6. Speciální relace: Uspořádání

Vztahy mohou mít podobu hierarchie. Například předměty vyučované na univerzitě mohou mít prerekvizity, čímž vznikají omezení na to, v jakém pořadí je možné je zapsat. Podobně ve výrobě existují omezení na to, v jakém pořadí je možno vykonávat jednotlivé úkony. Jiným a názorným příkladem hierarchie bývají organizační pavouky ve firmách. Takové vztahy zachycuje speciální typ relace.

6a. Částečná uspořádání

Jako velmi užitečná se při práci s hierarchiemi ukázala kombinace vlastností **RAT**.

! **Definice.**
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A. Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **částečné uspořádání**, jestliže je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.
V tom případě řekneme, že dvojice $(A,\mathcal{R})$ je **částečně uspořádaná množina**.

A relation $\mathcal{R}$ on a set A is called a **partial ordering** or a **partial order** if it is reflexive, antisymmetric and transitive.
In that case we say that the pair $(A,\mathcal{R})$ is a **partially ordered set**, often we just say **poset**.

Často říkáme jen „uspořádání“. Postupně poznáme i další typy uspořádání (ostré, lineární, dobré) a u těch budeme důsledně uvádět typ, takže by nemělo docházet k nedorozumění. Budeme také říkat jen „uspořádaná množina“, což je sice kratší než plný oficiální název, ale stručnosti anglického „poset“ to bohužel nedosahuje. V češtině se kupodivu neujalo „čumnožina“ ani „čužina“.

Nejznámějším příkladem částečného uspořádání je nerovnost $\le$ na libovolné podmnožině reálných čísel, například $\mathbb{Z}$ nebo $\mathbb{N}$. Není to ale příklad nejvhodnější, protože je tato relace příliš pěkná. Pokud bychom se při přemýšlení o uspořádáních nechávali ovlivňovat našimi zkušenostmi s touto relací, tak by nás taky napadaly věci, které pro obecná uspořádání neplatí. Přesto pro nás bude nerovnost v mnohém inspirativní, například ohledně značení.

! **Značení.**
Jestliže je relace $\mathcal{R}$ na A částečným uspořádáním, tak se namísto $a\mathcal{R}b$ obvykle píše $a \preceq b$. Také hovoříme o částečně uspořádané množině $(A,\preceq)$.

Vhodnější příklad částečného uspořádání už dobře známe.

Příklad 6a.a: Uvažujme relaci dělitelnosti na množině $\mathbb{N}$. Fakt 1a.1, věta 1a.21 a věta 1a.25 potvrzují, že je to částečné uspořádání.

Oproti běžné nerovnosti je zde podstatný rozdíl. Nerovnost dokáže daná čísla srovnat do jednoznačného pořadí, což je výjimečné. Mnohem častěji nastává situace jako u dělitelnosti, kdy dokážeme hierarchii rozpoznat jen pro některé dvojice. Například pokud uvažujeme dělitelnosti na množině $\{2,3,6\}$, tak je 6 nadřazeno všem číslům v množině, ale dělitelnost nedokáže porovnat čísla 2 a 3 a přidělit jim pořadí. To je mnohem typičtější chování částečného uspořádání.

Připomeňme, že dělitelnost není částečné uspořádání na $\mathbb{Z}$, protože máme $13\,|\,(-13)$ a $(-13)\,|\,13$, tedy protipříklad na antisymetrii.

Dělitelnost je vhodným příkladem nejen tím, že ji dobře známe, ale také z toho důvodu, že vystihuje chování částečných uspořádání. Dá se dokázat (viz kapitola 20c), že pro libovolnou (konečnou) částečně uspořádanou množinu $(A,\preceq)$ je možné prvky množiny očíslovat tak, že relace dělitelnosti na těchto číslech bude souhlasit s relací $\preceq$ na odpovídajících prvcích. Můžeme říct, že dělitelnost je univerzální model pro (konečná) částečná uspořádání, a dokonce umí simulovat chování i některých nekonečných uspořádaných množin. Je to tedy ideální pokusný králík, když přemýšlíme nad tím, jak fungují uspořádání.
△

Příklad 6a.b: Uvažujme relaci $\subseteq$ na nějaké kolekci množin $\mathcal{M}$. Základní vlastnosti inkluze lze shrnout do tvrzení, že je to částečné uspořádání.

Také u inkluze se setkáváme s případy, kdy není schopna prvky (množiny) mezi sebou porovnat. Například u množin $\{13\}$ a $\{23\}$ neumí říct, která je které nadřazena, protože neplatí ani $\{13\}\subseteq\{23\}$, ani $\{23\}\subseteq\{13\}$.

I tento příklad je nejen známý, ale také univerzální pro (konečné) částečně uspořádané množiny.
△

U ekvivalencí jsme měli významný typ, kdy vztah mezi objekty vznikal pomocí shody parametrů. Můžeme parametry používat také k zavádění hierarchie mezi objekty, ale tím částečné uspořádání nevzniká.

Příklad 6a.c: Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ danou předpisem $|x| \leq |y|$ třeba na množině $\mathbb{Z}$. Víme, že tato relace je reflexivní a tranzitivní, ale bohužel není antisymetrická: například $(-13)\mathcal{R}13$ a $13\mathcal{R}(-13)$, přitom neplatí $-13 = 13$. Tato relace proto není částečným uspořádáním. Přesto je to bezesporu užitečná relace, často porovnáváme objekty (ve fyzice třeba vektory) podle jejich velikosti neboli magnitudy.

Pro takovéto relace je potřeba vytvořit vlastní teorii, ale je také možné se od nich dostat k zajímavým trikem k uspořádání, viz příklad 6a.e a poznámka 6a.4.

△

Výsledky z kapitoly 4 (věty 4c.5, 4c.7, 4c.3, 4c.9 a 4c.12) nám dají následující:

Důsledek 6a.1.
(i) Jestliže je relace $\preceq$ částečné uspořádání na množině A, pak je také její restrikce na libovolnou podmnožinu A zase částečné uspořádání.
(ii) Jestliže je relace $\preceq$ částečné uspořádání na množině A, pak je také $\preceq^{-1}$ částečné uspořádání na A.
(iii) Jestliže je relace $\preceq$ částečné uspořádání na množině A, pak $\preceq^n = \preceq$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Také mocnina je tedy částečné uspořádání.
(iv) Jestliže jsou $\preceq_1, \preceq_2$ částečná uspořádání na množině A, pak je také $\preceq_1 \cap \preceq_2$ částečné uspořádání.
(v) Nechť pro $i = 1, \dots, n$ je $\preceq_i$ částečná uspořádání na množině A_i. Pak je také příslušná součinová relace $\mathcal{R}$ na množině $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ částečné uspořádání.

Takže i částečné uspořádání se chová rozumně vůči běžných operacím s výjimkou skládání, při složení dvou částečných uspořádání se nemusí zachovat antisymetrie. Jednoduchý protipříklad na $A = \{1, 2\}$:

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (2,2)\}, \mathcal{S} = \{(1,1), (2,1), (2,2)\}.$$

Pak díky dvojkrokům $1\mathcal{R}2\mathcal{S}2$ a $2\mathcal{R}2\mathcal{S}1$ máme v $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ dvojice $(1,2)$ i $(2,1)$. Nemusí se zachovat ani tranzitivita, na příklad potřebujeme větší množinu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a relace

$$\mathcal{R} = \Delta(A) \cup \{(1,2), (3,4)\}, \mathcal{S} = \Delta(A) \cup \{(2,3)\}.$$

Obě jsou částečná uspořádání, ovšem $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ obsahuje dvojice $(1,3)$, $(3,4)$, ale nikoliv $(1,4)$.

Připomeňme, že díky reflexivitě $\mathcal{R}$ a $\mathcal{S}$ v obou příkladech musí platit $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, viz cvičení 4c.1.

Situace je jiná u mocniny. Věta 4c.11 ukazuje, že mocnina zachovává reflexivitu a tranzitivitu, a také poté ukazujeme protipříklad vyvracející zachování antisymetrie. Tam ale zkoumáme vlastnosti individuálně, zde máme souběh. Podle důsledku 4c.3 pro reflexivní a tranzitivní relace platí $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}$, takže $\mathcal{R}^n$ má všechny vlastnosti $\mathcal{R}$ včetně antisymetrie. Je zajímavé, že u částečných uspořádání se lze odvolat i na jinou kombinaci vlastností. Když je relace antisymetrická a tranzitivní, tak i mocnina musí být antisymetrická, viz cvičení 6a.10.

Inverzní relace má u uspořádání významnější roli než obvykle, ostatně čtenář zná spřízněnost nerovností $\leq$ a $\geq$ či vlastností býti podmnožinou a býti nadmnožinou. I většina pojmů, které dále probereme, si velice dobře rozumí s přechodem k $\preceq^{-1}$.

