, doporučujeme verzi „závěr jako cesta".

Cvičení 4c.3 (rutinní)**:** Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A, nechť $\mathcal{S}$ je restrikce $\mathcal{R}$ na nějakou $B \subseteq A$. Dokažte následující (viz věta 4c.7):
a) Jestliže je $\mathcal{R}$ reflexivní, pak je také $\mathcal{S}$ reflexivní.
b) Jestliže je $\mathcal{R}$ symetrická, pak je také $\mathcal{S}$ symetrická.
c) Jestliže je $\mathcal{R}$ antisymetrická, pak je také $\mathcal{S}$ antisymetrická.

Cvičení 4c.4 (rutinní)**:** Nechť $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ jsou relace na stejné množině A, přičemž $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$. Dokažte následující (viz věta 4c.8):
a) Jestliže je $\mathcal{R}$ reflexivní, pak je také $\mathcal{S}$ reflexivní.
b) Jestliže je $\mathcal{S}$ antisymetrická, pak je také $\mathcal{R}$ antisymetrická.
c) Vytvořte protipříklady ukazující, že s výjimkou (i) a (ii) se vlastnosti nemusejí přenášet od $\mathcal{R}$ na $\mathcal{S}$ či naopak.

Cvičení 4c.5 (rutinní, poučné)**:** Nechť $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ jsou relace na A. Dokažte následující (viz věta 4c.9):
a) Jestliže jsou $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ reflexivní, pak je také $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ reflexivní.
b) Jestliže jsou $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ reflexivní, pak je také $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ reflexivní.
c) Jestliže jsou $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ symetrické, pak je také $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ symetrická.
d) Jestliže jsou $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ symetrické, pak je také $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ symetrická.
e) Jestliže jsou $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ antisymetrické, pak je také $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ antisymetrická.
f) Jestliže jsou $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ tranzitivní, pak je také $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ tranzitivní.
g) Vytvořte protipříklady ukazující, že sjednocení nemusí zachovávat antisymetrii a tranzitivitu. Viz následující cvičení.

Cvičení 4c.6 (poučné)**:** Nechť $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ jsou relace na A.
a) Kde se zadrhne důkaz tvrzení „Jestliže jsou $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ tranzitivní, pak je také $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ tranzitivní"?
b) Kde se zadrhne důkaz tvrzení „Jestliže jsou $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ tranzitivní, pak je také $\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2$ tranzitivní"?

Cvičení 4c.7 (poučné)**:** Nechť $\mathcal{R}$ je relace na A. Dokažte, že jestliže je reflexivní, tak také $\mathcal{R}^n$ je reflexivní pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
Nápověda: Komu se nechce do indukce, podívá se na cvičení 4c.1 a větu 4c.8.

Cvičení 4c.8 (rutinní)**:** Nechť pro $i = 1, \dots, n$ je $\mathcal{R}_i$ relace na množině A_i. Nechť $\mathcal{R}$ je odpovídající součinová relace na $A = A_1 \times \cdots \times A_n$. Dokažte následující:
a) Jestliže jsou všechny $\mathcal{R}_i$ symetrické, pak je také $\mathcal{R}$ symetrická.
b) Jestliže jsou všechny $\mathcal{R}_i$ antisymetrické, pak je také $\mathcal{R}$ antisymetrická.
c) Jestliže jsou všechny $\mathcal{R}_i$ tranzitivní, pak je také $\mathcal{R}$ tranzitivní.
Viz věta 4c.12

Cvičení 4c.9 (poučné)**:** Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A.
a) Dokažte, že $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ a $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ jsou vždy symetrické relace.
b) Dokažte, že jestliže pro každé $a \in A$ existuje nějaké $b \in A$ takové, že $(a, b) \in \mathcal{R}$, pak je $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ reflexivní relace.
Najděte příklad, že $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ nemusí být reflexivní, i když je ta podmínka splněna.

Cvičení 4c.10 (dobré)**:** Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A, která je reflexivní a tranzitivní. Definujme relaci $\mathcal{S}$ na A předpisem $a\mathcal{S}b$ právě tehdy, jestliže $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$ (rozmyslete si, že $\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$).
Dokažte, že pak relace $\mathcal{S}$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
Poznámka: Tímto způsobem lze z relace $\leq$ vytvořit relaci $=$ na číslech.

Cvičení 4c.11 (rutinní)**:** Následující relace jsou definovány na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$:
a) Doplňte relaci $\mathcal{R}_1 = \{(1,1), (1,4), (2,1), (3,4)\}$ co nejúsporněji tak, aby byla tranzitivní (jinými slovy, přidejte k ní nějaké další dvojice tak, aby výsledná relace byla tranzitivní, a přitom se přidal nejmenší možný počet dvojic, kterým lze tranzitivity dosáhnout, viz 4c.13 uzávěr relace).
b) Doplňte relaci $\mathcal{R}_2 = \{(1,4), (1,3), (4,3), (2,2)\}$ co nejúsporněji tak, aby byla symetrická a tranzitivní.

Cvičení 4c.12 (poučné, dobré)**:** Nechť $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ jsou relace na stejné množině A. Předpokládejme, že pro obě existují uzávěry vzhledem k jisté vlastnosti P, označme je $\widehat{\mathcal{R}}$ a $\widehat{\mathcal{S}}$. Dokažte, že jestliže $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, pak $\widehat{\mathcal{R}} \subseteq \widehat{\mathcal{S}}$.

Cvičení 4c.13 (poučné)**:** Nechť $\mathcal{R}$ je nějaká relace na množině A. Dokažte, že $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ je symetrická relace.

Cvičení 4c.14 (poučné)**:** Nechť $\mathcal{R}$ je nějaká relace na množině A. Dokažte následující:
a) Pokud je $\mathcal{R}$ symetrická, antisymetrická či tranzitivní, pak reflexivní uzávěr musí mít stejnou vlastnost.
b) Pokud je $\mathcal{R}$ reflexivní, pak symetrický uzávěr uzávěr musí být reflexivní.
Pokuste se dokázat, že se přenáší i tranzitivita, najděte možný zádrhel a na jeho základě vytvořte protipříklad.
c) Pokud je $\mathcal{R}$ reflexivní či symetrická, pak tranzitivní uzávěr musí mít stejnou vlastnost.
Pokuste se dokázat, že se přenáší i antisymetrie, najděte možný zádrhel a na jeho základě vytvořte protipříklad.

Cvičení 4c.15 (poučné, dobré)**:** Dokažte, že symetrický uzávěr reflexivního uzávěru relace $\mathcal{R}$ je roven reflexivnímu uzávěru symetrického uzávěru $\mathcal{R}$.
Může pomoci věta 4c.14.

Cvičení 4c.16 (poučné, dobré)**:** Dokažte, že tranzitivní uzávěr symetrického uzávěru relace $\mathcal{R}$ obsahuje symetrický uzávěr tranzitivního uzávěru $\mathcal{R}$, ale nemusí se rovnat.
Může pomoci věta 4c.14.

