5. Speciální relace: Ekvivalence

Svět je plný informací. Aby se s nimi náš mozek dokázal vyrovnat, většinu doby ignoruje nepodstatné detaily a vnímá svět prostřednictvím kategorií. Když potřebujeme zaplatit, jsou pro nás všechny pětistovky stejné, neřešíme jejich individualitu. Když se někam potřebujeme dostat hromadnou, nastoupíme do autobusu se správným číslem a neřešíme typ vozu či dokonce poznávací značku. Většinu zvířat vnímáme prostřednictvím druhu či rasy (slon, pavouk, pes vlčák). O tento způsob třídění do kategorií se stará speciální typ relace.

5a. Ekvivalence, rozklad množiny

Nemusíme vymýšlet novou vlastnost, vše jej již připraveno.

! **Definice.**
Relace na množině se nazývá **ekvivalence**, jestliže je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

A relation on a set is called an **equivalence relation** if it is reflexive, symmetric and transitive.

Jestliže je relace $\mathcal{R}$ ekvivalence a $a\mathcal{R}b$, pak říkáme, že a a b jsou ekvivalentní, přičemž v tomto vyjádření už díky symetrii na pořadí oněch prvků nezáleží. Díky reflexivitě víme, že každý prvek je ekvivalentní sám sobě. Někdy se pro ekvivalenci dvou prvků používá speciální značení $a \sim b$, ale nejde o univerzální konvenci, tak ji tady nebudeme používat.

Výsledky z kapitoly 4 (zejména věta 4c.7, 4c.3, 4c.9 a 4c.12) nám dají následující:

Důsledek 5a.1.
(i) Jestliže je $\mathcal{R}$ relace ekvivalence na množině A, pak je také její restrikce na libovolnou podmnožinu množiny A zase ekvivalence.
(ii) Jestliže je $\mathcal{R}$ relace ekvivalence na množině A, pak $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$ a $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.
(iii) Jestliže jsou $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ relace ekvivalence na množině A, pak je také $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ ekvivalence.
(iv) Nechť pro $i = 1, \dots, n$ je $\mathcal{R}_i$ relace ekvivalence na množině A_i. Pak je také příslušná součinová relace $\mathcal{R}$ na množině $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ ekvivalence.

Bod (ii) je vlastně odpovědí na otázku, zda inverzní relace k ekvivalenci a mocnina ekvivalence jsou zase ekvivalence. Ano, dokonce stejná. Obecně ale neplatí, že by složení dvou ekvivalencí zase dalo ekvivalenci. Jednoduchým protipříkladem na množině $A = \{1, 2, 3\}$ jsou relace

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\},$$
$$\mathcal{S} = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}.$$

Pak $(1,3) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, ale $(3,1)$ tam není, takže $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ není symetrická a tedy ani ekvivalence.

Nejznámější příklad ekvivalence neboli relace s vlastnostmi **RST** je rovnost čísel, obecněji relace $\Delta(A)$. Není to ale příklad nejlepší, protože jde o relaci velmi specifickou. Tou správnou inspirací je kapitola 2, protože větu 2a.5 teď lze shrnout do sdělení, že kongruence je ekvivalence. Mnohé z myšlenek dotyčné kapitoly zde brzy potkáme v obecném hávu.

Výsledky v sekci 4b ukazují, že ekvivalencí jsou například relace daná podmínkou $|x| = |y|$ na číslech, rovností determinantu $|A| = |B|$ pro matice či rovností velikosti pro vektory. Když si připomeneme, že jedno z vyjádření pro kongruenci je rovnost zbytků po dělení, začínáme vidět společnou myšlenku: porovnáváme objekty pomocí nějakého parametru neboli vlastnosti. Těch vlastností může být i víc.

Příklad 5a.a: Uvažujme množinu A studentů jisté univerzity. Z pohledu administrace je užitečné znát u studenta jeho obor (uni nabízí informační technologie IT a elektrotechniku ET), etapu a ročník. Tyto tři specifikace je možné spojit do jedné množiny vektorů

$$X = \{\mathrm{IT}, \mathrm{ET}\} \times \{\mathrm{BSc}, \mathrm{MSc}, \mathrm{PhD}\} \times \{1, 2, 3, 4\}.$$

Statut jistého studenta s = Filomatik je pak třeba (IT,BSc,1). Formálně bychom toto realizovali pomocí zobrazení $T\colon A \mapsto X$. Zobrazení probereme v kapitole 8; pokud se s nimi čtenář ještě nesetkal, tak ať si představí funkci, která neposílá čísla na čísla, ale objekty na objekty. Popis dotyčného studenta s bychom pak vyjádřili předpisem

$$T(\text{Filomatik}) = (\text{IT,BSc,1}).$$

Z pohledu administrace jsou pak studenti se stejným $T(s)$ rovnocenní a zaměnitelní.

Podobně když dovezeme auto do servisu, tak pro technika není unikátním strojem, ale členem skupiny sdílející shodnou specifikaci vyjádřitelnou zobrazením, například

$$T(a) = (\text{Skoda,Fabie,Combi 75kW,2002}).$$

△

Věta 5a.2.
Nechť A, X jsou množiny a $T\colon A \mapsto X$ zobrazení. Definujme relaci $\mathcal{R}$ na A předpisem

$$a\mathcal{R}b \text{ právě tehdy, když } T(a) = T(b).$$

Pak $\mathcal{R}$ je ekvivalence.

Důkaz je rutinní a necháme jej jako cvičení 5a.6.

Typická ekvivalence vzniká právě takto, umožňuje nám například třídit knihy podle autora a podobně. Dá se dokonce ukázat, že každou relaci, která je ekvivalence, lze vyjádřit pomocí schématu z věty 5a.2 pro vhodně zvolené zobrazení T a množinu parametrů X, viz poznámka 5a.5. Je to tedy univerzální schéma pro ekvivalence. To ale neznamená, že se do něj musíme nutit, teorie to nevyžaduje a umožnuje nám pracovat i s jinými schématy. Užitečné je třeba téma propojení.

Příklad 5a.b: Nechť A je množina aktivních zastávek MHD v jisté zemi. Definujeme relaci $\mathcal{R}$ na A předpisem $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když se dá z a do b dojet hromadnou dopravou.

Taková relace bude určitě reflexivní, protože jsme v definici A použili slovo aktivní, díky čemuž máme na každé zastávce do čeho nastoupit a hned zase vystoupit.

Je také tranzitivní, protože jsme v definici nezakázali přestupy. Je tedy naše relace ekvivalence? Rozhodne to symetrie. Jestliže umím dojet hromadnou z a do b, může se stát, že bych z b do a dojet neuměl? To je dobrá otázka; člověk by to nečekal, ale dějí se i podivnější věci. Budeme optimisticky předpokládat, že tato relace je ekvivalence, abychom měli pěkný příklad.

△

Když na $\mathbb{Z}$ zavedeme kongruenci modulo nějaké $n \in \mathbb{N}$, rozpadne se na skupiny. Totéž platí pro všechny ekvivalence.

! **Definice.**
Nechť $\mathcal{R}$ je relace ekvivalence na množině A. Pro $a \in A$ definujeme **třídu ekvivalence** prvku a (**equivalence class** of a) vzhledem k $\mathcal{R}$ jako

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{b \in A;\ a\mathcal{R}b\}.$$

Někteří autoř místo $[a]_{\mathcal{R}}$ používají značení $\mathcal{R}[a]$. Pokud je relace jasná z kontextu, tak často píšeme jen $[a]$.

Díky reflexivitě víme, že taková třída není nikdy prázdná, protože $a \in [a]_{\mathcal{R}}$. Základní vlastnosti tříd ekvivalence shrnuje následující věta.

Věta 5a.3.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace ekvivalence na množině A, nechť $a \in A$.
(i) Pro každé $b, c \in [a]_{\mathcal{R}}$ platí $b\mathcal{R}c$.
(ii) Pro každé $b \in [a]_{\mathcal{R}}$ a $c \in A$ platí, že jestliže $b\mathcal{R}c$, pak $c \in [a]_{\mathcal{R}}$.
(iii) Pro každé $b \in [a]_{\mathcal{R}}$: $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.
(iv) Pro každé $a, b \in A$ platí: $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.
(v) Pro všechna $a, b \in A$ platí, že buď $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$, nebo $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.

Při čtení (popřípadě vymýšlení) důkazu se vyplatí kreslit obrázky.

Důkaz (poučný)**:** (i): Jestliže $b, c \in [a]_{\mathcal{R}}$, pak $a\mathcal{R}b$ a $a\mathcal{R}c$. Podle symetrie také $b\mathcal{R}a$, dvojkrok $b\mathcal{R}a\mathcal{R}c$ pak podle tranzitivity dává $b\mathcal{R}c$.

(ii): Z předpokladu $b \in [a]_{\mathcal{R}}$ máme $a\mathcal{R}b$, spolu s $b\mathcal{R}c$ a tranzitivitou dostaneme $a\mathcal{R}c$, tedy $c \in [a]_{\mathcal{R}}$.