→ Díky své užitečnosti má inverzní relace u uspořádání zvláštní název. Je-li dána částečně uspořádaná množina $(A, \preceq)$, pak se $(A, \preceq^{-1})$ říká **duální uspořádání** (**dual order**). Zde to nebudeme používat, protože nepůjdeme do teorie tak hluboko, aby se to vyplatilo, už tak je tu dost názvů. ←

Již jsme komentovali, že porovnávání podle velikosti nezapadá do typu relace, který zde zkoumáme. Platí to i pro další velmi známou porovnávací relaci.

Příklad 6a.d: Uvažujme relaci $<$ na množině $\mathbb{R}$. V příkladě 4b.c jsme ukázali, že tato relace je antisymetrická a tranzitivní, ale není reflexivní. Nejde tedy o částečné uspořádání. Tato relace je ovšem antireflexivní a asymetrická, viz část 4d.

△

Ani na tuto bezesporu užitečnou relaci tedy nebude možné aplikovat poznatky o částečných uspořádáních. Je ale inspirací pro jiný typ relací.

Definice.
Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na množině A. Řekneme, že $\mathcal{R}$ je **ostré uspořádání** (**strict ordering**), jestliže je asymetrická a tranzitivní.

Asymetrická relace je také antireflexivní a antisymetrická; platí to i naopak, antisymetrie a antireflexivita již dávají asymetrii. Je zajímavé, že je také možné v definici požadovat antireflexivitu a tranzitivitu, protože pak už asymetrie automaticky vyplyne, viz cvičení 4d.2.

Pro ostrá uspořádání se dá udělat teorie s věcmi obdobnými těm, které budeme pro částečná uspořádání dělat v této kapitole. My se jim zde věnovat nebudeme, spíše nás zajímá vztah k částečnému uspořádání. Ukážeme, že spojitost mezi nerovnostmi $\leq$ a $<$ má analogii u obecných uspořádání.

Věta 6a.2.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A.
(i) Jestliže je $\mathcal{R}$ částečné uspořádání, pak $\mathcal{S} = \mathcal{R} \setminus \Delta(A)$ je ostré uspořádání.
(ii) Jestliže je $\mathcal{R}$ ostré uspořádání, pak $\mathcal{S} = \mathcal{R} \cup \Delta(A)$ je částečné uspořádání.

Připomeňme, že $\Delta(A) = \{(a,a);\ a \in A\}$. Slabší tvrzení jsme již viděli dříve (fakt 4d.2), nyní provedeme plný důkaz.

Důkaz (poučný)**:** (i): Už definice $\mathcal{S}$ vylučuje případ $a\mathcal{S}a$ pro jakékoliv $a \in A$. Je to tedy relace antireflexivní.
Asymetrie: Sporem. Předpokládejme, že existují $a,b \in A$ takové, že $(a,b) \in \mathcal{S}$ a $(b,a) \in \mathcal{S}$. Protože $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$, pak by také platilo $(a,b) \in \mathcal{R}$ a $(b,a) \in \mathcal{R}$, z antisymetrie $\mathcal{R}$ pak $a = b$. Pak $(a,b) \in \mathcal{S}$ implikuje $(a,a) \in \mathcal{S}$, což je ve sporu s antireflexivitou $\mathcal{S}$.
Tranzitivita: Nechť pro $a,b,c \in A$ platí $(a,b) \in \mathcal{S}$ a $(b,c) \in \mathcal{S}$. Pak $(a,b) \in \mathcal{R}$ a $(b,c) \in \mathcal{R}$, z tranzitivity $\mathcal{R}$ proto $(a,c) \in \mathcal{R}$. Díky asymetrii $\mathcal{S}$ nelze mít $a = c$, proto $(a,c) \notin \Delta(A)$ a tedy $(a,c) \in \mathcal{R} \setminus \Delta(A) = \mathcal{S}$.
(ii): Reflexivita: pro všechna $a \in A$ máme $(a,a) \in \Delta(A) \subseteq \mathcal{S}$.
Antisymetrie: Nechť $a,b \in A$ splňují (a,b) a $(b,a) \in \mathcal{S}$. Jsou dvě možnosti: Případ 1: $(a,b) \in \Delta(A)$. Pak $a = b$, hotovo.
Případ 2: $(a,b) \in \mathcal{R}$. Podle asymetrie pak $(b,a) \notin \mathcal{R}$, ale $(b,a) \in \mathcal{S}$. Musí tedy $(b,a) \in \Delta(A)$ a proto $a = b$.
Tranzitivita: Nechť $a,b,c \in A$ splňují $(a,b) \in \mathcal{S}$ a $(b,c) \in \mathcal{S}$.
Případ 1: Jestliže $a = b$, pak $(b,c) \in \mathcal{S}$ znamená $(a,c) \in \mathcal{S}$.
Případ 2: Jestliže $b = c$, pak $(a,b) \in \mathcal{S}$ znamená $(a,c) \in \mathcal{S}$.
Případ 3: $a \neq b \neq c$. Pak $(a,b), (b,c)$ nejsou v $\Delta(A)$, podle definice $\mathcal{S}$ proto musí platit $(a,b) \in \mathcal{R}$ a $(b,c) \in \mathcal{R}$ a díky tranzitivitě $\mathcal{R}$ tedy $(a,c) \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$.

□

Situace z části (i) je v aplikacích užitečná a má svou terminologii. V definici uvedeme alternativní popis relace $\mathcal{R} \setminus \Delta(A)$.

Definice.
Nechť $\preceq$ je částečné uspořádání na množině A. Definujeme pro něj **odvozenou relaci** (**derived relation**) $\prec$ na A takto: $a \prec b$ právě tehdy, když $a \preceq b$ ale $a \neq b$.

Pro dvojici $a \prec b$ říkáme, že a je **předchůdce** (**predecessor**) prvku b a b je **následník** (**successor**) prvku a.

Tyto obecné pojmy se chovají povědomým způsobem.

Fakt 6a.3.
Nechť $\preceq$ je částečné uspořádání na množině A a $\prec$ je odvozená relace.
(i) Nechť $a,b \in A$. Jestliže $a \prec b$, pak $a \preceq b$.
(ii) Nechť $a,b \in A$. Nemůže platit najednou $a \preceq b$ a $b \prec a$.
(iii) Nechť $a,b,c \in A$. Jestliže ($a \preceq b$ a $b \prec c$) nebo ($a \prec b$ a $b \preceq c$), pak nutně $a \prec c$.

Důkaz (rutinní)**:** (i): Toto je jasné z definice $\prec$. Množinově: $\prec \subseteq \preceq$.
(ii): Sporem: Kdyby platilo $a \preceq b$ a $b \prec a$, tak z toho druhého máme i $b \preceq a$. Z antisymetrie $\preceq$ pak $a = b$, to je ale ve sporu s předpokladem $b \prec a$.
(iii): Předpokládejme, že $a \preceq b$ a $b \prec c$. Pak podle (i) také $b \preceq c$, máme tedy řetězec $a \preceq b \preceq c$ a podle tranzitivity $\preceq$ také $a \preceq c$. Zbývá ukázat, že nemůže nastat $a = c$.
To dokážeme sporem. Kdyby $a = c$, pak se z $a \preceq b$ stane $c \preceq b$, což je podle (ii) ve sporu s $b \prec c$.
Důkaz pro případ $a \prec b$ a $b \preceq c$ je obdobný a přenecháme jej čtenáři jako cvičení.

□

Ostrá uspořádání zde nebudeme studovat, ale odvozená uspořádání budeme v následujících sekcích používat pro efektivnější vyjadřování.

Viděli jsme, že porovnávání podle parametru, například velikosti, váhy a podobně, obvykle nevytváří částečné uspořádání. Část (ii) Věty 6a.2 nabízí možnost, jak taková porovnávání upravit, aby se staly částečným uspořádáním a mohly tak využít našich poznatků.

Příklad 6a.e: Rádi bychom porovnávali reálná čísla podle velikosti, ale zjistili jsme, že relace daná podmínkou $|x| \leq |y|$ není antisymetrická a tedy ani částečné uspořádání. Když ale přejdeme k relaci dané podmínkou $|x| < |y|$, bude tranzitivní a asymetrická. Podle (ii) věty 6a.2 je tedy možné získat částečné uspořádání následující definicí:
- $x \preceq y$ právě tehdy když $|x| < |y|$ nebo $x = y$.

Podobně bychom mohli porovnávat vektory z $\mathbb{R}^2$ pomocí jejich velikost neboli normy, definice je
- $(u, v) \preceq (x, y)$ právě tedy, když $\|(u, v)\| < \|(x, y)\|$ nebo $(u, v) = (x, y)$.