Řešení:

4c.1: a) $(a,b) \in \mathcal{S}$. $\mathcal{R}$ reflex. $\longrightarrow (a,a) \in \mathcal{R} \longrightarrow a\mathcal{R}a\mathcal{S}b$, proto $(a,b) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.
b) $(a,b) \in \mathcal{R}$. $\mathcal{S}$ reflex. $\longrightarrow (b,b) \in \mathcal{S} \longrightarrow a\mathcal{R}b\mathcal{S}b$, proto $(a,b) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.
c) MI: (0) $n = 1$: Pak $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$, proto $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^1$. (1) $n \geq 1$: IP: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^n$. Díky reflexivitě $\mathcal{R}$ a b) také $\mathcal{R}^n \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^n = \mathcal{R}^{n+1}$, proto $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^{n+1}$.
4c.2: a) Nechť $\mathcal{R}$ reflexivní. Pro $a \in A$ pak $(a,a) \in \mathcal{R}$, proto po prohození prvků $(a,a) \in \mathcal{R}^{-1}$, $\mathcal{R}^{-1}$ je reflexivní.
Opačný směr: Nechť $\mathcal{R}^{-1}$ reflexivní. Pro $a \in A$ pak $(a,a) \in \mathcal{R}^{-1}$, proto po prohození prvků $(a,a) \in \mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ je reflexivní.
b) Nechť $\mathcal{R}$ je symetrická. Jestliže $(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}$, pak $(b,a) \in \mathcal{R}$, ze symetrie $\mathcal{R}$ pak $(a,b) \in \mathcal{R}$ a tedy $(b,a) \in \mathcal{R}^{-1}$. $\mathcal{R}^{-1}$ je symetrická.
Opačný směr: Nechť $\mathcal{R}^{-1}$ je symetrická. Jestliže $(a,b) \in \mathcal{R}$, pak $(b,a) \in \mathcal{R}^{-1}$, ze symetrie $\mathcal{R}^{-1}$ pak $(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}$ a tedy $(b,a) \in \mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ je symetrická.
c) Nechť $\mathcal{R}$ je antisymetrická. Jestliže $(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}$ a $(b,a) \in \mathcal{R}^{-1}$, pak $(b,a) \in \mathcal{R}$ a $(a,b) \in \mathcal{R}$, z antisymetrie $\mathcal{R}$ pak $a = b$. $\mathcal{R}^{-1}$ je antisymetrická.
Opačný směr: Nechť $\mathcal{R}^{-1}$ je antisymetrická. Jestliže $(a,b) \in \mathcal{R}$ a $(b,a) \in \mathcal{R}$, pak $(b,a) \in \mathcal{R}^{-1}$ a $(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}$, z antisymetrie $\mathcal{R}^{-1}$ pak $a = b$. $\mathcal{R}$ je antisymetrická.
4c.3: a) Nechť $a \in B$. Pak $a \in A$, proto $(a,a) \in \mathcal{R}$, a jelikož také $(a,a) \in B \times B$, tak $(a,a) \in \mathcal{S}$.
b) Nechť $a, b \in B$ jsou takové, že $(a,b) \in \mathcal{S}$. Protože $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$, pak $(a,b) \in \mathcal{R}$ a ze symetrie $\mathcal{R}$ dostaneme $(b,a) \in \mathcal{R}$. Ale také $(b,a) \in B \times B$, proto $(b,a) \in \mathcal{S}$.
c) Nechť $a, b \in B$ jsou takové, že $(a,b) \in \mathcal{S}$ a $(b,a) \in \mathcal{S}$. Protože $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$, pak $(a,b) \in \mathcal{R}$ a $(b,a) \in \mathcal{R}$, z antisymetrie $\mathcal{R}$ pak hned dostaneme $a = b$.
4c.4: a) $a \in A$ dle předp. $(a,a) \in \mathcal{R}$ dle dalšího $(a,a) \in \mathcal{S}$.
b) Nechť $(a,b) \in \mathcal{R}$ a $(b,a) \in \mathcal{R}$. Dle předp. pak $(a,b) \in \mathcal{S}$ a $(b,a) \in \mathcal{S}$, dle dalšího předp. $a = b$.
c) $A = \{1,2,3\}$. $\mathcal{R} = \{(1,1)\}$ je symetrická, antisymetrická a tranzitivní, nic z toho neplatí
pro $\mathcal{S} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3)\}$ ačkoliv $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$.
$\mathcal{S} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní, reflexivita a symetrie neplatí pro $\mathcal{R} = \{(1,2)\}$ a tranzitivita neplatí pro $\mathcal{R} = \{(1,2),(2,1)\}$, obě $\subseteq \mathcal{S}$.
4c.5: a) Nechť $a \in A$. $\mathcal{R}_1$ reflex tedy $(a,a) \in \mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ reflex tedy $(a,a) \in \mathcal{R}_2$, proto $(a,a) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$.
b) Nechť $a \in A$. $\mathcal{R}_1$ reflex tedy $(a,a) \in \mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.
c) Nechť $(a,b) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$. Pak $(a,b) \in \mathcal{R}_1 \wedge (a,b) \in \mathcal{R}_2$. Ze symetrie $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ bude $(b,a) \in \mathcal{R}_1$ a $(b,a) \in \mathcal{R}_2$, proto $(b,a) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$.
d) Nechť $(a,b) \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. Pak $(a,b) \in \mathcal{R}_1 \vee (a,b) \in \mathcal{R}_2$. Kdyby $(a,b) \in \mathcal{R}_1$, pak ze symetrie $\mathcal{R}_1$ bude $(b,a) \in \mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. Kdyby $(a,b) \in \mathcal{R}_2$, pak ze symetrie $\mathcal{R}_2$ bude $(b,a) \in \mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. Každopádně $(b,a) \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.
e) Nechť $(a,b) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ a $(b,a) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$. Pak $(a,b) \in \mathcal{R}_1 \wedge (b,a) \in \mathcal{R}_1$, z antisymetrie $\mathcal{R}_1$ tedy $a = b$.
Poznámka: Důkaz ukazuje, že stačí, aby jedna z $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ byla antisymetrická, a už je takový i průnik.
f) Nechť $(a,b) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ a $(b,c) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$. Pak $(a,b) \in \mathcal{R}_1 \wedge (b,c) \in \mathcal{R}_1$, z tranzitivity $\mathcal{R}_1$ tedy $(a,c) \in \mathcal{R}_1$. Podobně $(a,b) \in \mathcal{R}_2 \wedge (b,c) \in \mathcal{R}_2$, z tranzitivity $\mathcal{R}_2$ tedy $(a,c) \in \mathcal{R}_2$. Proto $(a,c) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$.
g) $\mathcal{R}_1 = \{(1,2)\}$, $\mathcal{R} = \{(2,1)\}$ na $A = \{1,2\}$. Obě jsou antisymetrické a tranzitivní, ale $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ není ani jedno.
Lze také vzít například $<$ a $>$ na $\mathbb{Z}$.