(iii): Předp: $b \in [a]_{\mathcal{R}}$. Vezměme libovolné $c \in [b]_{\mathcal{R}}$. Pak $b\mathcal{R}c$ a podle (ii) tedy $c \in [a]_{\mathcal{R}}$. Dokázali jsme $[b]_{\mathcal{R}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$.
Nechť naopak $c \in [a]_{\mathcal{R}}$. Také $b \in [a]_{\mathcal{R}}$, podle (i) $b\mathcal{R}c$ a tedy $c \in [b]_{\mathcal{R}}$. Dokázali jsme $[a]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$.

(iv): Jestliže $a\mathcal{R}b$, pak $b \in [a]_{\mathcal{R}}$ a proto podle (iii) máme $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$. Nechť naopak $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$. Pak $b \in [b]_{\mathcal{R}} = [a]_{\mathcal{R}}$, tedy $b \in [a]_{\mathcal{R}}$ a $a\mathcal{R}b$ přímo podle definice $[a]_{\mathcal{R}}$.

(v): Vezměme nějaké $a, b \in A$. Jestliže $[a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R} = \emptyset$, pak jsme hotovi. Jinak existuje $c \in [a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R}$. Podle (iii) to pak znamená $[a]_\mathcal{R} = [c]_\mathcal{R} = [b]_\mathcal{R}$.

□

Tvrzení (i) nám říká, že všechny prvky jedné třídy ekvivalence jsou spolu navzájem v relaci.

Tvrzení (ii) ukazuje na jakousi amébovitost třídy ekvivalence: čehokoliv se dotkne, to pohltí. Když jeden prvek dotyčné třídy natáhne panožku ven a dotkne se nějakého c, tak jej vtáhne dovnitř třídy; takové c už je pak podle (i) v relaci se všemi ostatními členy třídy.

Tvrzení (iii) ukazuje, že z dané třídy je možné zvolit libovolného jiného zástupce, což už také známe od kongruence. (iv) zase říká, že příslušnost ke stejné třídě je spolehlivým indikátorem toho, kdo je s kým v relaci.

Tvrzení (v) pak dokresluje obrázek: Množina A se rozpadá na třídy ekvivalence, což jsou navzájem oddělené skupiny, přičemž v každé z nich je podle (i) každý s každým propojen.

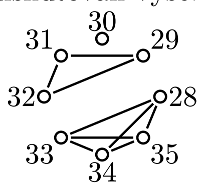
Protože jsou ekvivalence specifické, bývá zvykem kreslit jejich **grafy** jinak. Cílem je zjednodušení obrázku bez ztráty informace. Proto se nekreslí smyčky, stejně víme, že tam jsou. Namísto obousměrných šipek (jiné nejsou) pak kreslíme jednoduchou spojnici. Vzniká tak neorientovaný graf, viz kapitola 12.

Příklad 5a.c: V teorii čísel se počet různých prvočíselných dělitelů čísla n značí $\omega(n)$, například $\omega(12) = 2$, protože prvočísla 2 a 3 dělí 12. Dvanáctku dělí i jiná čísla, ale to nejsou prvočísla (ani 1 není).

Uvažujme následující relaci $\mathcal{R}$ na množině $A = \{28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$: $a\mathcal{R}b$ jestliže a, b mají stejný počet různých prvočíselných dělitelů, tedy $\omega(a) = \omega(b)$. Podle věty 5a.2 je to ekvivalence.

Nejprve pro všechna čísla z A určíme hodnotu parametru ω, abychom viděli, které prvky jsou se kterými v relaci, pak to zakreslíme do zjednodušeného grafu, jak jsme to diskutovali výše.

$\omega(28) = \omega(2^2 \cdot 7) = 2,$ $\quad \omega(32) = \omega(2^5) = 1,$
$\omega(29) = 1,$ $\quad \omega(33) = \omega(3 \cdot 11) = 2,$
$\omega(30) = \omega(2 \cdot 3 \cdot 5) = 3,$ $\quad \omega(34) = \omega(2 \cdot 17) = 2,$
$\omega(31) = 1,$ $\quad \omega(35) = \omega(5 \cdot 7) = 2.$



Třídy ekvivalence jsou $[28]_\mathcal{R} = \{28, 33, 34, 35\} = [33]_\mathcal{R} = [34]_\mathcal{R} = [35]_\mathcal{R}$, $[29]_\mathcal{R} = \{29, 31, 32\} = [31]_\mathcal{R} = [32]_\mathcal{R}$ a $[30]_\mathcal{R} = \{30\}$.

△

Graf pěkně ukazuje, jak se množina A rozdělí na jednotlivé třídy ekvivalence. Pokud bychom si nakreslili graf pro relaci z příkladu 5a.b, tak bychom viděli jednotlivá města (či skupiny měst, pokud sdílí MHD) coby třídy ekvivalence.

Rozdělování množin na menší části se někdy hodí a je na to speciální pojem.

! **Definice.**
Uvažujme množinu A. Jejím **rozkladem** rozumíme libovolný soubor $\mathcal{P}$ neprázdných podmnožin množiny A takový, že $A = \bigcup\limits_{M \in \mathcal{P}} M$ a pro všechna $M \neq N \in \mathcal{P}$ jsou M, N disjunktní.

Consider a set A. By its **partition** we mean an arbitrary collection $\mathcal{P}$ of non-empty subsets of A such that $A = \bigcup\limits_{M \in \mathcal{P}} M$ and M, N are disjoint for all $M \neq N \in \mathcal{P}$.

Podmínka o disjunktnosti se často vyjadřuje pomocí obměny: pro všechna $M, N \in \mathcal{P}$ má platit:

$$M \cap N \neq \emptyset \implies M = N.$$

Tato forma je často výhodnější pro použití například v důkazech.

Poznamenejme, že na velikost $\mathcal{P}$ se v této definici nekladou žádné nároky, klidně může být nekonečná.

Příklad 5a.d: V příkladě 5a.c jsme zjistili, že množina $A = \{28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$ má třídy ekvivalence $\{28, 33, 34, 35\}$, $\{29, 31, 32\}$ a $\{30\}$. Tyto množiny jsou po dvou disjunktní a dohromady dají celou A, takže vytvářejí rozklad $\mathcal{P} = \{\{28, 33, 34, 35\}, \{29, 31, 32\}, \{30\}\}$ množiny A.

Tento rozklad je možné napsat jako $\mathcal{P} = \{[a]_\mathcal{R};\ a \in A\}$. Pak se tam například množina $\{29, 31, 32\}$ ocitne třikrát, ale disjunktnost množin v $\mathcal{P}$ vyžadovanou pro rozklad to neohrozí, protože v množinách se vícenásobné výskyty prvku berou jako jeden prvek. V definici rozkladu to ošetřujeme tou podmínkou $M \neq N$ u disjunktnosti.

△

Věta 5a.3 nám vlastně říká, že třídy ekvivalence vytvářejí rozklad. Funguje to i naopak, každý rozklad množiny je dán nějakou ekvivalencí.

!

Věta 5a.4.
Nechť A je množina.
(i) Jestliže je $\mathcal{R}$ ekvivalence na A, pak $\{[a]_{\mathcal{R}}\}_{a\in A}$ je rozklad množiny A.
(ii) Jestliže je $\mathcal{P}$ rozklad množiny A, pak existuje relace ekvivalence $\mathcal{R}$ na A taková, že $\mathcal{P}$ jsou přesně třídy ekvivalence vzhledem k $\mathcal{R}$.

Důkaz (z povinnosti, ale poučná myšlenka)**:** (i): Podle definice $[a]_{\mathcal{R}} \subseteq A$ pro všechna a a tedy i $\bigcup\limits_{a\in A} [a]_{\mathcal{R}} \subseteq A$. Naopak pro každé $a \in A$ máme $a \in [a]_{\mathcal{R}}$ a proto $A \subseteq \bigcup\limits_{a\in A} [a]_{\mathcal{R}}$. Takže $A = \bigcup\limits_{a\in A} [a]_{\mathcal{R}}$.

Disjunktnost tříd viz věta 5a.3 (v).

(ii): Definujme relaci $\mathcal{R}$ na A takto: $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když existuje $M \in \mathcal{P}$ takové, že $a, b \in M$.

Jinými slovy, prohlásíme, že všechny prvky z jedné množiny rozkladu jsou navzájem v relaci, ale žádné jiné dvojice už nevytvoříme.

1) Nejprve ukážeme, že $\mathcal{R}$ je ekvivalence.

R: Jestliže $a \in A$, pak z $A = \bigcup\limits_{M\in\mathcal{P}} M$ musí existovat $M \in \mathcal{P}$ takové, že $a \in M$. Pak $a \in M$ a také $a \in M$, tedy $a\mathcal{R}a$. Relace $\mathcal{R}$ je reflexivní.