Stejným principem je možné porovnávat podle číselného parametru libovolné objekty, od matic přes zvířátka po planety, přičemž je to částečné uspořádání, viz cvičení 6a.5 b).

Nevýhodou tohoto přístupu je, že u objektů stejné „velikosti“ nevzniká v této relaci vztah. Například u čísel neplatí $-2 \preceq 2$ ani $2 \preceq -2$, u vektorů zase máme například $(1, -1) \preceq (3, 7)$, ale neexistuje vztah mezi vektory $(1, 2)$ a $(2, 1)$. To může být v aplikacích nepříjemné, ale někdy to nevadí.
△

6a.4 Poznámka (pokročilá): Relace dané podmínkou $|x| \leq |y|$ pro čísla či $\|\vec{x}\| \leq \|\vec{y}\|$ pro vektory jsou typickým případem tzv. **kvaziuspořádání** (**quasi-ordering**)), což jsou relace, která jsou reflexivní a tranzitivní, ale nemusí být mršky antisymetrické. Ukázali jsme, jak od nich přejít k částečným uspořádáním oklikou přes odvozené ostré uspořádání. Existuje také způsob, jak z nich vytvořit částečné uspořádání pomocí postupu z kapitoly 5.

Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na množině A, která je reflexivní a tranzitivní. Pak $\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ je vždy ekvivalence (viz cvičení 4c.10). Uvažujme množinu B všech tříd ekvivalence $\mathcal{S}$. Finta je v tom, že dvojice, které nám v $\mathcal{R}$ kazily antisymetrii, splňují $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$, tedy platí pro ně $a\mathcal{S}b$ a staly se součástí jedné třídy ekvivalence neboli jedním prvkem v množině B.

Na B zavedeme relaci
- $[a]_{\mathcal{S}} \preceq [b]_{\mathcal{S}}$ právě tehdy, když $a\mathcal{R}b$.

Tato definice je korektní, protože nezávisí na volbě zástupců. Uvažujme $u \in [a]_{\mathcal{S}}$ a $v \in [b]_{\mathcal{S}}$. Pak $u\mathcal{S}a$ a $b\mathcal{S}v$, proto $u\mathcal{R}a$ a $b\mathcal{R}v$. Jestliže $a\mathcal{R}b$, tak máme řetízek $u\mathcal{R}a\mathcal{R}b\mathcal{S}v$ a z tranzitivity $u\mathcal{R}v$. Obdobně ukážeme, že z $u\mathcal{R}v$ vyplývá $a\mathcal{R}b$. Pro rozpoznání, zda $[a]_{\mathcal{S}} \preceq [b]_{\mathcal{S}}$, tedy nezáleží na volbě zástupců tříd.

Relace $\preceq$ je částečné uspořádání na B.

R: $\mathcal{R}$ je reflexivní, proto $a\mathcal{R}a$ a tedy i $[a]_{\mathcal{S}} \preceq [a]_{\mathcal{S}}$.

A: Předpokládejme, že $[a]_{\mathcal{S}} \preceq [b]_{\mathcal{S}}$ a $[b]_{\mathcal{S}} \preceq [a]_{\mathcal{S}}$. Podle definice $\preceq$ tedy $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}a$. Podle definice $\mathcal{S}$ tedy $a\mathcal{S}b$ a dostáváme $[a]_{\mathcal{S}} = [b]_{\mathcal{S}}$, přesně jak jsme to potřebovali pro antisymetrii.

T: Předpokládejme, že $[a]_{\mathcal{S}} \preceq [b]_{\mathcal{S}}$ a $[b]_{\mathcal{S}} \preceq [c]_{\mathcal{S}}$. Podle definice $\preceq$ tedy $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}c$. Podle tranzitivity $\mathcal{R}$ dostáváme $a\mathcal{R}c$ a proto $[a]_{\mathcal{S}} \preceq [c]_{\mathcal{S}}$.

Ukažme to pro relaci na $\mathbb{Z}$ danou vztahem $|x| \leq |y|$. Pak $\mathcal{S}$ je relace daná vztahem $|x| = |y|$ a třídy ekvivalence jsou množiny typu $[a] = \{a, -a\}$, tedy $B = \big\{\{a, -a\};\ a \in \mathbb{N}_0\big\}$. Pak platí například $\{-3, 3\} \preceq \{-5, 5\}$.

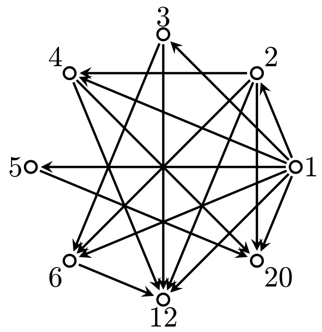
Není to ideální, protože máme relaci částečného uspořádání pro třídy a ne pro jednotlivé prvky, ale občas se to hodí. Například se tímto způsobem definuje nerovnost mezi racionálními čísly, pokud je zavedeme jako třídy ekvivalence zlomků, viz 5b.1.
△

6a.5 Hasseův diagram

Podstata částečných uspořádání se dá často vyjádřit obrázkem. Vychází se při tom z grafu relace, ale pro lepší přehlednost se zjednodušuje.

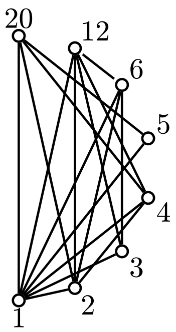
Příklad 6a.f: Uvažujme množinu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 20\}$ uspořádanou dělitelností.

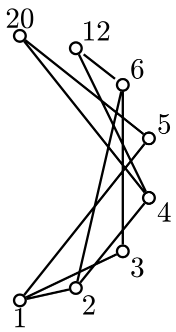
Prvním krokem k přehlednosti grafu je vynechat smyčky. Vlastně tak zakreslíme graf odvozené ostré relace.



Druhým krokem je vynechání hlaviček u šipek, aby se z nich staly jen spojnice. Informaci o uspořádání ovšem musíme zachovat. Za tím účelem zavedeme novou myšlenku: Začneme se zabývat prostorovým (či přesněji rovinným) uspořádáním vrcholů grafu. Přerovnáme jejich pozice tak, aby všechny šipky vedly směrem vzhůru (ne nutně svisle, třeba i šikmo). Pak už hlavičky šipek nemusíme kreslit, protože víme, že spojnice máme interpretovat zdola nahoru.

U dělitelnosti se nabízí jednoduchá myšlenka rozmístit body tak, aby směřovaly vzhůru podle velikosti. Výsledkem je obrázek nalevo.





Připomeňme si jeho souvislost s relací $\preceq$: Platí $a \preceq b$ právě tehdy, pokud $a = b$ nebo existuje spojnice z a směrem vzhůru do b.

Posledním krokem je zjednodušení diagramu tak, abychom neztratili informaci o relaci. K tomu využijeme tranzitivitu. Víme, že když se z nějakého prvku dokážeme dostat do jiného dvojkrokem, tak už jsou v relaci. Proto jsou spojeny i přímou spojnicí, ale my vlastně tuto „přeponu“ v obrázku nepotřebujeme.

Proto postupně procházíme graf a odebíráme spojnice tam, kde je nepotřebujeme. Vznikne tak zjednodušený a proto i přehlednější diagram napravo.

Jeho souvislost s relací $\preceq$ je následující: Platí $a \preceq b$ právě tehdy, pokud $a = b$ nebo lze z a dojít po spojnicích výhradně směrem vzhůru do b. Takže cesta $2 \mapsto 4 \mapsto 20$ ukazuje, že 2 dělí 20, ale neplatí $3 \mid 20$, protože neexistuje cesta z 3 do 20, která by vedla jen směrem vzhůru. Cesta $3 \mapsto 1 \mapsto 5 \mapsto 20$ nevede vzhůru a tak se nepočítá.

Tento diagram jednoznačně určuje relaci $\preceq$ a jmenuje se Hasseův diagram.

△

Protože pro „diagram“ nemáme zaveden oficiální jazyk, neuděláme teď definici, ale neformální úmluvu.

Úmluva.
Uvažujme částečně uspořádanou množinu $(A, \preceq)$. Diagram skládající se ze zakreslených prvků množiny A v rovině a spojnic mezi některými prvky, které nikdy nevedou vodorovně, se nazývá **Hasseův diagram** uspořádání $\preceq$, jestliže splňuje následující:
(i) Pro $a, b \in A$ platí $a \preceq b$ právě tehdy, pokud $a = b$ nebo existují prvky $c_0, c_1, \ldots, c_n$ takové, že $c_0 = a$, $c_n = b$ a pro $i = 1, \ldots, n$ existuje přímá spojnice z c_{i-1} směrem vzhůru do c_i.
Prvkům $\{c_i\}$ pak říkáme cesta směrem vzhůru z a do b.
(ii) Neexistují prvky $a, b \in A$ takové, aby vedla cesta vzhůru z a do b přes nějaké prostředníky a zároveň přímá spojnice z a do b.