4c.6: a) Nechť $a,b,c\in A$ splňují $(a,b)\in\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2$ a $(b,c)\in\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2$. Pak $(a,b)\in\mathcal{R}_1$ nebo $(a,b)\in\mathcal{R}_2$, a $(b,c)\in\mathcal{R}_1$ nebo $(b,c)\in\mathcal{R}_2$. Abychom mohli použít tranzitivitu $\mathcal{R}_1$ či $\mathcal{R}_2$, museli bychom nějak zajistit, aby obě dvojice byly v $\mathcal{R}_1$ nebo obě v $\mathcal{R}_2$. To ale nedokážeme, tím je také inspirován protipříklad.
b) Nechť $a,b,c\in A$ splňují $(a,b)\in\mathcal{R}_1\setminus\mathcal{R}_2$ a $(b,c)\in\mathcal{R}_1\setminus\mathcal{R}_2$. Pak $(a,b)\in\mathcal{R}_1$ a $(b,c)\in\mathcal{R}_1$, proto dle tranzitivity $\mathcal{R}_1$ i $(a,c)\in\mathcal{R}_1$. Ještě potřebujeme $(a,c)\notin\mathcal{R}_2$, ale to neumíme zajistit. Víme jen, že $(a,b)\notin\mathcal{R}_2$ a $(b,c)\notin\mathcal{R}_2$, to ale nikterak nebrání (a,c) v tom, aby v $\mathcal{R}_2$ bylo. Zase je tímto insprován protipříklad v diskusi po větě 4c.9.
4c.7: $\mathcal{R}$ reflexivní, proto podle cvičení 4c.1 platí $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{R}^n$, proto podle věty 4c.8 je $\mathcal{R}^n$ reflexivní.
Alternativa indukcí: (0): $n=1$: jestliže je $\mathcal{R}$ reflexivní, tak $\mathcal{R}^1=\mathcal{R}$ je reflexivní.
(1): $n\in\mathbb{N}$, předpoklad $\mathcal{R}^n$ reflexivní. Podle věty 4c.10 je i $\mathcal{R}^n\circ\mathcal{R}=\mathcal{R}^{n+1}$ reflexivní.
4c.8: **S**: $(a_i)\mathcal{R}(b_i)\longrightarrow a_i\mathcal{R}_ib_i$ pro všechna i. Protože jsou všechny $\mathcal{R}_i$ symetrické, máme $b_i\mathcal{R}_ia_i$ pro všechna i, tedy $(b_i)\mathcal{R}(a_i)$. **A**: $(a_i)\mathcal{R}(b_i)$ a $(b_i)\mathcal{R}(a_i)\longrightarrow\forall i$: $a_i\mathcal{R}_ib_i$ a $b_i\mathcal{R}_ia_i$. Protože jsou všechny $\mathcal{R}_i$ antisymetrické, máme $a_i=b_i$ pro všechna i, tedy $(a_i)=(b_i)$. **T**: $(a_i)\mathcal{R}(b_i)$ a $(b_i)\mathcal{R}(c_i)\longrightarrow a_i\mathcal{R}_ib_i$ a $b_i\mathcal{R}_ic_i$ pro všechna i, z tranzitivit $\mathcal{R}_i$ tedy $a_i\mathcal{R}_ic_i$ pro všechna i, proto $(a_i)\mathcal{R}(c_i)$.
4c.9: a) Pro $\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{R}$: Nechť $(a,b)\in\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{R}$. Pak $\exists x\in A$ aby $(a,x)\in\mathcal{R}$ a $(x,b)\in\mathcal{R}^{-1}$. Odtud podle definice inverzní relace $(x,a)\in\mathcal{R}^{-1}\wedge(b,x)\in\mathcal{R}\longrightarrow(b,x)\in\mathcal{R}$ a $(x,a)\in\mathcal{R}^{-1}$, tedy $(b,a)\in\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{R}$.
Důkaz pro $\mathcal{R}\circ\mathcal{R}^{-1}$ je obdobný.
b) Nechť $a\in A$. Předpoklad $\exists b\in A$: $(a,b)\in\mathcal{R}$. Pak $(b,a)\in\mathcal{R}^{-1}$, máme $a\mathcal{R}b\mathcal{R}^{-1}a$, tedy $(a,a)\in\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{R}$.
Uvažujme $\mathcal{R}=\{(1,2),(2,2)\}$ na $A=\{1,2\}$. Pak $\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{R}=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ je reflexivní, ale $\mathcal{R}\circ\mathcal{R}^{-1}=\{(2,2)\}$ není.
4c.10: **R**: Pro $a\in A$ je díky reflexivitě $\mathcal{R}$ jak $a\mathcal{R}a$, tak $a\mathcal{R}a$ (opačné pořadí), proto $a\mathcal{S}a$.
S: Nechť $a\mathcal{S}b$. Pak podle definice $a\mathcal{R}b$ a $a\mathcal{R}^{-1}b$ neboli $b\mathcal{R}a$, proto také $b\mathcal{R}a$ a $a\mathcal{R}b$ neboli $b\mathcal{R}^{-1}a$ a tedy $b\mathcal{S}a$.
T: Nechť $a\mathcal{S}b$ a $b\mathcal{S}c$. Pak podle definice $a\mathcal{R}b$ a $a\mathcal{R}^{-1}b$ neboli $b\mathcal{R}a$ a také $b\mathcal{R}c$ a $b\mathcal{R}^{-1}c$ neboli $c\mathcal{R}a$. Jinými slovy, platí $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}c$, proto z tranzitivity $\mathcal{R}$ máme $a\mathcal{R}c$, podobně i $c\mathcal{R}a$ neboli $a\mathcal{R}^{-1}c$ a tedy $a\mathcal{S}c$.
4c.11: a) $\mathcal{R}_1\cup\{(2,4)\}$.
b) Tranzitivní už je. Doplníme na symetrickou relaci: $\mathcal{R}_2\cup\{(4,1),(3,1),(3,4)\}$. Tím se pokazila tranzitivita, tak ji spravíme: $\mathcal{R}_2\cup\{(4,1),(3,1),(3,4),(1,1),(3,3),(4,4)\}$. Podle cvičení 4c.14 c) už je i symetrická.