S: Jestliže $a\mathcal{R}b$, pak $a, b \in M$ pro nějakou množinu $M \in \mathcal{P}$. Pak ovšem také $b, a \in M$ a $b\mathcal{R}a$. $\mathcal{R}$ je symetrická.

T: Předpokládejme, že $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}c$. Pak podle definice $\mathcal{R}$ existuje množina $M \in \mathcal{P}$ taková, že $a, b \in M$, a existuje množina $N \in \mathcal{P}$ (zatím musíme připustit možnost, že jiná) taková, že $b, c \in N$. Máme prvek $b \in M \cap N$, tedy $M \cap N \neq \emptyset$. Protože je $\mathcal{P}$ rozklad, musí tedy platit $M = N$. Proto $a, c \in M$ a tedy $a\mathcal{R}c$. $\mathcal{R}$ je tranzitivní.

2) Teď ukážeme, že množiny z rozkladu odpovídají třídám ekvivalence $\mathcal{R}$.

Vezměme třídu rozkladu $[a]_{\mathcal{R}}$. Pak existuje $M \in \mathcal{P}$ taková, že $a \in M$. Pro všechny $b \in M$ pak podle definice $a\mathcal{R}b$, tedy $b \in [a]_{\mathcal{R}}$. Dokázali jsme, že $M \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$. Naopak jestliže $b \in [a]_{\mathcal{R}}$, pak $a\mathcal{R}b$, proto $a, b \in N$ pro nějakou množinu $N \in \mathcal{P}$. Prvek a leží v M i v N, proto $M = N$, tudíž $b \in M$. Ukázali jsme, že $[a]_{\mathcal{R}} \subseteq M$. Každá třída ekvivalence je tedy rovna nějaké množině z rozkladu. Formálně, $\{[a]_{\mathcal{R}}\}_{a\in M} \subseteq \mathcal{P}$.

Naopak vezměme $M \in \mathcal{P}$ a libovolný prvek $a \in M$ (jsou to neprázdné množiny dle definice rozkladu). Pak podle předchozího odstavce $M = [a]_{\mathcal{R}}$. Toto ukazuje, že $\mathcal{P} \subseteq \{[a]_{\mathcal{R}}\}_{a\in M}$, takže se tyto dvě množiny rovnají.

$\square$

Z praktického pohledu tedy relace ekvivalence představuje jeden z možných pohledů na situaci, kdy množinu rozparcelujeme na kousky.

Příklad 5a.e: Jak vypadá situace pro ekvivalenci danou rovností na $\mathbb{R}$? Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí $[x]_{\mathcal{R}} = \{x\}$, jsou to tedy nejmenší možné třídy ekvivalence. Vzniká tím rozklad $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}} \{x\}$, což jen potvrzuje, že tato ekvivalence je nuda.

Mírně zajímavější je relace definovaná na $\mathbb{R}$ předpisem $x\mathcal{R}y$ právě tehdy, když $|x| = |y|$. V této ekvivalenci jsou třídy ekvivalence

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in \mathbb{R};\ x\mathcal{R}y\} = \{y \in \mathbb{R};\ |x| = |y|\} = \{x, -x\},$$

což je v případě $x = 0$ jednoprvková množina, $[0]_{\mathcal{R}} = \{0\}$, jinak jsou dvouprvkové.

V odpovídajícím rozkladu $\mathcal{P} = \{[x]_{\mathcal{R}};\ x \in \mathbb{R}\}$ plýtváme, protože (s jednou výjimkou) jsou tam všechny množiny dvakrát. Efektivnější je napsat rozklad například jako $\mathcal{P} = \{[x]_{\mathcal{R}};\ x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$, což odpovídá vyjádření

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x\geq 0} \{x, -x\}.$$

$\triangle$

Poznámka: Na každé víceprvkové množině A může existovat více ekvivalencí. Nejmenší z nich je diagonální relace $\Delta(A)$, která je ekvivalencí a díky požadavku reflexivity je zároveň podmnožinou libovolné jiné ekvivalence na A. Vznikne rozklad A na jednotlivé prvky coby podmnožiny A, každý z nich je v relaci jen se sebou a nikým jiným.

Na opačném konci škály je úplná relace $\mathcal{R} = A \times A$, kdy je každý prvek s každým v relaci. I to je ekvivalence a obsahuje v sobě každou jinou ekvivalenci na A, ostatně podle definice všechny relace na A jsou její podmnožinou. V této ekvivalenci existuje jen jedna třída ekvivalence, jmenovitě celá množina A.

Rozklady $A = \bigcup\limits_{a\in A} \{a\}$ a $A = A$ jsou triviální. Pokud má A alespoň tři prvky, pak existují i další rozklady této množiny, tedy existují další možné ekvivalence, které jsou jakoby mezi oněmi dvěma extrémy. Můžeme si

je představovat tak, že vezmeme rozklad $\{A_i\}$ množiny A a na každé podmnožině A_i uvažujeme úplnou relaci $A_i \times A_i$, ty pak sjednotíme.
△

Příklad 5a.f: Uvažujme relaci na $\mathbb{R}^2$ definovanou $(u,v)\mathcal{R}(x,y)$ právě tehdy, když $u^2+v^2=x^2+y^2$. Vlastně se porovnává parametr vektoru $T(u,v)=u^2+v^2$, takže podle věty 5a.2 je $\mathcal{R}$ ekvivalence (viz cvičení 4b.7). Protože
$$u^2+v^2=x^2+y^2 \iff \sqrt{u^2+v^2}=\sqrt{x^2+y^2},$$
tak vlastně porovnáváme vektory podle jejich délky $\|(u,v)\|=\sqrt{u^2+v^2}$.

Pro daný vektor je tedy jeho třída ekvivalence rovna množině všech vektorů stejné délky, ty vytvářejí v rovině kružnici:
$$[(u,v)]_{\mathcal{R}}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \|(x,y)\|=\|(u,v)\|\}.$$
Tato ekvivalence tak rozkládá rovinu na soustředné kružnice se středem v počátku. Tuto definici snadno zobecníme pro $\mathbb{R}^n$, třeba třírozměrný prostor se pak rozloží na soustředné sféry.
△

Příklad 5a.g: Uvažujme množinu A všech přímek v rovině a definujme na nich relaci $p\mathcal{R}q$ právě tehdy, když $p \parallel q$. Snadno ověříme, že jde o ekvivalenci, viz cvičení 4b.11.

Jak vypadá třída ekvivalence pro p danou rovnicí $y=2x+13$? Rovnoběžné přímky musí mít stejnou směrnici, proto
$$[y=2x+13]_{\mathcal{R}}=\{y=2x+b;\ b\in\mathbb{R}\}.$$
Tato myšlenka bude aplikovatelná na skoro všechny přímky, s jednou výjimkou, a to jsou svislé přímky:
$$[x=13]_{\mathcal{R}}=\{x=c;\ c\in\mathbb{R}\}.$$
I tato relace je tedy typem porovnávání podle parametru, v tomto případě směru přímky.

Pokud bychom chtěli z každé třídy vybrat přesně jednoho zástupce nějak plánovitě, nabízí se třeba přímka procházející počátkem. Máme pak efektivní rozklad množiny všech přímek
$$\mathcal{P}=\{[x=0]_{\mathcal{R}}\}\cup\{[y=ax]_{\mathcal{R}};\ a\in\mathbb{R}\}.$$
△

Příklad 5a.h: Definujme následující relaci na $\mathbb{R}$: $x\mathcal{R}y$ právě tehdy, pokud $y-x\in\mathbb{Z}$.

Bývá dobré si novou relaci nejprve trochu vyzkoušet, máme třeba $1\mathcal{R}4$ neboť $4-1\in\mathbb{Z}$, $1\mathcal{R}7$, ale i $7\mathcal{R}1$ či $7\mathcal{R}7$, zajímavější je $0.76\mathcal{R}14.76$, $396.76\mathcal{R}0.76$ ale i $0.76\mathcal{R}(-1.24)$, neboť $(-1.24)-0.76=-2\in\mathbb{Z}$.

Je to ekvivalence, viz cvičení 4b.6.

Jak vypadají třídy ekvivalence? Podle definice máme třeba pro $\pi\in\mathbb{R}$:
$$[\pi]_{\mathcal{R}}=\{y\in\mathbb{R};\ \pi\mathcal{R}y\}=\{y\in\mathbb{R};\ y-\pi\in\mathbb{Z}\}=\{y\in\mathbb{R};\ \exists n\in\mathbb{Z}\colon y-\pi=n\}=\{\pi+n;\ n\in\mathbb{Z}\}.$$
Třída ekvivalence π je tedy na reálné ose vidět jako nekonečný náhrdelník teček vzdálených od sebe o 1, přičemž jedna z nich je v π. Obecně (s pomocí užitečného značení)
$$[x]_{\mathcal{R}}=\{x+n;\ n\in\mathbb{Z}\}=x+\mathbb{Z},$$
což je kopie množiny $\mathbb{Z}$ posunutá o x doprava. Například $[13]_{\mathcal{R}}=\mathbb{Z}$.