Bod (i) vystihuje souvislost mezi diagramem a relací, zatímco bod (ii) je požadavkem na jeho úspornost.

Pokud v Hasseově diagramu existuje přímá spojnice z a vzhůru do b, pak je to považováno za cestu, stačí zvolit $c_0 = a$ a $c_1 = b$. Pak $a \preceq b$. Díky $a \neq b$ také $a \prec b$.

Protože spojnice dávají relační vztah, tak vidíme, že pokud máme cestu vzhůru $\{c_i\}$ z a do b, tak pro každé i platí $c_{i-1} \preceq c_i$. Jinak řečeno, taková cesta je řetízkem z a do b, jak jsme jej zavedli při zkoumání mocniny relace a zejména tranzitivity v kapitole 4, viz fakt 4b.2.

Hasseův diagram se zavádí rovněž pro ostrá uspořádání. Jak jsme viděli v příkladě 6a.f, dané částečné uspořádání a jeho odvozené ostré uspořádání mají stejný diagram.

S Hasseovým diagramem je spojeno několik otázek. První je konceptuální. Diagram lze vnímat jako konkrétní obrázek, ve kterém je důležitá konfigurace bodů a spojnic, například zda se spojnice protínají nebo ne. Tento přístup zde budeme následovat a brzy uvidíme, že v tomto smyslu může mít dané uspořádání více různých diagramů. Druhý přístup je vnímat diagram abstraktně, tedy podstatné je hlavně to, které spojnice se v něm vyskytují a které ne. Tento pohled přiblížíme v bonusové sekci 6a.8 a ukáže se, že v tomto smyslu je pro dané uspořádání jen jeden Hasseův diagram.

Další důležitá otázka zní, zda Hasseův diagram existuje vždy a jak jej efektivně najdeme. V druhé fázi příkladu 6a.f, když jsme přesouvali prvky v rovině, aby všechny šipky směřovalu vzhůru, nám pomohlo, že dělitelnost je vlastně podrelace nerovnosti. Ale jak to zvládneme pro nějakou podivnou relaci s velkou množinou A? Bylo by také dobré vyhnout se únavné poslední fázi odebírání „přepon“.

Odpovědí je následující algoritmus. Uvedeme dvě verze. Spolehlivější postup pracuje se seznamem ostrých uspořádání pro danou relaci, což je také někdy dokonce jediný možný postup, viz příklad 6a.m. Na druhou stranu u přehlednějších uspořádání si zkušenější diagramista vystačí se seznamem prvků množiny A. Práci se seznamem dvojic proto v algoritmu uvádíme v závorce jako nepovinnou.

S Algoritmus 6a.6.
pro vytváření Hasseova diagramu částečného uspořádání $(A, \preceq)$ pro konečnou (malou) množinu A.
0. (Nepovinný krok: Vypíšeme seznam všech dvojic $x \prec y$ odvozené ostré relace.)
1. Najdeme všechny prvky $a \in A$, které v relaci $\prec$ nemají předchůdce. Hledáme tedy prvky a, pro které neexistuje $x \in A$ splňující $x \preceq a$ a $x \neq a$.
(Jde o prvky, které se v nepovinném seznamu dvojic nikdy nevyskytují v nějaké dvojici napravo.)
Tyto prvky zakreslíme do vznikajícího diagramu jako první (dolní) řádek a vyškrtneme je z množiny A.
(Nepovinný krok: V seznamu dvojic vyškrtneme všechny dvojice, ve kterých se vyskytují právě vybrané prvky, tedy ty z dolního řádku diagramu.)
Pokud v množině nic nezbylo, je diagram hotov. Jinak přejdeme na krok **2**.
2. Najdeme všechny prvky $a \in A$, které ve zmenšené množině A nemají předchůdce.
Tyto prvky zakreslíme do vznikajícího diagramu jako nový horní řádek neboli druhý řádek počítáno zdola. Zakreslené prvky vyškrtneme z množiny A.
(Nepovinný krok: V seznamu dvojic vyškrtneme všechny dvojice, ve kterých se vyskytují prvky vybrané v tomto kroku.)
V diagramu zakreslíme spojnice mezi prvky prvního a druhého řádku tam, kde jsou spolu v relaci.
(Zakreslíme tedy spojnice mezi x z prvního a a z druhého řádku tam, kde je dvojice $x \prec a$ ve vyškrtnuté části nepovinného seznamu dvojic).
Pokud v množině nic nezbylo, je diagram hotov. Jinak přejdeme na krok **3**.
3. Najdeme všechny prvky $a \in A$, které ve zmenšené množině A nemají předchůdce.
Tyto prvky zakreslíme do vznikajícího diagramu jako nový horní řádek a vyškrtneme je z množiny A.
(Nepovinný krok: V seznamu dvojic vyškrtneme všechny dvojice, ve kterých se vyskytují prvky vybrané v tomto kroku.)
Do diagramu doplníme spojnice mezi prvky a z horního a x z předposledního řádku (druhý shora) diagramu tam, kde jsou spolu v relaci.
(Zakreslíme tedy spojnice mezi x z předposledního a a z horního řádku tam, kde je dvojice $x \prec a$ ve vyškrtnuté části nepovinného seznamu dvojic).
Následně do diagramu doplníme spojnice mezi prvky a z horního řádku a prvky x z třetího řádku shora za předpokladu, že jsou spolu v relaci a nevede ještě cesta z x směrem vzhůru do a.
Poté do diagramu doplníme spojnice mezi prvky a z horního řádku a prvky x z čtvrtého řádku shora za předpokladu, že jsou spolu v relaci a nevede ještě cesta z x směrem vzhůru do a. Takto pokračujeme, až doplníme případné spojnice mezi prvky horního a dolního řádku.
Pokud v množině nic nezbylo, je diagram hotov. Jinak zopakujeme krok **3**.
$\triangle$

Spojnice mezi prvky horního řádku a těmi níže musíme doplňovat postupně shora dolů, jak je popsáno v algoritmu, jinak může dojít k problému.

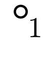
Příklad 6a.g (pokračování 6a.f)**:** Uvažujeme množinu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 20\}$ uspořádanou dělitelností.

Nejprve si připravíme nepovinný seznam dvojic odvozeného ostrého uspořádání: $1|2$, $1|3$, $1|4$, $1|5$, $1|6$, $1|12$, $1|20$, $2|4$, $2|6$, $2|12$, $2|20$, $3|6$, $3|12$, $4|12$, $4|20$, $5|20$, $6|12$.

Krok 1: Hledáme prvky A bez předchůdce, tedy čísla, která nikdo z A (kromě jich samých) nedělí. Rozmyslíme si, že jediné takové číslo je 1, protože všechna ostatní čísla z A jsou právě tou jedničkou dělitelná a tedy jsou mimo hru.

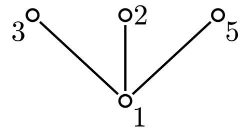
Příznivci nepovinného seznamu si všimnou, že všechna čísla kromě jedničky se v něm někdy vyskytnou napravo ve dvojici, takže v prvním kroku pracujeme jen s $a = 1$.

Zakreslíme jej do diagramu (viz obrázek napravo) a vyškrtneme jej z množiny A, rovněž vyškrtneme ze seznamu dvojice s jedničkou.



Krok 2: Jsou v množině $A_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 20\}$ čísla, která v ní nemají předchůdce vzhledem k dělitelnosti? Dvojku a trojku tam nic nedělí, ty chceme. Čtyřku dělí dvojka, nechceme, pětku bereme, následující tři čísla jsou vyřazena dvojkou. Takže v tomto kole jsou výherci $a = 2, 3, 5$.

Nebo si všimneme, že ve zkráceném seznamu dvojic $2|4$, $2|6$, $2|12$, $2|20$, $3|6$, $3|12$, $4|12$, $4|20$, $5|20$, $6|12$ jsou napravo $4, 6, 12, 20$, ale $a = 2, 3, 5$ ne.
Zakreslíme je do druhého patra.
Všechna tři čísla jsou dělitelná jedničkou ve spodní vrstvě, proto zakreslíme spojnice. Popřípadě najdeme ve škrtnuté části seznamu dvojic $1|2$, $1|3$, $1|5$.