4c.12: $\widehat{\mathcal{R}}$ je nejmenší relace s vlastností P obsahující $\mathcal{R}$. Ale $\widehat{\mathcal{S}}$ má také P a obsahuje $\mathcal{R}$, proto z minimality $\widehat{\mathcal{R}}$ máme $\widehat{\mathcal{R}}\subseteq\widehat{\mathcal{S}}$.
4c.13: Nechť $(a,b)\in\mathcal{R}\cup\mathcal{R}^{-1}$. Pak $(a,b)\in\mathcal{R}\vee(a,b)\in\mathcal{R}^{-1}$. Když $(a,b)\in\mathcal{R}$, tak $(b,a)\in\mathcal{R}^{-1}\subseteq\mathcal{R}\cup\mathcal{R}^{-1}$. Když $(a,b)\in R^{-1}$, tak $(b,a)\in\mathcal{R}\subseteq\mathcal{R}\cup\mathcal{R}^{-1}$. Proto každopádně $(b,a)\in\mathcal{R}\cup\mathcal{R}^{-1}$.
4c.14: a) Reflexivní uzávěr je $\mathcal{S}=\mathcal{R}\cup\Delta(A)$.
$\mathcal{R}$ symetrická: Nechť $(a,b)\in\mathcal{S}$. Pokud $(a,b)\in\Delta(A)$, pak $a=b$ a $(b,a)=(a,b)\in\mathcal{S}$. Jinak $(a,b)\in\mathcal{R}$ a ze symetrie $(b,a)\in\mathcal{R}\subseteq\mathcal{S}$.
$\mathcal{R}$ antisymetrická: Nechť $(a,b)\in\mathcal{S}$ a $(b,a)\in\mathcal{S}$. Pokud $(a,b)\in\Delta(A)$ nebo $(b,a)\in\Delta(A)$, pak $a=b$ hotovo. Jinak $(a,b)\in\mathcal{R}$ a $(b,a)\in\mathcal{R}$ a z antisymetrie $a=b$.
$\mathcal{R}$ trazitivní: Nechť $(a,b)\in\mathcal{S}$ a $(b,c)\in\mathcal{S}$. Pokud $(a,b)\in\Delta(A)$, pak $a=b$ a tedy $(a,c)=(b,c)\in\mathcal{S}$. Pokud $(b,c)\in\Delta(A)$, pak $b=c$ a tedy $(a,c)=(a,b)\in\mathcal{S}$. Jinak $(a,b)\in\mathcal{R}$ a $(b,c)\in\mathcal{R}$ a z tranzitivity $(a,c)\in\mathcal{R}\subseteq\mathcal{S}$.
b) Symetrický uzávěr je $\mathcal{S}=\mathcal{R}\cup\mathcal{R}^{-1}$.
$\mathcal{R}$ reflexivní: Nechť $a\in A$. Pak $(a,a)\in\mathcal{R}\subseteq\mathcal{S}$.
$\mathcal{R}$ trazitivní: Nechť $(a,b)\in\mathcal{S}$ a $(b,c)\in\mathcal{S}$. Pokud $(a,b)\in\mathcal{R}$ a $(b,c)\in\mathcal{R}$, pak lze použít tranzitivita. Pokud $(a,b)\in\mathcal{R}^{-1}$ a $(b,c)\in\mathcal{R}^{-1}$, pak lze použít tranzitivita $\mathcal{R}^{-1}$, která vyplývá z tranzitivity $\mathcal{R}$ (věta 4c.5).
Ale co když $(a,b)\in\mathcal{R}$ a $(b,c)\in\mathcal{R}^{-1}$ nebo naopak?
Protipříklad: $A=\{1,2\}$, $\mathcal{R}=\{(1,2)\}$. Pak $\mathcal{R}\cup\mathcal{R}^{-1}=\{(1,2),(2,1)\}$, k tranzitivitě chybí $(1,1)$ a $(2,2)$.
c) Tranzitivní uzávěr je $\mathcal{S}=\bigcup\mathcal{R}^n$. $\mathcal{R}$ reflexivní: $a\in A$. Pak $(a,a)\in\mathcal{R}=\mathcal{R}^1\subseteq\mathcal{S}$.
$\mathcal{R}$ symetrická: Podle věty 4c.11 jsou symetrické i mocniny $\mathcal{R}^n$. Nechť $(a,b)\in\mathcal{S}$. Pak $\exists n$: $(a,b)\in\mathcal{R}^n$, proto také $(b,a)\in\mathcal{R}^n\subseteq\mathcal{S}$.
$\mathcal{R}$ antisymetrická: Nechť $(a,b)\in\mathcal{S}$ a $(b,a)\in\mathcal{S}$. Pak $\exists m,n$: $(a,b)\in\mathcal{R}^n$ a $(b,a)\in\mathcal{R}^m$. Odtud se neumíme dostat k $(a,b)\in\mathcal{R}$ a $(b,a)\in\mathcal{R}$.
Protipříklad: $A=\{1,2,3\}$, $\mathcal{R}=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$. Pak $(1,3)\in\mathcal{R}^2\subseteq\mathcal{S}$, $(3,1)\in\mathcal{R}\subseteq\mathcal{S}$.
4c.15: Uzávěry viz věta 4c.14: $(\Delta\cup\mathcal{R})\cup(\Delta\cup\mathcal{R})^{-1}=\Delta\cup\mathcal{R}\cup\Delta^{-1}\cup\mathcal{R}^{-1}=(\Delta\cup\Delta^{-1})\cup(\mathcal{R}\cup\mathcal{R}^{-1})=\Delta\cup(\mathcal{R}\cup\mathcal{R}^{-1})$. Využila se věta 4a.7 a $\Delta(A)^{-1}=\Delta(A)$.
4c.16: Je-li (a,b) v symetrickém uzávěru tranzitivního, pak je (a,b) v tranzitivním nebo (b,a) v tranzitivním. Proto existuje řetízek nějaké délky z a do b v $\mathcal{R}$, ten je pak i v symetrickém uzávěru $\mathcal{R}$, nebo existuje řetízek z b do a v $\mathcal{R}$, pak otočením řetízek z a do b v R^{-1}, tedy i v symetrickém uzávěru, každopádně existuje řetízek z a do b v symetrickém uzávěru a proto (a,b) v tranzitivním uzávěru symetrického.
$\mathcal{R}=\{(1,2)\}$ na $A=\{1,2\}$, tranzitivní uzávěr symetrického je $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$, symetrický uzávěr tranzitivního je $\{(1,2),(2,1)\}$.