V odpovídajícím rozkladu $\mathcal{P}=\{[x]_{\mathcal{R}};\ x\in\mathbb{R}\}$ se tentokráte každá třída vyskytuje dokonce nekonečně mnohokrát, například $[0]_{\mathcal{R}}=[1]_{\mathcal{R}}=[-1]_{\mathcal{R}}=\cdots=\mathbb{Z}$. Je možné vybrat z každé třídy právě jednoho zástupce tak, aby pomocí nich vznikl rozklad bez opakování množin a výslední zástupci tvořili něco „pěkného“?

Nabízí se $\mathcal{P}=\{[x]_{\mathcal{R}};\ 0\le x<1\}$. Je to opravdu rozklad?

Za prvé, vezmeme-li libovolné $y\in\mathbb{R}$, tak určitě existuje $x\in\langle 0,1)$ a $n\in\mathbb{Z}$ takové, že $y=n+x$ (toto by mělo být jasné, x je desetinná část y a $n=\lfloor y\rfloor$). Pak $y\in[x]_{\mathcal{R}}$. Toto ukazuje, že $\bigcup\limits_{0\le x<1}[x]_{\mathcal{R}}=\mathbb{R}$.

Mohli bychom ještě nějakou množinu z tohoto rozkladu odebrat? Ukážeme, že ne, protože pro $x\neq y\in\langle 0,1)$ už platí $[x]_{\mathcal{R}}\neq[y]_{\mathcal{R}}$. Dokážeme to nepřímo, tedy přes obměnu (rovnosti se zpracovávají lépe než nerovnosti): Kdyby $[x]_{\mathcal{R}}=[y]_{\mathcal{R}}$, pak $x\mathcal{R}y$, což značí $y-x\in\mathbb{Z}$. Jenže zároveň $x,y\in\langle 0,1)$, což znamená $|x-y|<1$. Situace, kdy $|x-y|<1$ a $y-x\in\mathbb{Z}$, je možná jedině pro $x=y$.

Pro $x,y\in\langle 0,1)$ jsme dokázali, že $[x]_{\mathcal{R}}=[y]_{\mathcal{R}}\implies x=y$, tudíž platí i obměna $x\neq y\implies[x]_{\mathcal{R}}\neq[y]_{\mathcal{R}}$.

Z důkazu je jasné, že podobně můžeme jako množinu indexů vzít libovolný polouzavřený interval délky 1 a zase dostaneme rozklad množiny, který už nelze dále zmenšit. Jsou samozřejmě i jiné možnosti, třeba $\langle 0,\frac{1}{2})\cup\langle\frac{3}{2},2)$ by fungovalo, jdou vymyslet i šílenější množiny indexů.

Jedna šťouravá otázka nakonec: Šlo by ty zástupce vybírat tak, aby v každém intervalu typu $\langle n, n+1)$ pro $n \in \mathbb{Z}$ byl jen jeden? Takže pro jednu třídu bychom vybrali zástupce z $\langle 0,1)$, pro další zástupce z $\langle 1,2)$, pro další z $\langle -1,0)$, pro další z $\langle 2,3)$ atd. Odpověď zní, že to možné není, na odůvodnění ale budeme potřebovat znalosti z kapitoly . Každá třída $[a]_{\mathcal{R}}$ je totiž spočetná, ale $\mathbb{R}$ spočetná není, tudíž je nespočetně mnoho různých tříd ekvivalence v rozkladu. Intervalů typu $\langle n, n+1)$ je ale jen spočetně mnoho, což nestačí na nutné zástupce.
△

Příklad 5a.i: Uvažujme množinu A neprázdných konečných řetězců nad anglickou abecedou („slova“, podrobněji viz příklad 7c.h), zvolme pevně nějaké $n \in \mathbb{N}$. Definujeme relaci $\mathcal{R}$ na A pro slova α, β předpisem $\alpha \mathcal{R} \beta$ buď jestliže jsou obě slova kratší než n znaků a jsou stejná, nebo jestliže mají obě slova alespoň n znaků a na prvních n znacích se shodují.

Jak to funguje prakticky? Zvolme například $n = 3$. Pak máme de$\mathcal{R}$de a žádné jiné slovo už s „de“ ekvivalentní není, protože „de“ je kratší než 3. Ale s delším řetězcem „pec“ jsou ekvivalentní třeba „pec“, „pecka“, „pecen“, „pecxyzabcdefghij“ a nekonečně mnoho dalších.

Je snadné ale pracné ověřit, že jde o ekvivalenci, protože se vždy musí rozebírat obě možnosti z definice. Ukažme to nejdelší, tranzitivivtu:

Mějme $\alpha \mathcal{R} \beta$ a $\beta \mathcal{R} \gamma$. Případ 1: α je kratší než n. Podle definice pak $\alpha \mathcal{R} \beta$ nutí být β také kratší než n a platnost $\alpha = \beta$. Protože je β kratší než n a $\beta \mathcal{R} \gamma$, tak i γ musí být kratší než n a $\beta = \gamma$. Takže $\alpha = \gamma$ jsou obě kratší než n, tedy $\alpha \mathcal{R} \gamma$. Případ 2: α má alespoň délku n, se rozebere obdobně.

Máme tedy ekvivalenci. Výše jsme si vlastně rozmysleli, že $[\mathrm{de}]_{\mathcal{R}} = \{\mathrm{de}\}$, zatímco $[\mathrm{pec}]_{\mathcal{R}}$ jsou všechny konečné řetězce, které začínají „pec“.

Tento příklad není uměle vymyšlen, jazyk C dovoloval libovolnou délku názvu proměnných, ale při rozlišování používal jen několik prvních písmen. Tato ekvivalence tedy vystihuje, které proměnné byly považovány za stejné. Množina tříd ekvivalence pak udává, které různé proměnné byly k dispozici.
△

5a.5 Poznámka: Výše jsme naznačili, že každou ekvivalenci lze interpretovat jako porovnávání prvků podle nějakého parametru. Není těžké to dokázat. Podle věty 5a.3 (iv) se totiž existence vztahu $a \mathcal{R} b$ dá jednoznačně určit pomocí shodnosti tříd ekvivalence, což se dá interpretovat jako parametr daného prvku.

Formálně: Uvažujme nějakou ekvivalenci $\mathcal{R}$ na množině A. Označme $X = \{[a]_{\mathcal{R}}\}$ a definujme $T(a) = [a]_{\mathcal{R}}$. Pak T je zobrazení z A do X a platí $a \mathcal{R} b$ právě tehdy, když $T(a) = T(b)$, což je přesně ono univerzální schéma.

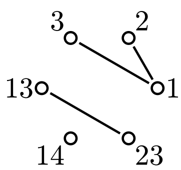
Je zároveň vidět, že jde o umělou konstrukci, takže v praxi je užitečnější pracovat s ekvivalencemi tak, jak byly vytvořeny, protože je nám to intuitivně zpřístupní.
△

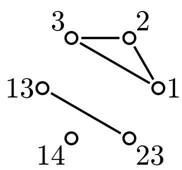
V sekci 4c.13 jsme definovali uzávěr relace vůči žádané vlastnosti. Lze to aplikovat i na vlastnost býti ekvivalencí, čímž vznikne pojem ekvivalentního uzávěru. Není třeba vymýšlet nové výsledky, stačí recyklovat znalosti příslušné kapitoly. Na řadu věcí ovšem přijdeme intuitivně i bez nich.

Příklad 5a.j: Hledáme relaci $\mathcal{R}$ na množině $A = \{1, 2, 3, 13, 14, 23\}$, která by zahrnovala vztahy $1\mathcal{R}2$, $1\mathcal{R}3$, $13\mathcal{R}23$ a byla by to ekvivalence, přičemž chceme nejmenší takovouto relaci.

Jinak řečeno, hledáme ekvivalentní uzávěr relace $\big\{(1,2), (1,3), (13,23)\big\}$ na A.

Ekvivalence má být reflexivní, proto nutně musíme doplnit všechny dvojice typu (a,a). Má být také symetrická, takže nelze nepřidat dvojice $(2,1)$, $(3,1)$ a $(23,13)$. Tím jsme dostali první obrázek (jako obvykle pro zjednodušení nekreslíme smyčky a obousměrnou orientaci šipek).





Teď je třeba doplnit hrany tak, aby vznikla relace tranzitivní, tedy je třeba uzavřít všechny nedokončené trojúhelníky. Takový je tam jen jeden. Je dobré si rozmyslet, že jsme tímto doplněním neporušili symetrii.

Dostaneme tak

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (13,13), (14,14), (23,23), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (13,23), (23,13), (2,3), (3,2)\}.$$

Třídy ekvivalence jsou $[1]_{\mathcal{R}} = [2]_{\mathcal{R}} = [3]_{\mathcal{R}} = \{1,2,3\}$, $[13]_{\mathcal{R}} = [23]_{\mathcal{R}} = \{13, 23\}$, $[14]_{\mathcal{R}} = \{14\}$.