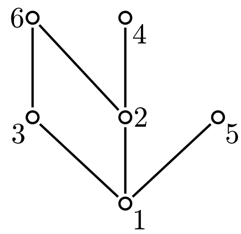


Vyškrtneme čísla $2, 3, 5$ z množiny A_1, popřípadě dvojice s nimi ze seznamu, pokud se nám s ním chce pracovat.

Krok 3: Jsou v množině $A_2 = \{4, 6, 12, 20\}$ čísla, která nikdo jiný z A_2 nedělí? Ano, jsou to čísla 4 a 6, ty přijdou do diagramu nad 2, 3 a 5.

Příznivci seznamů si všimnou, že tato čísla nejsou ve zkráceném seznamu $4|12$, $4|20$, $6|12$ nikdy vpravo.

Čísla $4, 6$ vyškrtneme z množiny. Z nepovinného seznamu vyškrtneme příslušné dvojice, tedy všechny zbývající.
Spouštíme spojnice. Nejprve se podíváme, zda není některé z čísel $4, 6$ dělitelné některým z čísel $2, 3, 5$. Vytvoříme příslušné spojnice.
Poté se podíváme, zda některé z čísel $4, 6$ není dělitelné jedničkou. Sice jsou obě, ale pro obě už existuje cesta z jedničky směrem vzhůru k nim, takže nic nového nekreslíme.



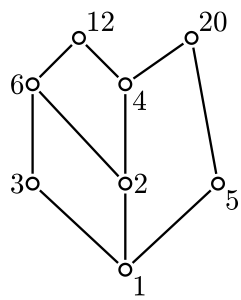
Krok 3 podruhé:

Jsou v množině $A_3 = \{12, 20\}$ čísla, která nikdo jiný z A_3 nedělí? Ano, jsou to obě čísla 12 a 20.

Mimochodem, najdeme je také jako čísla, která se ve zkráceném seznamu dvojic nevyskytují napravo, ale ten je již prázdný, takže opravdu bereme vše.

Čísla 12 a 20 přijdou do diagramu nahoru a vyškrtneme je z množiny prvků, která se tím vyprázdnila. Tento krok je tedy poslední.

Spouštíme spojnice z horního řádku. Nejprve propojíme čísla $12, 20$ s čísly $4, 6$ tam, kde ta druhá dělí ta první. Následně se podíváme, kdy jsou čísla $12, 20$ dělitelná čísly $2, 3, 5$ z druhého řádku. Čísla $2, 3$ dělí 12, ale mezi nimi už existuje cesta směrem vzhůru, takže spojnice nekreslíme. Podobně nekreslíme spojnici mezi 20 a 2. Číslo 5 dělí 20, je to tedy kandidát na spojnici. Sice mezi nimi existuje cesta $5 \mapsto 1 \mapsto 20$, ale ta neplatí, protože nevede přímo vzhůru, nýbrž oklikou přes spodní řádek. Musíme proto dokreslit spojnici mezi 20 a 5. Nakonec nenakreslíme spojnice mezi $12, 20$ a 1 v dolním řádku, protože jsou již propojeny cestou vedoucí vzhůru.



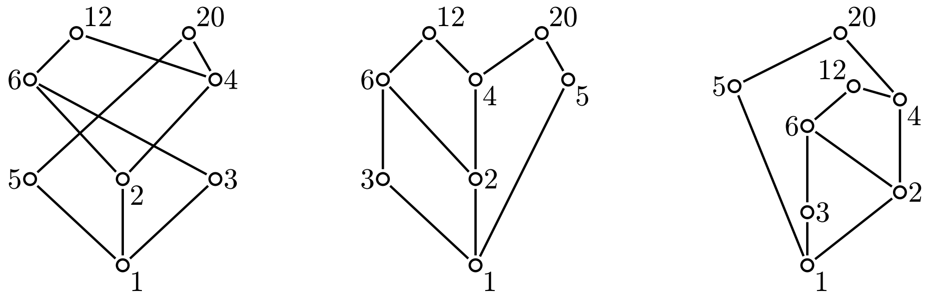
Hasseův diagram je hotov.

Cestováním po spojnicích vzhůru snadno odhalíme, že 3 dělí 12. Naopak vidíme, že 6 nedělí 20, protože ze 6 nevede cesta směrem vzhůru až do 20, obdobně 2 nedělí 5. Zde mimochodem vidíme, proč je nutné zdůrazňovat onen směr vzhůru. My totiž v diagramu cestu z 6 do 20 máme, jmenovitě $6 \mapsto 2 \mapsto 4 \mapsto 20$, ale nevede vzhůru a proto není relevantní.

△

Poznámka: Sestrojili jsme Hasseův diagram podle algoritmu a vyšel nám jiný obrázek než v příkladě 6a.f. Když je ale porovnáme, tak zjistíme, že mají shodné spojnice. Existující Hasseův diagram je tedy obvykle možné kreslit více způsoby, ale zachovává se jeho podstata. Algoritmus nabízí jeden z možných diagramů, ale také on ponechává jistou svobodu. Umožňuje nám totiž řadit vrcholy v patrech dle vlastní volby, což může výrazně ovlivnit výsledný tvar (a čitelnost) diagramu, viz obrázek níže vlevo.

Náš algoritmus staví diagram zdola, ale je také možné stavět jej shora. V našem příkladě by se to projevilo přesunem čísla 5 o patro výše, viz prostřední obrázek. A je také možné graf tvořit intuitivně a vzniknou ještě další možnosti (obrázek vpravo). Meditací nad obrázky zjistíme, že poloha prvku v diagramu je omezena jen tím, jak jsou umístěni jeho předchůdci a následníci. Můžeme si spojnice představit jako pružinky, které je možno různě natahovat a smrskávat. To obvykle ponechává dost svobody a znamená to, že z toho, že je nějaký prvek v diagramu nakreslen výše než jiný, nelze usuzovat na jejich vzájemný vztah v relaci, s výjimkou situace, kdy z jednoho vede cesta do druhého směrem vzhůru.



△

Poznámka: Pokud je algoritmus správný, tak ukazuje, že každou konečnou částečně uspořádanou množinu lze znázornit Hasseovým diagramem. U nekonečných množin to zajistit nelze, což je pochopitelné, ale někdy pomůže znázornit si diagramem alespoň její část. Jak níže uvidíme, ani to nemusí být vždy možné.

První podstatnou otázkou zní, zda jsou kroky algoritmu proveditelné. Jak víme, že v každém kroku lze najít nějaké prvky s žádanou vlastností? V následující sekci uvidíme, že prvkům bez předchůdce se říká minimální prvky a že pro konečnou uspořádanou množinu vždy nějaké minimum existuje.

Protože se v každém kroku z množiny A odebere, pro konečnou množinu to znamená, že se dříve či později vyprázdní a algoritmus tak skončí. Algoritmus je tedy pro konečné množiny vždy proveditelný.

Vytvoří pro dané uspořádání $\preceq$ žádanou strukturu? Protože spojnice přidáváme mezi různými patry, určitě nebudou vodorovné. Splňuje výsledný diagram požadavky?

(i) Nejprve uvažujme $a, b \in A$ takové, že v diagramu existuje cesta $\{c_i\}$ vedoucí vzhůru z a do b. Jak jsme si již rozmysleli, máme potom $c_{i-1} \preceq c_i$ a díky tranzitivitě relace podle faktu 4b.2 pak $a \preceq b$.

Nechť naopak $a, b \in A$ splňují $a \preceq b$ a $a \neq b$, tedy $a \prec b$. Prvek b je zařazen do diagramu v kroku, kdy v redukované verzi množiny A nemá předchůdce. To znamená, že v takové chvíli již v A nemůže být a, jinak řečeno, a již bylo do diagramu zaneseno dříve, v některém z nižších pater.

To znamená, že v druhé fázi příslušného kroku budeme mimo jiné kontrolovat dvojici a, b. Pokud již cesta z a do b směrem vzhůru existuje, tak neděláme nic; podstatné ale je, že existuje tato cesta. V opačném případě do diagramu přidáme přímou spojnici z a vzhůru do b a tím takovou cestu vytvoříme. Ukázali jsme, že pokud $a \prec b$, tak v diagramu vytvořeném podle algoritmu existuje cesta z a vzhůru do b. Diagram tedy zachycuje relaci $\preceq$.

(ii) Potřebujeme ukázat, že v diagramu dle algoritmu nejsou zbytečné spojnice. Uvažujme prvky $a, b \in A$ takové, že vede cesta vzhůru z a do b. Pak přímo podle podmínky v algoritmu nebudeme přidávat přímou spojnici z a do b.

Algoritmus tedy opravdu vytváří příslušný Hasseův diagram. Přesněji to popíšeme v bonusové sekci 6a.8.