4d. Bonus: Další vlastnosti relací

Probrali jsme vlastnosti, které se používají nejčastěji, ale jsou i další. Ukážeme několik populárnějších.

Definice.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A.
Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **antireflexivní** či **ireflexivní** (**irreflexive**), jestliže
pro všechna $a \in A$ platí $(a,a) \notin \mathcal{R}$.
Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **asymetrická** (**asymetric**), jestliže
pro všechna $a,b \in A$ platí implikace $(a,b) \in \mathcal{R} \implies (b,a) \notin \mathcal{R}$.
Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **dichotomická** (**dichotomic**), jestliže
pro všechna $a,b \in A$ platí $(a,b) \in \mathcal{R} \vee (b,a) \in \mathcal{R}$.
Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **trichotomická** (**trichotomic**), jestliže
pro všechna $a,b \in A$ platí právě jedna z možností $(a,b) \in \mathcal{R}$, $(b,a) \in \mathcal{R}$, $a = b$.
Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **cirkulární** (**circular**), jestliže
pro všechna $a,b,c \in A$ platí implikace $[(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{R}] \implies (c,a) \in \mathcal{R}$.

Antireflexivní relace nejsou opakem reflexivních, jsou opakem zahnaným do extrému. Na to, aby relace nebyla reflexivní, stačí jediná chybějící dvojice (a,a). Antireflexivita to bere od podlahy a rovnou zakáže všechny takovéto dvojice. Typickým příkladem je relace $<$ na číslech. Náhodně vytvořená relace bude mít s vysokou pravděpodobností jen některé z dvojic (a,a), takže nebude ani reflexivní, ani antireflexivní.
Asymetrii někteří autoři říkají silná antisymetrie. Protože zakazuje obousměrné šipky, tak již implikuje antisymetrii (takže asymetrie je silnější vlastnost než antisymetrie). Dále se všimněte, že pokud by existovalo $(a,a) \in \mathcal{R}$, tak to už poruší podmínku asymetrie. Tato vlastnost tedy zakazuje smyčky. Dostáváme tak jeden směr v následujícím faktu.

Fakt 4d.1.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A. Je asymetrická právě tehdy, pokud je antisymetrická a antireflexivní.

Druhý směr vyplyne stejně snadno a zkuste si jej rozmyslet.
Mezi antisymetrií a asymetrií je zajímavá souvislost, kterou vyjádříme v tvrzení, které se nám bude hodit později. Zkuste si při jeho čtení představovat nerovnosti $\leq$ (antisymetrie) a $<$ (asymetrie).

Fakt 4d.2.
Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na množině A.
(i) Nechť $\mathcal{R}$ je antisymetrická. Definujme relaci $\mathcal{S}$ tímto předpisem: $a\mathcal{S}b$ jestliže $a\mathcal{R}b$ ale $a \neq b$. Pak je $\mathcal{S}$ asymetrická.
(ii) Nechť $\mathcal{R}$ je asymetrická. Definujme relaci $\mathcal{S}$ tímto předpisem: $a\mathcal{S}b$ jestliže $a\mathcal{R}b$ nebo $a = b$. Pak je $\mathcal{S}$ antisymetrická a reflexivní.

Formálně řečeno, v (i) je $\mathcal{S} = \mathcal{R} \setminus \Delta(A)$, ve (ii) je $\mathcal{S} = \mathcal{R} \cup \Delta(A)$. Důkaz necháváme jako cvičení 4d.1. Pro další detaily viz věta 6a.2.

Někdy potřebujme relaci přinutit, aby vytvářela hodně spojení. Konkrétní požadavek záleží na okolnostech, v definici vidíme dva možné přístupy.
Dichotomie je vlastnost, která zaručí vzájemnou propojenost všech prvků množiny, ale neřeší, jakým způsobem, hlavně aby tam něco bylo. Všimněte si, že v podmínce lze zvolit i $a = b$, takže dichotomie už vynutí reflexivitu. Dobrým příkladem je relace $\leq$ na číslech.
I trichotomie vynucuje propojení prvků, ale zároveň je zvědavá, jak se to dělá. Všimněte si, že dvojice a, b splňující $a = b$ již splňuje jednu z podmínek, proto z té trojice nesmí platit nic dalšího neboli neplatí $a\mathcal{R}a$; triochotomické relace jsou tedy antireflexivní. Také zakážeme oboustranné šipky mezi různými prvky, jde tedy o relaci asymetrickou, proto i antisymetrickou. Typickým příkladem je relace $<$ na číslech.
Pro příklad relace, která není dichotomická ani trichotomická, stačí vzít dělitelnost na $\mathbb{Z}$, pak čísla $a = 3$ a $b = 5$ nejsou spojena žádnou šipkou.
Někteří autoři mají jinou definici trichotomie, používají v definici obyčejnou disjunkci, takže připouštějí, že z těch tří možností platí i více najednou. Je v tom trochu zmatek.
K poblematice vynucování spojení se vrátíme v kapitole 6b.

Definice cirkulární relace vypadá na první pohled jako tranzitivita, ale při bližším pohledu vidíme, že dvojkroky se nemají zkracovat, ale uzavírat do cyklů. Na ty narazíme v kapitolách 5 a 6, viz například cvičení 5a.15.

Existuje samozřejmě mnohem více roztodivných vlastností, ale to už jsou specializované věci. Uveďme jednu na ukázku: Relace $\mathcal{R}$ se nazývá hustá, jestliže pro libovolné x, z splňující $x\mathcal{R}z$ existuje nějaké y takové, že $x\mathcal{R}y\mathcal{R}z$. Třeba relace $<$ je hustá na $\mathbb{Q}$ či $\mathbb{R}$, ale na $\mathbb{Z}$ už hustá není, protože $13 < 14$ a mezi nimi už další prvek není.

4d.3 n-ární relace

Toto je jen rychlý pohled, aby čtenář věděl, že není třeba končit u binárního.

Definice.
Nechť $A_1, \dots, A_n$ jsou množiny. Libovolná podmnožina $\mathcal{R} \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ se nazývá **n-ární relace** na těchto množinách.
Číslu n říkáme **stupeň** této relace či její **arita**.

Consider sets $A_1, \dots, A_n$. By an **n-ary relation** on these sets we mean any subset of $A_1 \times \cdots \times A_n$.
The number n is called the **degree** of this relation.

Takovéto relace nám umožňují reprezentovat vztahy mezi více objekty.

Příklad 4d.a: Nechť A je množina všech studentů na fakultě, dále $B = \{\mathrm{Bc}, \mathrm{MSc}, \mathrm{Ph.D.}\}$, $D = \{1, 2, 3, 4\}$. Pak lze studentskou populaci popsat relací $\mathcal{R}$ arity 3 definovanou takto: $(a, b, c) \in \mathcal{R}$ právě tehdy, jestiže student a studuje v programu b a je v ročníku c.
$\triangle$

Jak příklad jemně naznačuje, tyto relace se používají při práci s databázemi. Volba vhodného modelu silně ovlivní, jak rychle databáze reaguje na možné požadavky (a které je vůbec schopna splnit). Jedním z používaných modelů je právě relační model.
Toto použití pak inspiruje operace, které definujeme. Určitě budeme chtít operaci, která umožní vybírat dle parametru, čímž vznikne podrelace (například z relace studentů chceme podrelaci, která zahrnuje jen studenty programu BSc). Je možno dělat tzv. projekce, což v zásadě znamená, že z relace vynecháme některou složku (například můžeme vytvořit relaci, která nezahrnuje program, jen ročník), relace se dají spojovat a podobně. To už je ale spíše téma pro kurs databází.

Cvičení

Cvičení 4d.1: Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na množině A. Dokažte následující.
a) Jestliže je $\mathcal{R}$ antisymetrická, tak je relace $\mathcal{S} = \mathcal{R} \setminus \Delta(A)$ asymetrická.
b) Jestliže je $\mathcal{R}$ asymetrická, tak je relace $\mathcal{S} = \mathcal{R} \cup \Delta(A)$ antisymetrická.
Viz fakt 4d.2.