Poznamenejme, že kdybychom nejprve doplňovali na tranzitivitu a pak na symetrii, tak zkazíme tranzitivitu a musíme se k ní vrátit. Viz cvičení 4c.16 a 5a.14.
△

O ekvivalencích a rozkladech se toho samozřejmě dá říct více, pro pár zajímavých nápadů doporučujeme cvičení, například 5a.13.

Cvičení

Cvičení 5a.1 (rutinní)**:** Rozhodněte, která z následujících relací na množině A lidí je ekvivalence, odpověď zdůvodněte:
a) $a\mathcal{R}b$ znamená, že a,b se někdy potkali;
b) $a\mathcal{R}b$ znamená, že a,b mají společného známého;
c) $a\mathcal{R}b$ znamená, že a,b mají stejnou nejoblíbenější knihu (zde předpokládejte, že každý má jen jednu takovou).

Cvičení 5a.2 (rutinní)**:** Na množině $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ uvažujte následující relaci: $a\mathcal{R}b$ jestliže mají slovní vyjádření pro a a b stejný počet písmen.
Víme, že je to ekvivalence (cvičení 4b.12). Vypište prvky této relace a nakreslete její zjednodušený graf. Pro všechny prvky určete jejich třídy ekvivalence a najděte odpovídající rozklad množiny.

Cvičení 5a.3 (rutinní, poučné)**:** Ve cvičení se vlastně ukázalo, že následující relace na $\mathbb{Z}$ jsou ekvivalence:
a) $a\mathcal{R}b$ jestliže $|a| = |b|$;
b) $a\mathcal{R}b$ jestliže $a - b = 2k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.
Pro každou z těchto relací najděte $[13]_{\mathcal{R}}$ a poté popište obecně, jak třídy ekvivalence vypadají.

Cvičení 5a.4 (rutinní, poučné)**:** Rozhodněte, které z následujících relací na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ jsou ekvivalence. Pro ty, které jsou, najděte $[(1,2)]_{\mathcal{R}}$.
a) $(u,v)\mathcal{R}(x,y)$ jestliže $u + v = x + y$;
b) $(u,v)\mathcal{R}(x,y)$ jestliže $u - v = x - y$;
c) $(u,v)\mathcal{R}(x,y)$ jestliže $u - v = y - x$;
d) $(u,v)\mathcal{R}(x,y)$ jestliže $uy = xv$.

Cvičení 5a.5 (dobré, poučné)**:** Uvažujme množinu A všech zobrazení ze $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$. Které z následujících relací jsou ekvivalence? Pro ty, které jsou, určete třídy ekvivalence.
a) $\{(T,S);\ T(1) = S(1)\}$;
b) $\{(T,S);\ T(0) = S(0)$ nebo $T(1) = S(1)\}$;
c) $\{(T,S);\ T(0) = S(0)$ a $T(1) = S(1)\}$;
d) $\{(T,S);\ T(n) - S(n) = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}\}$;
e) $\{(T,S);\ \exists C \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{Z}\colon T(n) - S(n) = C\}$;
f) $\{(T,S);\ T(1) = S(0)$ a $T(0) = S(1)\}$.

Cvičení 5a.6 (poučné)**:** Nechť $T\colon A \mapsto X$ je zobrazení. Definujme relaci na A předpisem $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $T(a) = T(b)$. Dokažte, že je to ekvivalence, a určete její třídy ekvivalence.
Viz věta 5a.2.

Cvičení 5a.7 (poučné)**:** Ve cvičení 4b.10 se ukázalo, že následující relace $\mathcal{R}$ na množině $P[x]$ všech reálných polynomů jsou ekvivalence. Určete, jak pro ně vypadají třídy ekvivalence.
a) $p\mathcal{R}q$ právě tehdy když p a q mají stejný stupeň;
b) $p\mathcal{R}q$ právě tehdy když p a q mají stejné reálné kořeny včetně násobnosti;
c) $p\mathcal{R}q$ právě tehdy, když mají p a q stejné komplexní kořeny (což zahrnuje i reálné) včetně násobnosti.

Cvičení 5a.8 (rutinní)**:** Uvažujte následující relace definované na množině všech (konečných) binárních řetězců. Pro každou z nich dokažte, že je ekvivalence, a určete, jak vypadají $[1001]_{\mathcal{R}}$ a $[0]_{\mathcal{R}}$.
a) $a\mathcal{R}b$ jestliže řetězce a,b mají stejný počet jedniček;
b) $a\mathcal{R}b$ jestliže řetězce a,b mají stejnou paritu výskytu jedniček (obojí sudý počet nebo obojí lichý počet).

Cvičení 5a.9 (rutinní)**:** Který z následujících souborů podmnožin množiny $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ je jejím rozkladem? Nakreslete pak graf odpovídající ekvivalence.
a) $S = \{\{1,2,5\},\{6,7\},\{3\}\}$; b) $S = \{\{1,2,5\},\{6,7\},\{3,4\}\}$; c) $S = \{\{1,2,4,5\},\{6,7\},\{3,4\}\}$.

Cvičení 5a.10 (rutinní, poučné)**:** Který z následujících souborů je rozkladem množiny všech konečných binárních řetězců?
a) Řetězce začínající 00, řetězce začínající 01, řetězce začínající 11, řetězce začínající 10;
b) Řetězce začínající 00, řetězce začínající 1;
c) Řetězce obsahující 00, řetězce obsahující 01, řetězce obsahující 11, řetězce obsahující 10;
d) Řetězce začínající 00, řetězce začínající 01, řetězce začínající 1.

Cvičení 5a.11 (rutinní, poučné)**:** Který z následujících souborů podmnožin je rozkladem množiny $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?
a) množina párů (x,y) takových, že x nebo y je liché; množina párů (x,y) takových, že x je sudé; množina párů (x,y) takových, že y je sudé;
b) množina párů (x,y) takových, že x nebo y je liché; množina párů (x,y) takových, že x a y jsou sudé;
c) množina párů (x,y) takových, že $xy > 0$; množina párů (x,y) takových, že $xy < 0$.

Cvičení 5a.12 (poučné)**:** Dokažte: Jsou-li $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ relace ekvivalence na téže množině A, pak $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ je také ekvivalence, ale $\overline{\mathcal{R}}_1$ ani $\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2$ nejsou nikdy ekvivalence.

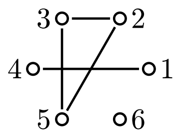
Cvičení 5a.13 (poučné, dobré)**:** Nechť $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ jsou dva rozklady téže množiny A. Řekneme, že $\mathcal{P}_2$ je **zjemnění** (**refinement**) rozkladu $\mathcal{P}_1$, jestliže každá množina z $\mathcal{P}_2$ je podmnožinou nějaké množiny z $\mathcal{P}_1$.
Intuitivně, $\mathcal{P}_2$ vzniklo tak, že se dále rozdělily nějaké množiny z $\mathcal{P}_1$.
Dokažte následující: Nechť $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ jsou relace ekvivalence na množině A. Pak $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{R}_1$ právě tehdy, když je rozklad $\{[a]_{\mathcal{R}_2}\}$ zjemněním rozkladu $\{[a]_{\mathcal{R}_1}\}$.
Intuitivně: Čím víc dvojic v relaci ekvivalence, tím větší třídy—ano, to zní logicky.

Cvičení 5a.14 (poučné, dobré)**:** Jestliže uděláme tranzitivní uzávěr symetrického uzávěru reflexivního uzávěru relace, dostaneme nutně ekvivalenci?

Cvičení 5a.15 (poučné, dobré)**:** Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A. Řekneme, že je **cirkulární** (**circular**), jestliže pro každé $a, b, c \in A$ platí: Jestliže $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}c$, pak $c\mathcal{R}a$.
Dokažte: Relace $\mathcal{R}$ je ekvivalence právě tehdy, když je reflexivní a cirkulární.

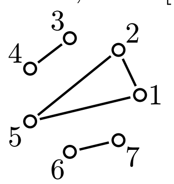
Řešení:

5a.1: a) Není tranzitivní, a potkal b, b potkal c nemusí znamenat a potkal c. b) Není tranzitivní.
c) Je ekvivalence. Označme $k(a)$ nejoblíbenější knihu a. **R**: $k(a) = k(a) \longrightarrow a\mathcal{R}a$.
S: $a\mathcal{R}b \longrightarrow k(a) = k(b) \longrightarrow k(b) = k(a) \longrightarrow b\mathcal{R}a$.
T: $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \longrightarrow k(a) = k(b) \wedge k(b) = k(c) \longrightarrow k(a) = k(c) \longrightarrow a\mathcal{R}c$.
5a.2: Je praktické zavést funkci $p(n)$ značící počet písmen v čísle n.
Pak $p(1) = 5$, $p(2) = 3$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 3$, $p(6) = 4$. Odtud snadno
$\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,4), (4,1), (2,3), (3,2), (2,5), (5,2), (3,5), (5,3)\}$.
$[1]_\mathcal{R} = [4]_\mathcal{R} = \{1,4\}$, $[2]_\mathcal{R} = [3]_\mathcal{R} = [5]_\mathcal{R} = \{2,3,5\}$, $[6]_\mathcal{R} = \{6\}$.
$\mathcal{P} = \{\{1,4\}, \{2,3,5\}, \{6\}\}$.