△

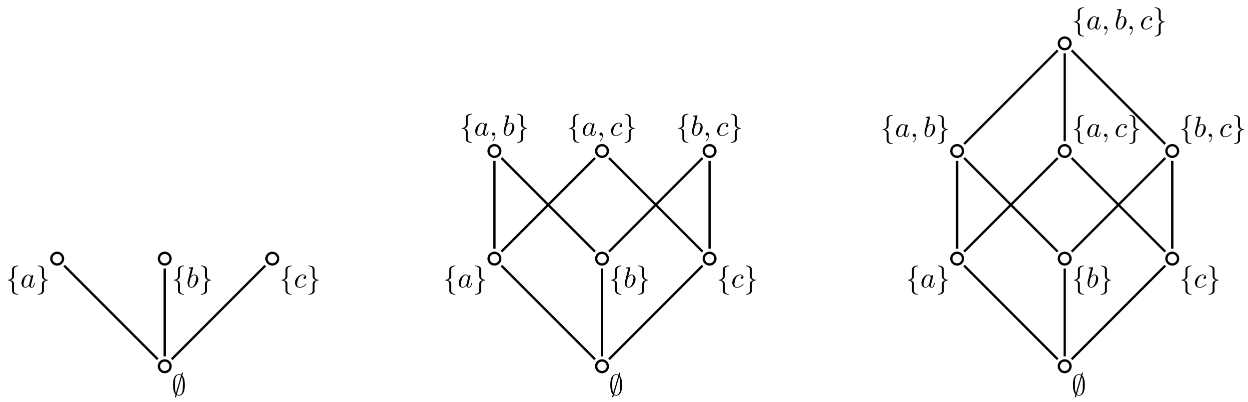
Příklad 6a.h: Vytvoříme Hasseův diagram pro částečně uspořádanou množinu $(P(\{a,b,c\}), \subseteq)$, viz příklad 4a.f. Použijeme algoritmus růstu zdola. Aby se nám lépe pracovalo, raději si danou množinu vypíšeme, zajímá nás tedy relace inkluze na množině $A = P(\{a,b,c\}) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\big\}$.

Zkusíme to bez vypisování všech ostrých uspořádání. Je v A nějaká množina, aby žádná jiná nebyla její vlastní podmnožinou? Ano, $\emptyset$, bude dole.

Jsou v $A_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ množiny takové, že jiné množiny z A_1 už nejsou jejich vlastními podmnožinami? Ano, všechny jednoprvkové. Ty přijdou do druhého řádku a spojíme je s prázdnou množinou, která je jejich podmnožinou, viz obrázek níže.

Jsou v $A_2 = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ množiny takové, že jiné množiny z A_2 už nejsou jejich vlastními podmnožinami? Ano, všechny dvouprvkové. Ty přijdou do třetího řádku a spojíme je s jednoprvkovými tam, kde je mezi nimi vztah inkluze. S prvním řádkem (prázdnou množinou) není třeba přímo spojovat, protože se od prázdné ke každé dvouprvkové dostaneme již existujícími spojnicemi.

Nakonec přidáme nahoru $\{a,b,c\}$ a spojíme se všemi množinami v předposledním řádku, jiných spojnic již netřeba.



△

Jako inspiraci si na stejné množině zaveďte relaci $\supseteq$, vytvořte diagram a pak si jako cvičení rozmyslete, že obecně Hasseův diagram uspořádání $\preceq^{-1}$ získáme jednoduše tak, že otočíme Hasseův diagram $\preceq$ vzhůru nohama.

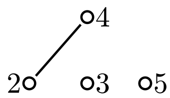
Poznámka: Pokud je pro čtenáře vytváření diagramu pomocí algoritmu nudné, je možné si to zpestřit zařazením dodatkového kritéria, a to snahou o co nejhezčí diagram. Není to samoúčelné, přehlednost napomáhá porozumění. Například diagram v příkladě 6a.h je krásně symetrický a může být interpretován jako náčrt třírozměrné krychle. Zvídavého čtenáře potěší informace, že diagram pro inkluzi na $P(\{a,b,c,d\})$ lze uspořádat jako třírozměrné znázornění čtyřrozměrné krychle.

Zajímavou výzvou je nakreslit diagram tak, aby se spojnice neprotínaly. V příkladě 6a.g se to povedlo, ale v příkladě 6a.h ne. Je možné dokázat, že tam diagram bez protínání spojnic nakreslit nelze, viz kapitola 12e.

△

Dosavadní příklady byly příliš pěkné. Je dobré vědět, že stát se může všelicos.

Příklad 6a.i: Uvažujeme množinu $A = \{2,3,4,5\}$ uspořádanou dělitelností. Čtenář jistě snadno nahlédne, že algoritmus vede na následující Hasseův diagram.

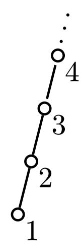


Tyto tři nezávislé skupiny mohou být navzájem v libovolné pozici nad či pod sebou.

△

Příklad 6a.j: Uvažujme množinu $\mathbb{N}$ přirozených čísel uspořádanou relací $\leq$.

Sice je to nekonečná množina, ale má číslo $a = 1$, které nemá přechůdce, tedy jej umístíme dolů a odmažeme z množiny. Vzniklá množina $\{2,3,4,\dots\}$ má prvek $a = 2$ bez předchůdce, a tak pokračujeme dál, až dostaneme obrázek napravo. Je to Hasseův diagram množiny $\{1,2,3,4\}$ uspořádané pomocí nerovnosti $\leq$, ale tři tečky nahoře naznačují, jak vypadá celá množina přirozených čísel.

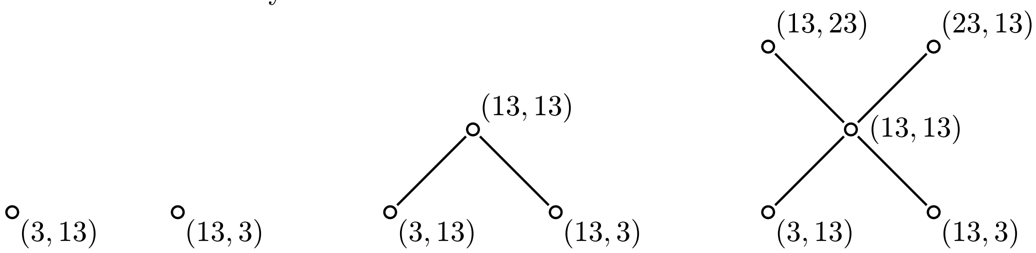


Kdybychom přidali také tečky pod spodní konec, dalo by nám to představu o množině celých čísel uspořádané nerovností. Jak uvidíme v následující sekci, diagram v podobě řetízku je to nejlepší, co lze u uspořádaných množin mít.

Podobně bychom mohli namalovat diagram pro konečně mnoho zlomků, ale to by nám už nedalo dobrou představu o množině $\mathbb{Q}$, protože ve skutečnosti mezi libovolnými dvěma zlomky existuje nekonečně mnoho jiných zlomků a nedají se seřadit do jednoho řetízku, viz příklad 6a.o.

△

Příklad 6a.k: Vytvoříme Hasseův diagram pro množinu $\{(3,13),(13,3),(13,13),(13,23),(23,13)\}$ a uspořádání nerovností $\leq$ po složkách (součinové uspořádání, viz kapitola 4), tedy $(u,v) \preceq (x,y)$ právě tehdy, když $u \leq x$ a $v \leq y$. Algoritmus vede na tři kroky:



Vidíme, že vektory $(13,23)$ a $(23,13)$ tato relace neumí porovnat.

△

Ukázali jsme, jak od částečného (či ostrého) uspořádání přejít k Hasseovu diagramu. Z pohledu praktického je zajímavá otázka, zda lze proces otočit, tedy zadat částečné uspořádání obrázkem.

Přesněji, nakreslíme nějaké body a k nim nějaké spojnice, přičemž žádná není vodorovná. Takový diagram můžeme interpretovat podobně jako Hasseův diagram, tedy odvozovat vztahy podle možnosti cestovat od prvku k prvku směrem vzhůru. Vznikne tak částečné uspořádání? A jak?

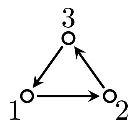
Matematicky řečeno, pokud bychom v takovém obrázku u každé spojnice na horním konci přimalovali šipku, vznikne graf jisté relace $\mathcal{R}$. Je tvořena všemi dvojicemi (a,b), pro které vede v obrázku přímá spojnice z a vzhůru do b. To ale ještě nebude téměř jistě částečné uspořádání. Musíme proto přidat další dvojice bodů dané možností cestování z jednoho do druhého směrem vzhůru. Jak jsme již viděli, toto odpovídá řetízkům v relaci $\mathcal{R}$ a vlastně tak vytváříme tranzitivní uzávěr $\mathcal{R}$, viz sekce 4c.13.