Cvičení 4d.2 (poučné, dobré)**:** Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A. Dokažte, že jestliže je $\mathcal{R}$ antireflexivní a tranzitivní, tak už je asymetrická (a proto i antisymetrická).
Nápověda: Důkaz sporem jde docela pěkně.

Řešení:

Cvičení 4d.1: a) Uvažujme $(a, b) \in \mathcal{S}$. Sporem: Kdyby platilo $(b, a) \in \mathcal{S}$, pak díky $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ také $(b, a) \in \mathcal{R}$, také $(a, b) \in \mathcal{R}$. Protože $\Delta(A) \cap \mathcal{S} = \emptyset$, nemůže být $a = b$. Dvojice a, b je tedy protipříkladem na antireflexivitu $\mathcal{R}$, což je spor s předpokladem.
b) Mějme a, b takové, že $(a, b) \in \mathcal{S}$ a $(b, a) \in \mathcal{S}$. Pokud $(a, b) \in \Delta(A)$, tak $a = b$. Pokud $(a, b) \in \mathcal{R}$, pak dle asymetrie $(b, a) \notin \mathcal{R}$, ale $(b, a) \in \mathcal{R} \cup \Delta(A)$. Proto nutně $(b, a) \in \Delta(A)$ a tedy zase $a = b$. Antisymetrie $\mathcal{S}$ dokázána.
4d.2: Předpoklad: $\mathcal{R}$ je antisymetrická, tranzitivní a není asymetrická. Proto $\exists a, b \in A$ tak, že $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$. Tranzitivita pak dává $a\mathcal{R}a$, což je ve sporu s antireflexivitou.

4e. Bonus: Reprezentace relací maticemi

Příklad 4e.a (pokračování 4a.c)**:** Připomeňme relaci

$$\mathcal{R} = \{(F,c),(F,e),(M,c),(M,d),(P,c),(P,d)\}$$

z $A = \{F,M,P,S\}$ do $B = \{c,d,e\}$.
Tato relace se dá také zachytit tabulkou, například takto:

	cestování	diskrétka	elfština
Frodo	×		×
Merry	×	×	
Pippin	×	×	
Sam			

△

Tabulka ovšem není matematický objekt. Může nám ale jeden připomenout: matici. Když nahradíme prázdná pole nulami a křížky jedničkami a vynecháme vysvětlující řádek a sloupec, už ji skoro máme. Abychom ovšem informaci z takové matice uměli převést zpět na informaci o dvojicích, musíme mít pevně určeno pořadí prvků v množinách A a B.

Definice.
Nechť $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ a $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ jsou množiny. Pro relaci $\mathcal{R}$ z A do B definujeme **matici relace** $M_{\mathcal{R}} = (m_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ předpisem

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in \mathcal{R}; \\ 0, & (a_i, b_j) \notin \mathcal{R}. \end{cases}$$

Příklad 4e.b (pokračování 4a.c)**:** Vrátíme se k naší malé třídě. Pokud zachováme přirozené pořadí studentů $A = \{F,M,P,S\}$ a předmětů $B = \{c,d,e\}$, pak se diskutovaná relace zachytí maticí $M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

△

Je zjevné, že když máme relaci na množině A (tedy z A do A), tak bude její matice čtvercová. V takovém případě je dobrým zvykem používat stejné pořadí prvků v A pro řádky i sloupce (ačkoliv to definice nevyžaduje).

Všimněte si, že hodnota prvku a_{ij} je rovna logické hodnotě výroku „$(a_i, b_j) \in \mathcal{R}$“. Je tedy vhodnější nevidět tyto matice jako číselné, ale vnímat je jako logické.

Definice.
Jako **Booleanovské matice** budeme označovat matice, které mají pouze prvky 1 či 0 a chápeme je jako obvyklé logické hodnoty (true/false).

By a **Boolean matrix** we mean a matrix whose elements are only 1 or 0 and these are understood to represent the usual logical values (true/false).

Někteří autoři takovýmto maticím říkají „01-matice“ (zero-one matrix).
Matice si rozumějí s operacemi, které jsme probrali.

Fakt 4e.1.
Nechť A, B jsou konečné množiny s pevně zvoleným pořadím prvků. Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ z A do B s reprezentující maticí $M_{\mathcal{R}}$.
(i) Relace $\mathcal{R}^{-1}$ je reprezentovaná transponovanou maticí $M_{\mathcal{R}}{}^T$.
(ii) Relace $\overline{\mathcal{R}}$ je reprezentovaná maticí s prvky $m_{\overline{\mathcal{R}},ij} = 1 - m_{\mathcal{R},ij}$.

Důkaz (rutinní)**:** (i): Předpokládejme, že $|A| = n$ a $|B| = m$, takže $M_{\mathcal{R}}$ je matice $n \times m$. Relace $\mathcal{R}^{-1}$ jde z B do A, proto bude mít její matice rozměr $m \times n$, což $M_{\mathcal{R}}{}^T$ má. Teď ukážeme shodnost prvků matic.
Protože matice $M_{\mathcal{R}}{}^T$ a $M_{\mathcal{R}^{-1}}$ obsahují pouze jedničky a nuly, tak stačí dokázat, že se shodují jedničky; nuly pak budou automaticky také souhlasit. Takže:

$$m_{\mathcal{R}^{-1},ij} = 1 \iff (b_i, a_j) \in \mathcal{R}^{-1} \iff (a_j, b_i) \in \mathcal{R} \iff m_{\mathcal{R},ji} = 1 \iff m^T_{\mathcal{R},ij} = 1.$$

Důkaz (ii) je snadný a necháme jej jako cvičení 4e.2.

□

Prvky matice $M_{\overline{\mathcal{R}}}$ jsou vlastně logickými negacemi prvků z matice $M_{\mathcal{R}}$. Nabízí se zavést značení $\neg M$, což by byla operace, která zneguje všechny prvky M. Není to ale zvykem. Pro další základní logické operace už značení jsou.

Definice.
Nechť M, N, P jsou Booleanovské matice typu $n \times m$.
Řekneme, že P je **join** matic M a N, značeno $P = M \vee N$, jestliže $p_{ij} = m_{ij} \vee n_{ij}$ pro všechna i, j.
Řekneme, že P je **meet** matic M a N, značeno $P = M \wedge N$, jestliže $p_{ij} = m_{ij} \wedge n_{ij}$ pro všechna i, j.

Není těžké ukázat, že se tyto operace jsou komutativní a asociativní a spojuje je distributivní zákon:
- $M \vee N = N \vee M$, $M \wedge N = N \wedge M$;
- $(M \vee N) \vee P = M \vee (N \vee P)$, $(M \wedge N) \wedge P = M \wedge (N \wedge P)$;
- $M \wedge (N \vee P) = (M \wedge N) \vee (M \wedge P)$, $M \vee (N \wedge P) = (M \vee N) \wedge (M \vee P)$.