5a.3: a) $[13]_\mathcal{R} = \{a \in \mathbb{Z};\ 13\mathcal{R}a\} = \{a \in \mathbb{Z} : |13| = |a|\} = \{-13, 13\}$; $[n]_\mathcal{R} = \{n, -n\}$.
b) $[13]_\mathcal{R} = \{a \in \mathbb{Z};\ 13\mathcal{R}a\} = \{a \in \mathbb{Z};\ \exists k \in \mathbb{Z}\colon 13 - b = 2k\} = \{a \in \mathbb{Z};\ \exists k \in \mathbb{Z}\colon b - 13 = 2k\}$
$= \{a \in \mathbb{Z};\ \exists k \in \mathbb{Z}\colon b = 13 + 2k\} = \{13 + 2k;\ k \in \mathbb{Z}\}$; $[n]_\mathcal{R} = \{n + 2k;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
5a.4: a) Je to ekvivalence. **R**: $(u,v)\mathcal{R}(u,v) \iff u + v = u + v$ platí vždy.
S: $(u,v)\mathcal{R}(x,y) \longrightarrow u + v = x + y \longrightarrow x + y = u + v \longrightarrow (x,y)\mathcal{R}(u,v)$.
T: $(u,v)\mathcal{R}(x,y) \wedge (x,y)\mathcal{R}(r,s) \longrightarrow u + v = x + y \wedge x + y = r + s \longrightarrow u + v = r + s \longrightarrow (u,v)\mathcal{R}(r,s)$.
$[(1,2)]_\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2;\ (1,2)\mathcal{R}(x,y)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2;\ 1 + 2 = x + y\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2;\ y = 3 - x\}$
$= \{(k, 3-k);\ k \in \mathbb{Z}\}$.
b) Je to ekvivalence. **R**: $(u,v)\mathcal{R}(u,v) \iff u - v = u - v$ vždy pravda.
S: $(u,v)\mathcal{R}(x,y) \longrightarrow u - v = x - y \longrightarrow x - y = u - v \longrightarrow (x,y)\mathcal{R}(u,v)$.
T: $(u,v)\mathcal{R}(x,y) \wedge (x,y)\mathcal{R}(r,s) \longrightarrow u - v = x - y \wedge x - y = r - s \longrightarrow u - v = r - s \longrightarrow (u,v)\mathcal{R}(r,s)$.
$[(1,2)]_\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2;\ (1,2)\mathcal{R}(x,y)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2;\ 1 - 2 = x - y\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2;\ y = 1 + x\}$
$= \{(k, k+1);\ k \in \mathbb{Z}\}$.
c) **R**: $(u,v)\mathcal{R}(u,v) \iff u - v = v - u$ není vždy pravda.
Protipříklad: neplatí $(1,2)\mathcal{R}(1,2)$, protože neplatí $1 - 2 = 2 - 1$. Není to ekvivalence.
Neplatí ani **T**, ale **S** ano.
d) **R**: $(u,v)R(u,v) \iff uv = uv$ vždy pravda.
S: $(u,v)\mathcal{R}(x,y) \longrightarrow uy = xv \longrightarrow xv = uy \longrightarrow (x,y)\mathcal{R}(u,v)$, ano.
T: $(u,v)\mathcal{R}(x,y) \wedge (x,y)\mathcal{R}(r,s) \longrightarrow uy = xv \wedge xs = ry$. Z první $y = \frac{vx}{u}$ do druhé
$xs = r\frac{vx}{u} \longrightarrow us = rv \longrightarrow (u,v)\mathcal{R}(r,s)$. Ale co když $u = 0$? Rozbor situace, podezření, není tranzitivní!
Protipříklad: $(1,1)\mathcal{R}(0,0)$, $(0,0)\mathcal{R}(2,1)$, ale $(1,1)\mathcal{R}(2,1)$ neplatí.
Není ekvivalence.
5a.5: a) Ano. **R**: $T(1) = T(1)$. **S**: $T(1) = S(1) \longrightarrow S(1) = T(1)$. **T**: $T(1) = S(1) \wedge S(1) = U(1) \longrightarrow T(1) = U(1)$.
Dáno zobrazení T. Pak $[T]_\mathcal{R} = \{S \in A;\ S(1) = T(1)\}$, jsou to všechna zobrazení $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$, jejichž grafy se protínají s grafem T pro $x = 1$.
b) Není **T**; stačí zvolit T tak, aby $T(0) = 1$ a $T(1) = 3$, S tak aby $S(0) = 1$ (pak $(T,S) \in \mathcal{R}$) a $S(1) = 2$ a U tak, aby $U(0) = 5$ a $U(1) = 2$ (pak $(S,U) \in \mathcal{R}$), ale neplatí $(T,U) \in \mathcal{R}$.
c) Ano, důkaz podobné jako (i). Dáno zobrazení T. Pak
$[T]_\mathcal{R} = \{S \in A;\ S(0) = T(0) \wedge S(1) = T(1)\}$, jsou to všechna zobrazení $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$, jejichž grafy se protínají s grafem T pro $x = 0$ a $x = 1$.
d) Není **R** ani **S** ani **T**.
e) Ano. **R**: Pro $T \in A$ zvolíme $C = 0$, pak $T(n) - T(n) = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}$ a tedy $T\mathcal{R}T$.
S: $T\mathcal{R}S \longrightarrow T(n) - S(n) = C \longrightarrow S(n) - T(n) = -C\ \forall n \in \mathbb{Z} \longrightarrow S\mathcal{R}T$.

T: $[T\mathcal{R}S \wedge S\mathcal{R}U] \longrightarrow [T(n) - S(n) = C_1 \wedge S(n) - U(n) = C_2]\forall n \in \mathbb{Z}$.
Sečteme: $T(n) = U(n) = C_1 + C_2 = C \longrightarrow T\mathcal{R}U$.
Pro dané zobrazení T je $[T]_{\mathcal{R}} = \{S \in A;\ S = T + C$ pro jisté $C \in \mathbb{Z}\}$ neboli jde všechna zobrazení $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$, jejichž grafy jsou celočíselnými posuny grafu T nahoru či dolů.
f) Není **R** ani **T**.
5a.6: **R**: $T(a) = T(a) \longrightarrow a\mathcal{R}a$; **S**: $a\mathcal{R}b \longrightarrow T(a) = T(b) \longrightarrow T(b) = T(a) \longrightarrow b\mathcal{R}a$;
T: $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \longrightarrow T(a) = T(b) \wedge T(b) = T(c) \longrightarrow T(a) = T(c) \longrightarrow a\mathcal{R}c$;
$[a]_{\mathcal{R}} = \{b \in A;\ a\mathcal{R}b\} = \{b \in A;\ T(b) = T(a)\} = T^{-1}[T(a)]$.
5a.7: a) $[p]_{\mathcal{R}}$ jsou všechny polynomy stejného stupně jako p, $[p]_{\mathcal{R}} = \{q;\ \deg(q) = \deg(p)\}$.
b) $[p]_{\mathcal{R}}$ jsou všechny polynomy, které mají stejné reálné kořeny včetně násobnosti. Znamená to, že oba mají v kořenovém rozkladu stejné lineární faktory, ale mohou se lišit v těch kvadratických. Dá se říct, že $[p]_{\mathcal{R}}$ obsahuje všechny polynomy, které mohou vzniknout jako $p\frac{r_1}{r_2}$, kde r_1, r_2 jsou nenulové polynomy bez reálných kořenů. Například $[x-13]_{\mathcal{R}}$ bude mimo jiné obsahovat polynomy $x - 13$, $2x - 26$, $(x-13)(x^2+1)$ atd.
c) $[p(x)]_{\mathcal{R}}$ jsou všechny polynomy, které mají stejné (reálné i komplexní) kořeny včetně násobnosti. To ale znamená, že mají stejné kořenové faktory $(x - \lambda)$ v rozkladu, mohou se tedy lišit jen konstantou před kořenovými faktory. Závěr: Jde o nenulové(!) násobky p, $[p]_{\mathcal{R}} = \{a \cdot p;\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.
5a.8: a) Zaveďte si $j(r)$ jako počet jedniček v řetězci r, pak $a\mathcal{R}b \iff j(a) = j(b)$ a důkaz je stejný jako třeba ve cvičení 5a.2.
$[1001]_{\mathcal{R}}$ jsou všechny řetězce s přesně dvěma jedničkami. $[0]_{\mathcal{R}}$ jsou všechny řetězce bez jedniček.
b) Zaveďte $j(a)$ jako počet jedniček, pak $a\mathcal{R}b \iff j(a) - j(b) = 2k$ pro $k \in \mathbb{Z}$, je to kombinace cvičení 5a.2 a cvičení 5a.3 b).
$[1001]_{\mathcal{R}}$ jsou všechny řetězce se sudým počtem jedniček, ditto $[0]_{\mathcal{R}}$.
5a.9: a) Ne, chybí 4.
b) Ano viz obrázek.
c) Ne, překryv, $\{1,2,4,5\} \cap \{3,4\} \neq \emptyset$.