Když ještě přidáme smyčky, vznikne tak i reflexivní uzávěr. Dá se ukázat, že takto z diagramu opravdu vznikne částečné uspořádání. Pokud bychom pro něj vytvořili Hasseův diagram, tak bude poddiagramem původního diagramu. Diagramy nemusí být stejné, protože autor původního obrázku jej nemusel dělat úsporně, jinak řečeno, možná nakreslil některé „přepony“ vícekroků, které v Hasseově diagramu nezakreslujeme.

Podobný proces je užitečný v situaci, kdy hierarchie nevzniká obrázkem, ale seznamem dvojic předchůdce-následník, tedy je přímo zadána ona výchozí relace $\mathcal{R}$. Například pokud je výroba nějakého zařízení rozdělena do kroků, pak mezi nimi nejspíše existují návaznosti, přičemž typicky nedostaneme úplný popis takto vzniklé hierarchie, ale jen seznam bezprostředních vymezení, že tento krok musí přijít po tamtom kroku. Obvykle nelze očekávat, že by tento seznam byl optimalizovaný, takže se klidně může stát, že tam bude dvojice, kterou již lze odvodit z jiného dvojkroku (tedy pokud bychom to zachytili obrázkem, tak by nebyl úsporný jako Hasseův diagram).

Dá se taková relace zachytit obdobou Hasseova diagramu? Vzniká pomocí ní částečné uspořádání? Z předchozích úvah víme, že nás vlastně zajímá tranzitivní a reflexivní uzávěr. Bude antisymetrický?

Příklad 6a.l: Uvažujme relaci $\mathcal{R} = \big\{(1,2),(2,3),(3,1)\big\}$ na $A = \{1,2,3\}$.



Pokud bychom tento graf chtěli přetvořit v Hasseův diagram, tak máme problém. Intuitivně vidíme, že se nám nepodaří body reprezentující prvky $1,2,3$ rozmístit tak, aby všechny šipky vedly vzhůru.

Selže i algoritmus, protože každý prvek A má nějakého předchůdce, takže nedokážeme najít prvek hned pro první krok.

Jak to dopadne při pokusu o tranzitivní uzávěr? Kvůli dvojicím $2\mathcal{R}3\mathcal{R}1$ musíme přidat dvojici $2\mathcal{R}1$, což spolu s $1\mathcal{R}2$ vytvoří protipříklad proti antisymetrii.

△

Takovýmto situacím se v teorii grafů říká cyklus a evidentně nám zde působí problémy. Vypůjčíme si příslušnou terminologii, ale značení přizpůsobíme naší situaci.

Definice.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A. Řekneme, že prvky $c_1, c_2, \dots, c_n$ pro $n \geq 2$ tvoří cyklus v $\mathcal{R}$, pokud jsou navzájem různé a platí $c_1\mathcal{R}c_2, \dots, c_{n-1}\mathcal{R}c_n$ a $c_n\mathcal{R}c_1$.

Pokud máme cyklus $c_1, \dots, c_n$, tak vlastně máme řetízek (viz kapitola 4) $c_1, \dots, c_n, c_1$, který je uzavřený (končí, kde začal, zacyklil se). Naopak uvažujme situaci, kdy jsme se řetízkem zacyklili, tedy máme řetízek $c_1, \dots, c_n, c_1$. Pak také musíme mít cyklus. Pokud by se totiž pro $i < j$ stalo $c_i = c_j$, tak by to znamenalo, že jsme se do c_i dostali dvakrát a pasáž mezi c_i a c_j včetně by šlo z řetízku vynechat. Takto pokračujeme, dokud nebudou všechny c_i navzájem různé.

Věta 6a.7.
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na množině A, nechť $\mathcal{S}$ je její tranzitivní uzávěr. $\mathcal{S}$ je antisymetrická právě tehdy, pokud $\mathcal{R}$ neobsahuje cyklus.

Důkaz: Je dána relace $\mathcal{R}$ a její tranzitivní uzávěr $\mathcal{S}$. Oba směry dokazované ekvivalence dokážeme obměnou.
1) $\Longrightarrow$: Předpokládejme, že $\mathcal{R}$ obsahuje cyklus $c_1, c_2, \dots, c_n$, kde $n \geq 2$. Protože $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, pak také pro každé $i = 2, \dots, n$ musí platit $c_{i-1}\mathcal{S}c_i$ a $c_n\mathcal{S}c_1$.

Protože $n \geq 2$, můžeme uvažovat řetízek $c_2\mathcal{S}\cdots\mathcal{S}c_n\mathcal{S}c_1$. $\mathcal{S}$ je tranzitivní, proto podle lemma 4b.2 platí $c_2\mathcal{S}c_1$. Také $c_1\mathcal{S}c_2$ a $c_1 \neq c_2$, tudíž $\mathcal{S}$ není antisymetrická.
2) $\Longleftarrow$: Předpokládejme, že $\mathcal{S}$ není antisymetrická. Pak existují $a \neq b$ takové, že $a\mathcal{S}b$ a $b\mathcal{S}a$. Protože je $\mathcal{S}$ tranzitivní uzávěr $\mathcal{R}$, musí v $\mathcal{R}$ existovat řetízek $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ z a do b a řetízek $\beta_0, \dots, \beta_m$ z b do a. Platí tedy $\alpha_n = \beta_0$, můžeme je napojit a dostaneme řetízek $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$ v $\mathcal{R}$, kde $\alpha_0 = \beta_m$. Označíme-li $c_1 = \alpha_0$, …,

$c_{n+1} = \alpha_n$, $c_{n+2} = \beta_1$, ..., $c_{n+m} = \beta_{m-1}$, pak $c_{i-1}\mathcal{R}c_i$ pro všechna i a $c_{n+m}\mathcal{R}c_1$, tedy jde o uzavřený řetízek v $\mathcal{R}$. Jak jsme si rozmysleli, v $\mathcal{R}$ pak také musí existovat cyklus.

□

Bohužel, cykly se v reálném životě vyskytují docela často. Pokud například zkusíme zachytit relací výsledky sportovních střetů, tak se snadno stane, že A porazí B, B porazí C a C porazí A. Jak jsme právě zjistili, takovéto situace nelze převést na situaci, kdy by nám pomohla teorie částečných uspořádání.

Často se ale také stává, že cykly jsou vyloučeny již z principu (nebo by měly být). Pokud by například vznikl cyklus v prerekvizitách předmětů na univerzitě, tak by ji nešlo vystudovat. V situacích bez cyklů už lze na hierarchii nahlížet jako na jádro jistého částečného uspořádání. Jeho Hasseův diagram lze sestrojit naším algoritmem čistě na základě dvojic původní relace, ani k tomu nepotřebujeme hledat příslušný uzávěr.

Příklad 6a.m: Uvažujme předměty $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$ na jisté fakultě. Prerekvizity jsou dány následovně: p_2 vyžaduje p_1 a p_3; p_4 vyžaduje p_1, p_2 a p_3; p_6 vyžaduje p_5 a p_2; p_7 vyžaduje p_4 a p_6.

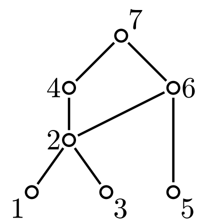
Tyto prerekvizity zapíšeme v podobě relace.

$p_1 \prec p_2$	$p_1 \prec p_4$	$p_2 \prec p_6$	$p_4 \prec p_7$
$p_3 \prec p_2$	$p_2 \prec p_4$	$p_5 \prec p_6$	$p_6 \prec p_7$
	$p_3 \prec p_4$		

Snadno si rozmyslíme, že tyto vztahy nevytvářejí žádný cyklus, takže jsou základem pro uspořádání (a možná si všimneme, že jisté dvě specifikace jsou vlastně zbytečné).

Nyní aplikujeme algoritmus pro Hasseův diagram. Vidíme, že předměty p_1, p_3 a p_5 nemají předchůdce. Přijdou dolů. Odebereme je z množiny a seznamu dvojic.

Dostaneme množinu $A = \{p_2, p_4, p_6, p_7\}$ a zkrácený seznam vztahů $p_2 \prec p_4$, $p_2 \prec p_6$, $p_4 \prec p_7$ a $p_6 \prec p_7$. Předchůdce nemá p_2. Přidáme jej do diagramu a propojíme s dolními předměty dle původního seznamu. Vyškrtneme p_2 a odpovídající dvojice.