Databázové systémy (třeba SAP) mívají tyto operace implementovány.

Fakt 4e.2.
Nechť A, B jsou konečné množiny. Nechť $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ jsou relace z A do B s maticemi M_1, M_2. Pak $M_1 \wedge M_2$ je matice relace $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ a $M_1 \vee M_2$ je matice relace $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.

Důkaz je velmi snadný. Zbývá nám skládání relací, na to potřebujeme ještě jednu operaci.

Definice.
Nechť M je Booleanovská matice typu $m \times k$ a N je Booleanovská matice typu $k \times n$. Definujeme **Booleanovský součin** (**Boolean product**) těchto matic jako matici $P = M \odot N$ typu $m \times n$ danou

$$p_{ij} = (m_{i1} \wedge n_{1j}) \vee (m_{i2} \wedge n_{2j}) \vee \ldots \vee (m_{ik} \wedge n_{kj}).$$

Všimněte si, že je to vlastně stejný vzorec jako pro běžné maticové násobení, jen se místo násobení dala konjunkce a místo sčítání disjunkce.

Věta 4e.3.
Nechť A, B, C jsou konečné množiny s pevně zvoleným pořadím prvků. Nechť $\mathcal{R}$ je relace z A do B s maticí $M_{\mathcal{R}}$ a $\mathcal{S}$ je relace z B do C s maticí $M_{\mathcal{S}}$. Pak $M_{\mathcal{R}} \odot M_{\mathcal{S}}$ je matice relace $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Důkaz (z povinnosti)**:** Předpokládejme, že $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$, $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$. Pak $M_{\mathcal{R}}$ je matice $n \times k$ a $M_{\mathcal{S}}$ je matice $k \times m$, proto má smysl je násobit v pořadí $M_{\mathcal{R}} \odot M_{\mathcal{S}}$. Dále máme $m_{\mathcal{R},il} = 1$ jestliže $a_i \mathcal{R} b_l$ a $m_{\mathcal{S},lj} = 1$ jestliže $b_l \mathcal{S} c_j$.
Ukážeme, že $M_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} = M_{\mathcal{R}} \odot M_{\mathcal{S}}$. Protože jde o Booleanovské matice, stačí ukázat, že obě matice mají 1 na stejných místech.
Vezměme prvek m_{ij} matice $M_{\mathcal{R}} \odot M_{\mathcal{S}}$. Tento prvek je 1 právě tehdy, jestliže je

$$(m_{\mathcal{R},i1} \wedge m_{\mathcal{S},1j}) \vee (m_{\mathcal{R},i2} \wedge m_{\mathcal{S},2j}) \vee \ldots \vee (m_{\mathcal{R},ik} \wedge m_{\mathcal{S},kj}) = 1.$$

Jde o logickou disjunkci mnoha členů, ta je rovna jedné právě tehdy, když existuje $l \in \{1, \ldots, k\}$ takové, že $m_{\mathcal{R},il} \wedge m_{\mathcal{S},lj} = 1$. To je podle definice těchto matic právě tehdy, pokud $\exists b_l \in B$: $(a_i \mathcal{R} b_l \wedge b_l \mathcal{S} c_j)$. Toto zase nastane právě tehdy, pokud $(a_i, c_j) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, což je právě tehdy, pokud $m_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R},ij} = 1$. Rovnost matic je dokázána. $\square$

Booleanovský součin je tedy ta správná operace. Má všechny vlastnosti jako běžné maticové násobení:
- $(M \odot N) \odot P = M \odot (N \odot P)$;
- $M \odot (N \wedge P) = (M \odot N) \wedge (M \odot P)$ a $M \odot (N \vee P) = (M \odot N) \vee (M \odot P)$;
- není obecně komutativní.

Dokonce má i jednotkový prvek, jmenovitě standardní jednotkovou $n \times n$ matici $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Platí tedy následující:

• Jestliže je M nějaká Booleanovská matice typu $n \times m$, pak $M \odot E_m = E_n \odot M = M$.
Mimochodem, matice E_n je matice odpovídající diagonální relaci $\Delta(A)$ na libovolné n-prvkové množině A.
Dá se také indukcí zavést Booleanovská mocnina matice předpisem $M^{[1]} = M$ a $M^{[n+1]} = M \odot M^{[n]}$ pro $n \in \mathbb{N}$, načež dostaneme $M_{\mathcal{R}^n} = M_{\mathcal{R}}^{[n]}$.

Z pohledu matematiky tedy do sebe všechno krásně zapadá. Z pohledu praktického už to tak úžasné není. Jeden problém je v tom, že zejména Booleanovský součin je výpočetně náročná operace, u matic $n \times n$ je potřeba udělat řádově n^3 logických operací.
Další problém je v tom, že takovýto způsob ukládání relací nemusí být nejekonomičtější.

Příklad 4e.c: Nechť A je množina všech současných Pražáků, řekněme, že jich je 10^6. Pro $a, b \in A$ definujeme $a\mathcal{R}b$ jestliže je b (biologický) rodič a.
Pokud bychom chtěli tuto relaci uložit v podobě matice, potřebovali bychom schovat $10^6 \times 10^6 = 10^{12}$ dat. Ve skutečnosti ale tato relace obsahuje nejvýše 2×10^6 dvojic, pravděpodobně i méně vzhledem k tomu, že u spousty lidí jsou rodiče mrtví či mimo Prahu.
△

Pokud má matice relativně málo jedniček, tak řekneme, že je „řídká“. Řídké matice se objevují v mnoha aplikacích a obvykle pro ně hledáme specializované nástroje, protože ty standardní vycházejí výrazně zbytečně pracné. V případě relací se nabízí ukládat je jinak, třeba pomocí spojového seznamu. Tyto alternativní způsoby zase mívají nevýhodu v tom, že se u nich komplikovaněji implementují rozličné operace. Další detaily necháme odborníkům na databáze.

Dalším zajímavým nápadem je rozpoznávat vlastnosti pomocí matice relace. Už to téměř máme. Věta 4c.2 spojuje vlastnosti relací s množinovými operacemi, ty jsou zase díky faktům 4e.1 a 4e.2 svázány s operacemi maticovými. Jediné, co z věty 4c.2 zatím neumíme vyjádřit pomocí matic, je inkluze mezi relacemi. Zavedeme na to vhodný pojem.

Definice.
Nechť M, N jsou dvě matice $n \times m$. Píšeme $M \leq N$, jestliže $m_{ij} \leq n_{ij}$ pro všechna $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, m$.

Zde je třeba upozornit, že jde o speciální pojem pro matice relací. Obecně se u matic nerovnost nezavádí, protože není definice, která by dokázala rozumně spolupracovat s dalšími pojmy, které se u matic používají. V některých oborech si proto soukromně nerovnost udělají tak, aby se jim hodila, jako my teď. Ukážeme, že jsme ji vymysleli dobře.