5a.10: a) Ano. b) Ne, chybí řetěce začínající 01. c) Ne, množiny se překrývají, třeba řetězec 001 je v prvních dvou. d) Ano.
5a.11: a) Ne, třeba pár (sudá, lichá) je v první i druhé množině. b) Ano, každý pár někam patří, žádný není v obou. c) Ne, nepokrývá páry, ve kterých je nula.
5a.12: Průnik: viz fakt 4c.9.
Nechť $a \in A$. Pak $(a,a) \in \mathcal{R}_1$, proto $(a,a) \notin \overline{\mathcal{R}}_1$, tedy $\overline{\mathcal{R}}_1$ není reflexivní, tudíž ani ekvivalence.
Nechť $a \in A$. Pak $(a,a) \in \mathcal{R}_1$ a $(a,a) \in \mathcal{R}_2$, proto $(a,a) \notin \mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2$, tedy $\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2$ není reflexivní, tudíž ani ekvivalence.
5a.13: $\Longrightarrow$: Nechť $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{R}_1$. Tvrdíme, že vždy $[a]_{\mathcal{R}_2} \subseteq [a]_{\mathcal{R}_1}$: $b \in [a]_{\mathcal{R}_2} \longrightarrow a\mathcal{R}_2 b \longrightarrow a\mathcal{R}_1 b \longrightarrow b \in [a]_{\mathcal{R}_1}$.
$\Longleftarrow$: Nechť je $\{[a]_{\mathcal{R}_2}\}$ zjemnění $\{[a]_{\mathcal{R}_1}\}$. Nechť $a\mathcal{R}_2 b$. Pak $b \in [a]_{\mathcal{R}_2}$. Díky předpokladu o zjemnění musí existovat množina z $\{[a]_{\mathcal{R}_1}\}$ taková, že $[a]_{\mathcal{R}_2}$ je její podmnožinou, tedy existuje $c \in A$ takové, že $[a]_{\mathcal{R}_2} \subseteq [c]_{\mathcal{R}_1}$. Pak tedy i $a, b \in [c]_{\mathcal{R}_1}$ a proto $a\mathcal{R}_1 b$.
5a.14: Ano. Vznikne tak ekvivalentní uzávěr. Pozor, na pořadí záleží, viz příklad 5a.j a cvičení 4c.16.
5a.15: Ekvivalence je reflexivní. Je cirkulární? Nechť $a\mathcal{R}b\mathcal{R}c$. Z tranzitivity $a\mathcal{R}c$, pak ze symetrie $c\mathcal{R}a$.
Nechť je $\mathcal{R}$ reflexivní a cirkulární. Symetrie: Nechť $a\mathcal{R}b$. Z reflexivity i $b\mathcal{R}b$, proto cirkularita dává $b\mathcal{R}a$. Tranzitivita: Nechť $a\mathcal{R}b\mathcal{R}c$. Cirkularita dá $c\mathcal{R}a$, symetrie pak $a\mathcal{R}c$.

5b. Zajímavé ekvivalence

V kapitole 2 jsme představili kongruenci modulo n a nakonec jsme dospěli k prostoru $\mathbb{Z}_n$, který jsme v sekci 2c interpretovali jako množinu zbytkových tříd. Pomocí operací pro celá čísla jsme tam zavedli operace pro zbytkové třídy.

Tento přístup se v matematice objevuje častěji a čtenář už se s ním určitě několikrát setkal. Proto se matematikům vyplácí zavést pro množinu zbytkových tříd speciální název.

> **Definice.**
> Nechť $\mathcal{R}$ je relace ekvivalence na množině A. Množině $\{[a]_{\mathcal{R}};\ a \in A\}$ říkáme **faktorová množina podle ekvivalence** $\mathcal{R}$ a značíme ji $A/\mathcal{R}$.

Nyní se podíváme na několik známých příkladů ekvivalencí.

5b.1 Zlomky

Čtenář dávno zná množinu $\mathbb{Q}$ racionálních čísel a možná mu ani nepřišlo zvláštní, že se totéž racionální číslo dá zapsat mnoha různými způsoby. Je za tím ale schováno docela dost matematické práce.

Zlomek je vlastně speciální symbol pro uchování dvou čísel, z nichž druhé nesmí být nula. Pro uchování takové informace běžně používáme vektory, takže není problém provizorně vytvořit množinu zlomků neboli „fractions“

$$\mathbb{F} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \big\{(p,q);\ p,q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\big\}.$$

Pro prvky této množiny zavedeme základní operace:

$$(p,q) + (u,v) = (pv + uq, qv),$$
$$(p,q) \cdot (u,v) = (pu, qv).$$

Rutinní důkazy potvrdí, že tyto operace splňují všechna pravidla, která očekáváme, viz kapitola 19 a cvičení 5b.1.

Z historických a praktických důvodů se pro vektory (p,q) používá stručnější značka $\frac{p}{q}$, která teď neznačí dělení, ale je to obrázek zvaný zlomek zastupující jistý vektor. Operace se pak zapíšou známým způsobem

$$\frac{p}{q} + \frac{u}{v} = \frac{pv + uq}{qv},$$
$$\frac{p}{q} \cdot \frac{u}{v} = \frac{pu}{qv}.$$

Podobně jako v kapitole 2 pak zavedeme opačný a inverzní zlomek a snadno ověříme, že $\left(-\frac{p}{q}\right) = \frac{-p}{q}$ a pro zlomky s $p \neq 0$ zase $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$.

Tím vznikne svět zlomků, ale nikoliv racionální čísla, protože tyto zlomky zatím nemají přiřazenou hodnotu a také je neumíme ztotožňovat. To napravíme pomocí relace.

Chceme, aby se zlomky $\frac{p}{q}$ a $\frac{u}{v}$ rovnaly, pokud reprezentují stejnou kvantitu. Geometricky, $\frac{p}{q}$ reprezentuje délku, kterou získáme rozdělením úsečky dlouhé p jednotek na q dílů (podle znamének pak vybereme orientaci). Délka jednoho dílku pak je (ve světě reálných čísel) podíl $p \div q$. Pokud má toto být stejné jako délka reprezentovaná zlomkem $\frac{u}{v}$, pak to znamená rovnost podílů $p \div q = u \div v$. My ale preferujeme nedělit, proto to přepíšeme do podoby součinu.

Definice.
Definujeme relaci $\sim$ na množině $\mathbb{F}$ předpisem $\frac{p}{q} \sim \frac{u}{v}$ právě tehdy, když $pv = uq$.

Například $\frac{1}{3} \sim \frac{2}{6}$, protože $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$.

Shodou okolností jsme přesně tuto relaci vyšetřovali na $\mathbb{Z}^2$ v příkladě 5a.4 a ukázalo se, že není tranzitivní. Ovšem protipříklad potřeboval mít $v = 0$, což pro $\mathbb{F}$ není možné. Relace $\sim$ je tedy ekvivalence.

Třída ekvivalence $\left[\frac{p}{q}\right]_\sim$ konkrétního zlomku je pak množina všech zlomků, které reprezentují stejnou (orientovanou) délku, což jsme přesně potřebovali.

Definice.
Definujeme racionální čísla $\mathbb{Q}$ jako množinu všech tříd ekvivalence $\sim$ na $\mathbb{F}$.

Snadno ukážeme, že $\frac{p}{q} \sim \frac{-p}{-q}$ a $\frac{-p}{q} \sim \frac{p}{-q}$. To prakticky znamená, že pro každou třídu $\left[\frac{p}{q}\right]$ je možné vybrat zástupce $\frac{u}{v}$ splňujícího $v > 0$, což se někdy hodí.

Ve skutečnosti tedy při práci s racionálními čísly nepočítáme s jednotlivými zlomky, ale se zástupci tříd.

Podobně jako v sekci 2c můžeme pro racionální čísla neboli třídy zlomků definovat operace:

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{u}{v}\right] = \left[\frac{p}{q} + \frac{u}{v}\right],$$
$$\left[\frac{p}{q}\right] \cdot \left[\frac{u}{v}\right] = \left[\frac{p}{q} \cdot \frac{u}{v}\right],$$

Stejně jako v dotyčné kapitole je pak třeba ukázat, že výsledky těchto operací nezávisí na tom, jaké zástupce tříd vybereme, viz cvičení 5b.2.

Víme, že při výpočtu můžeme zlomky nahrazovat volně jinými dle určitých pravidel (například krácením). Odpovídá to naší zkušenosti z kapitoly 2, že si můžeme při práci zástupce tříd vybírat podle libosti či potřeby.

Je pak také potřeba pro jednotlivé třídy definovat absolutní hodnotu (velikost) a porovnávání $<$, $\leq$ atd. (viz poznámka v příkladu 6a.4), což je spíše dlouhé než obtížné.

5b.2 Primitivní funkce

Tradičním úvodním matematickým předmětem na vysoké škole je kalkulus neboli analýza. Tam se student seznámí s pojmem primitivní funkce, který je vcelku jednoduchý: Je to funkce splňující určitý požadavek. Například $x^2 + 13$ je primitivní funkce k $2x$ na $\mathbb{R}$, totéž platí třeba o $x^2 + 23$. Objevuje se tam ale také pojem neurčitého integrálu, který je formálně méně jasný. Co míníme zápisem $\int 2x\,dx = x^2 + C$? Ukažme jednu možnou interpretaci.

Zvolme otevřený interval I a uvažujme množinu A všech reálných funkcí definovaných a diferencovatelných na I. Na této množině zavedeme relaci:

$$F\mathcal{R}G \text{ právě tehdy, když } F' = G'.$$

Snadno ukážeme, že je to ekvivalence (cvičení 5b.3).

Když k nějaké funkci f najdeme jednu její primitivní funkci F, tak třída ekvivalence $[F]_{\mathcal{R}}$ obsahuje všechny primitivní funkce k f. Kdykoliv pracujeme se symbolem $\int f\,dx$, tak vlastně pracujeme s touto třídou ekvivalence. Jsou situace (například při integraci per partes nebo při výpočtu určitého integrálu), kdy potřebujeme nějakou primitivní funkci a vybíráme si dle libosti, což zase odpovídá naší zkušenosti s ekvivalencemi, že ve vhodných aplikacích na konkrétní volbě zástupce třídy nezáleží.

5b.3 Geometrické vektory

V geometrii si vektor představujeme jako šipky v rovině či prostoru. Existují dva úhly pohledu.

Takzvané vázané vektory mají začátek a konec. Máme-li dva body A, B, tak z A do B vede vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Tato představa je užitečná například ve fyzice, protiže třeba u sil je důležitá nejen velikost a směr, ale i působiště.

Na druhou stranu jsme zvyklí vektory volně posouvat (třeba když je sčítáme) a typicky je zapisujeme dvojicí či trojicí souřadnic, tedy stejně jako body, nikoliv jako dvojici bodů. V tom případě jde o takzvané volné vektory.

Souvislost mezi nimi je jednoduchá, pokud umíme relace. Prohlásíme, že dva vázené vektory jsou spolu v relaci, pokud dokážeme ten druhý získat posunem prvního (nesmíme jej otáčet či deformovat). Lze také použít specifikaci, že dva vázané vektory jsou v relaci, pokud mají stejnou délku a směr.

Snadno se ukáže, že tato relace je ekvivalence na množině všech vázaných vektorů v prostoru, ve kterém pracujeme (2D, 3D, …). Její třídy ekvivalence jsou pak volné vektory. Když pracujeme s konkrétním volným vektorem, tedy s konkrétní třídou ekvivalence, tak si v mnoha situacích můžeme vybrat, který vázaný vektor z dotyčné třídy použijeme.

Cvičení

Cvičení 5b.1: Uvažujme operace definované vzorci $\frac{p}{q} + \frac{u}{v} = \frac{pv+uq}{qv}$ a $\frac{p}{q} \cdot \frac{u}{v} = \frac{pu}{qv}$.
a) Dokažte, že jsou komutativní (tedy na pořadí nezáleží).
b) Dokažte, že pro obě operace existuje prvek identity, konkrétně že $\frac{p}{q} + \frac{0}{1} = \frac{p}{q}$ a $\frac{p}{q} \cdot \frac{1}{1} = \frac{p}{q}$.

Cvičení 5b.2: Uvažujme $\frac{p}{q}, \frac{P}{Q}, \frac{u}{v}, \frac{U}{V} \in \mathbb{F}$.
Dokažte, že jestliže $\frac{p}{q} \sim \frac{P}{Q}$ a $\frac{u}{v} \sim \frac{U}{V}$, pak $\frac{p}{q} + \frac{u}{v} \sim \frac{P}{Q} + \frac{U}{V}$ a $\frac{p}{q} \cdot \frac{u}{v} \sim \frac{P}{Q} \cdot \frac{U}{V}$.
To ukazuje, že definice operací pro třídy je korektní (výsledek nezáleží na volbě zástupce).

Cvičení 5b.3: Uvažujme množinu A všech funkcí definovaných a diferencovatelných na jistém otevřeném intervalu I. Relace $\mathcal{R}$ na A je definována takto: $F\mathcal{R}G$ právě tehdy, když $F' = G'$.
Dokažte, že je to ekvivalence.

Cvičení 5b.4 (poučné)**:** Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině všech trojúhelníků v rovině definovaná takto: $a\mathcal{R}b$ jestliže lze trojúhelník a získat z trojúhelníka b posunem, rotací, zrcadlením či kombinací několika těchto transformací. Dokažte, že je to relace ekvivalence.
Poznámka: Toto nám umožní redukovat všechny trojúhelníky v rovině jen na informaci o jejich délkách stran a úhlech.

Cvičení 5b.5 (poučné)**:** Uvažujme šachovnici 2×2, nechť A je množina všech možných obarvení polí této šachovnice bílou a černou (rozumí se tím, že každé pole je vybarveno právě jednou z těchto dvou barev). Definujeme relaci $\mathcal{R}$ na A předpisem: $a\mathcal{R}b$ jestliže lze obarvení b získat z obarvení a rotací či zrcadlením šachovnice či kombinací několika těchto transformací. (Zpřesňující poznámka: připouští se jen takové rotace a zrcadlení, aby byla zase šachovnice jako celek v základní pozici, čili rotace o násobky pravého úhlu a zrcadlení okolo os souměrnosti šachovnice). Dokažte, že jde o relaci ekvivalence, a najděte množinu nějakých obarvení tak, aby byla nejmenší možnou množinou zástupců tříd ekvivalence.

Řešení:

5b.1: a) $\frac{p}{q}+\frac{u}{v}=\frac{pv+uq}{qv}=\frac{uq+pv}{vq}=\frac{u}{v}+\frac{p}{q}$. $\frac{p}{q}\cdot\frac{u}{v}=\frac{pu}{qv}=\frac{up}{vq}=\frac{u}{v}\cdot\frac{p}{q}$.
b) $\frac{p}{q}+\frac{0}{1}=\frac{p\cdot 1+0\cdot q}{q\cdot 1}=\frac{p}{q}$. $\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{1}=\frac{p\cdot 1}{q\cdot 1}=\frac{p}{q}$.
5b.2: Předpoklad dává $pQ=Pq$ a $uV=Uv$.
Víme: $\frac{p}{q}+\frac{u}{v}=\frac{pv+uq}{qv}$, $\frac{P}{Q}+\frac{U}{V}=\frac{PV+UQ}{QV}$. Pomocí předpokladu $(pv+uq)(QV)=pQvV+uVqQ=PqvV+UvqQ=(PV+QU)qv$, tedy $\frac{pv+uq}{qv}\sim\frac{PV+UQ}{QV}$.
Víme: $\frac{p}{q}\cdot\frac{u}{v}=\frac{pu}{qv}$, $\frac{P}{Q}\cdot\frac{U}{V}=\frac{PU}{QV}$. Pomocí předpokladu $(pu)(QV)=pQuV=PqUv=(PU)(qv)$, tedy $\frac{pu}{qv}\sim\frac{PU}{QV}$.
5b.3: **R**: ano; $F\in A\longrightarrow F'=F'\longrightarrow F\mathcal{R}F$. **S**: ano; $F\mathcal{R}G\longrightarrow F'=G'\longrightarrow G'=F'\longrightarrow G\mathcal{R}F$. **T**: ano; $[F\mathcal{R}G\wedge G\mathcal{R}H]\longrightarrow[F'=G'\wedge G'=H']\longrightarrow F'=H'\longrightarrow F\mathcal{R}H$.
5b.4: **R**: trojúhelník získáme z něj samého žádnou transformací.
S: získali jsme b z a pomocí transformací, tak je uděláme pozpátku a naopak a dostaneme z b to a.
T: z a získáme transformacemi b, z toho pak transformacemi c, spojíme transformace v jeden řetízek transformací, pak dostáváme z a transformacemi c.
5b.5: Ekvivalence: Podobné předchozímu.
Množina: viz pět obarvení napravo, ostatní z nich dostaneme ale jedno z druhého ne.

b	b	c	b	c	c	c	b	c	c	c	c
b	b	b	b	b	b	b	c	c	b	c	c