Fakt 4e.4.
Nechť jsou $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ relace na stejné množině A s maticemi M_1 a M_2. Pak $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ právě tehdy, když $M_1 \leq M_2$.

Důkaz necháváme jako cvičení 4e.3. Je založen na tom, že každý prvek a nějaké 01-matice má povoleny pouze hodnoty 0 a 1, takže nerovnost $1 \leq a$ již nutně znamená $a = 1$, naopak $a \leq 0$ znamená $a = 0$.

Kombinací výše citovaných vět okamžitě dostáváme následující:

Věta 4e.5.
Nechť je $\mathcal{R}$ relace na nějaké n-prvkové množině A a nechť je M její reprezentující matice.
(i) $\mathcal{R}$ je reflexivní právě tehdy, když $E_n \leq M$.
(ii) $\mathcal{R}$ je symetrická právě tehdy, když M je symetrická.
(iii) $\mathcal{R}$ je antisymetrická právě tehdy, když $M \wedge M^T \leq E$.
(iv) $\mathcal{R}$ je tranzitivní právě tehdy, když $M^{[2]} \leq M$.

Důkaz je opět snadný a necháme jej z větší části jako cvičení 4e.4, jen podotkněme jako nápovědu, že v části (i) ta nerovnost nutí M mít na diagonále jedničky.
Prakticky vzato, reflexivitu a symetrii vidíme z matice na první pohled. Reflexivita znamená, že matice musí mít 1 všude na diagonále, pro symetrii musí být matice symetrická. U antisymetrie porovnáváme dvojice čísel symetrické podle diagonály, nesmí být obě zároveň 1. To ještě jde.
Tranzitivita: Jedna možnost je použít Booleanovský součin. Druhá možnost je vypsat si z matice všechny nediagonální jedničky jako dvojice v relaci a zkoumat tranzitivitu na nich. Ani jedno nezní přitažlivě pro ruční počítání, u větších relací ten součin dokáže pořádně zaměstnat i počítač.

Cvičení

Cvičení 4e.1 (rutinní)**:** Uvažujme relace na množině $A = \{0, 2, 4, 6\}$ definované pro $a, b \in A$ takto:
a) $a\mathcal{R}_1 b$ jestliže $a < b$; b) $a\mathcal{R}_2 b$ jestliže $a + 10 < 3b$; c) $a\mathcal{R}_3 b$ jestliže $a \geq 2b$.
Každou z nich zapište výpisem dvojic a najděte příslušnou matici.

Cvičení 4e.2 (rutinní)**:** Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na množině A s reprezentující maticí $M_{\mathcal{R}}$. Dokažte, že relace $\overline{\mathcal{R}}$ je reprezentovaná maticí danou $m_{\overline{\mathcal{R}},ij} = 1 - m_{\mathcal{R},ij}$.

Cvičení 4e.3 (rutinní, poučné)**:** Nechť jsou $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ relace na stejné množině A s maticemi M_1 a M_2. Dokažte, že $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ právě tehdy, když $M_1 \leq M_2$ (viz fakt 4e.4).

Cvičení 4e.4 (rutinní, poučné)**:** Nechť je $\mathcal{R}$ relace na nějaké n-prvkové množině A a nechť je M její reprezentující matice. Dokažte následující (viz věta 4e.5):
a) $\mathcal{R}$ je reflexivní právě tehdy, když $E_n \leq M$.
b) $\mathcal{R}$ je symetrická právě tehdy, je-li M symetrická.
c) $\mathcal{R}$ je tranzitivní právě tehdy, když $M^{[2]} \leq M$.

Řešení:

4e.1: $\mathcal{R}_a = \{(0, 2), (0, 4), (0, 6), (2, 4), (2, 6), (4, 6)\}$,
$\mathcal{R}_b = \{(0, 4), (0, 6), (2, 6), (4, 6), (6, 6)\}$,
$\mathcal{R}_c = \{(0, 0), (2, 0), (4, 0), (4, 2), (6, 0), (6, 2)\}$.

$$M_{\mathcal{R}_a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{\mathcal{R}_b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{\mathcal{R}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

4e.2: $m_{\overline{\mathcal{R}},ij} = 1 \iff (a_i, a_j) \in \overline{\mathcal{R}} \iff (a_i, a_j) \notin \mathcal{R} \iff m_{\mathcal{R},ij} = 0$, obdobně $m_{\overline{\mathcal{R}},ij} = 0 \iff m_{\mathcal{R},ij} = 1$.
4e.3: 1) Předpoklad $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$. Kdyby $m_{1,ij} = 0$, pak $m_{1,ij} \leq m_{2,ij}$, neboť jde o 01-matice. Kdyby $m_{1,ij} = 1$, pak $(a_i, a_j) \in \mathcal{R}_1$, proto i $(a_i, a_j) \in \mathcal{R}_2$ a $m_{2,ij} = 1$, tedy každopádně $m_{1,ij} \leq m_{2,ij}$.
2) Předpoklad $M_1 \leq M_2$. Když $(a_i, a_j) \in \mathcal{R}_1$, tak $m_{1,ij} = 1$, z $m_{1,ij} \leq m_{2,ij}$ také $m_{2,ij} = 1$ (je to 01-matice), proto $(a_i, a_j) \in \mathcal{R}_2$. Dokázáno $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$.
4e.4: a) Předpoklad $\mathcal{R}$ je reflexivní. Pro $i \neq j$ je $e_{ij} = 0$, proto $e_{ij} \leq m_{ij}$. Pro $i = j$ je $(a_i, a_i) \in \mathcal{R}$, proto $m_{ij} = 1$ a $e_{ij} \leq m_{ij}$.
Předpoklad $E_n \leq M$. Pro každé i je $m_{ii} \geq e_{ii} = 1$, tedy $m_{ii} = 1$ a $(a_i, a_i) \in \mathcal{R}$.
b) Předpoklad $\mathcal{R}$ symetrická. Když $m_{ij} = 1$, pak $(a_i, a_j) \in \mathcal{R}$, proto $(a_j, a_i) \in \mathcal{R}$ a $m_{ji} = 1$, tedy $m_{ij} = m_{ji}$. Když $m_{ij} = 0$, pak $(a_i, a_j) \notin \mathcal{R}$, proto $(a_j, a_i) \notin \mathcal{R}$ a $m_{ji} = 0$, tedy každopádně $m_{ij} = m_{ji}$.
Předpoklad M symetrická. Když $(a_i, a_j) \in \mathcal{R}$, tak $m_{ij} = 1$, pak $m_{ji} = 1$ a $(a_j, a_i) \in \mathcal{R}$.
c) Dle věty 4c.2 je $\mathcal{R}$ tranzitivní právě tehdy, když $\mathcal{R}^2 \subseteq \mathcal{R}$, což je dle (i) právě tehdy, když $M_{\mathcal{R}^2} \leq M$, což je dle věty 4e.3 právě tehdy, když $M^{[2]} \leq M$.