Dostaneme množinu $A = \{p_4, p_6, p_7\}$ a zkrácený seznam vztahů $p_4 \prec p_7$ a $p_6 \prec p_7$. Předchůdce nemají p_4 a p_6. Přidáme je do diagramu a propojíme s dolními předměty dle původního seznamu. Spojnice z p_4 dolů do p_1 a p_3 netřeba kreslit, již tam vedou cesty. Vyškrtneme.

Dostaneme množinu $A = \{p_7\}$, zbytek je jasný.

Hasseův diagram formálně platí pro relaci $\mathcal{S}$ získanou z původní relace pomocí reflexivního a tranzitivního uzávěru, nicméně vystihuje přesně hierarchii danou prerekvizitami a ukazuje například, které předměty je možno studovat zároveň. Je také vidět jistá flexibilita, například p_5 by klidně mohl být až v druhé řadě zdola.

△

6a.8 Bonus: Hasseův diagram teoreticky

Zajímavá otázka je, co vlastně dostaneme, když vyjdeme z nějakého částečného uspořádání a vytvoříme z něj výrazně menší podmnožinu dvojic zakreslenou v diagramu. Když v Hasseově diagramu ke spojnicím zase přikreslíme šipky, vznikne graf jisté relace. Jaká relace to je?

Když jsme jej poprvé zkoušeli vytvořit intuitivně, vynechávali jsme „přepony“ u dvojkroků. Dá se čekat, že pak zbydou jen takové šipky, které nelze realizovat jako dvojkroky. To vede k následující terminologii.

Definice.
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina a $\prec$ je příslušná odvozená relace. Definujeme relaci $\lhd$ na A předpisem $a \lhd b$ právě tehdy, když $a \prec b$ a neexistuje $x \in A$ takové, že $a \prec x$ a $x \prec b$.
Relaci $\lhd$ říkáme **covering relation** (pokrývací relace) pro relaci $\preceq$.
Jestliže $a \lhd b$, tak říkáme, že prvek b pokrývá prvek a, popřípadě že prvek a je pokryt prvkem b.
Alternativní terminologie říká, že prvek a je **bezprostřední předchůdce** (**immediate predecessor**) prvku b, popř. že prvek b je **bezprostřední následník** (**immediate successor**) prvku a.

Příklad 6a.n: Uvažujme množinu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 20\}$ uspořádanou dělitelností, viz 6a.f. Máme následující odvozená ostrá uspořádání: $1 \prec 2$, $1 \prec 3$, $1 \prec 4$, $1 \prec 5$, $1 \prec 6$, $1 \prec 12$, $1 \prec 20$, $2 \prec 4$, $2 \prec 6$, $2 \prec 12$, $2 \prec 20$, $3 \prec 6$, $3 \prec 12$, $4 \prec 12$, $4 \prec 20$, $5 \prec 20$, $6 \prec 12$.

Ovšem řadu z nich lze také uskutečnit dvojkrokem: $1 \prec 2 \prec 4$, $1 \prec 2 \prec 6$, $1 \prec 2 \prec 12$, $1 \prec 2 \prec 20$, $2 \prec 4 \prec 12$, $2 \prec 4 \prec 20$, $3 \prec 6 \prec 12$.

Krycí relace se tedy skládá z následujících dvojic: $1 \lhd 2$, $1 \lhd 3$, $1 \lhd 5$, $2 \lhd 4$, $2 \lhd 6$, $3 \lhd 6$, $4 \lhd 12$, $4 \lhd 20$, $5 \lhd 20$, $6 \lhd 12$. Zajímavou shodou okolností jsou to přesně spojnice, které vidíme v Hasseově diagramu tohoto uspořádání.
$\triangle$

Věta 6a.9.
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina, pro kterou máme nějaký Hasseúv diagram. Definujme relaci $\mathcal{R}$ na A takto: $a\mathcal{R}b$ právě tehdy když v diagramu existuje přímá spojnice vedoucí z a vzhůru do b. Pak $\mathcal{R} = \lhd$ neboli $\mathcal{R}$ je krycí relace pro uspořádání $\preceq$.

Naznačíme, proč by to mělo platit. Uvažujme nějaký Hasseův diagram uspořádání $\preceq$ a jeho krycí relaci $\lhd$.

Nejprve ukážeme nepřímým důkazem, že každé spojnici v diagramu z a nahoru do b odpovídá dvojice $a \lhd b$.

Uvažujme tedy $a, b \in A$, $a \neq b$ takové, že neplatí $a \lhd b$. Jsou dvě možnosti. Jedna je, že neplatí $a \prec b$, pak také neexistuje spojnice z a vzhůru do b. Druhá možnost je, že $a \prec b$, ale existuje x takové, že $a \prec x$ a $x \prec b$. Pak musí v diagramu existovat cesta vzhůru z a do x a cesta vzhůru z x do b. Napojením vznikne cesta vzhůru z a do b, krerá vede přes mezilehlé prvky (například x), a proto podle požadavku úspornosti ani v tomto případě nemůže existovat přímá spojnice vzhůru z a do b.

Nyní ukážeme nepřímým důkazem, že každé dvojici $a \lhd b$ odpovídá v diagramu spřímá spojnice vzhůru z a do b.

Uvažujme tedy dvojici bodů $a, b \in A$, $a \neq b$ takovou, že mezi nimi nevede v diagramu přímá spojnice z a vzhůru do b. Může to být proto, že neplatí $a \prec b$, pak také neplatí $a \lhd b$. Nebo sice platí $a \prec b$, ale při kreslení diagramu nedošlo k propojení a a b spojnicí. Podle algoritmu se to mohlo stát jedině tehdy, pokud už by mezi a a b existovala cesta vzhůru přes mezilehlé prvky, označme jeden z nich x. Když tuto cestu rozdělíme na úsek z a do x a úsek z x do b, tak podle specifikace Hasseova diagramu musí platit $a \prec x$ a $x \prec b$ a proto ani v tomto případě neplatí $a \lhd b$.

Tato věta ukazuje, že z hlediska struktury jsou všechny Hasseovy diagramy daného uspořádání stejné, lišit se mohou jen nakreslením. Vidíme také, že Hasseův diagram existuje právě tehdy, pokud lze pro dané uspořádání vytvořit konečnou krycí relaci $\lhd$.

Poznamenejme, že tato krycí relace může být prázdná. Například pro množinu $A = \{2, 3\}$ uspořádanou dělitelností Hasseův diagram hravě nakreslíme. Jsou to dva body a žádné spojnice, tedy krycí relace je prázdná.

U nekonečných množin nemáme formálně Hasseúv diagram zaveden. Někdy můžeme naznačit, ale tato možnost nesouvisí s tím, zda je krycí relace prázdná či ne.

Příklad 6a.o: Uvažujme uspořádání $\leq$ na $\mathbb{N}$, pro něj odvozená relace pak je $<$. Každé $n \in \mathbb{N}$ má nekonečně mnoho následníků, ale jen jednoho bezprostředního. Například $a = 13$ má následníka $b = 23$ (jistě platí $13 < 23$), ale máme také $13 < 17 < 23$, a proto neplatí $13 \lhd 23$. Na druhou stranu $13 < 14$, ale marně budeme hledat $n \in \mathbb{N}$ splňující $13 < n < 14$. Proto je 14 bezprostředním následníkem čísla 13 a tedy $13 \lhd 14$. Obecně snadno ukážeme, že relace $\lhd$ pro $\leq$ na $\mathbb{N}$ vypadá takto:

$$\lhd = \big\{(n, n+1);\ n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Obdobně pro relaci $\leq$ na $\mathbb{Z}$ máme

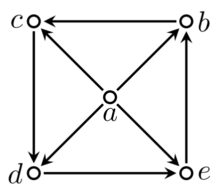
$$\lhd = \big\{(n, n+1);\ n \in \mathbb{Z}\big\}.$$

Toto odpovídá spojnicím v Hasseově diagramu, viz příklad 6a.j.

Teď uvažujme relaci $\leq$ na $\mathbb{Q}$. Vezměme libovolná raconální čísla $x < y$. Pak jejich průměr $m = \frac{1}{2}(x + y)$ je také racionální číslo a coby průměr splňuje $x < m < y$, takže neplatí $x \lhd y$. Jinak řečeno, žádné racionální číslo nemá bezprostředního předchůdce ani následníka, protože vždy existuje „někdo bližší“. Závěr: pro relaci $\leq$ na $\mathbb{Q}$ je $\lhd$ prázdná. Shodou okolností jsme také poznamenali, že pro toto uspořádání nelze rozumně naznačit Hasseův diagram.
$\triangle$

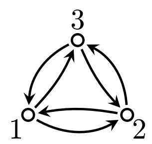
Příklad 6a.p: Nabízí se možnost definovat krycí relaci pro obecné relace, kdy bychom chtěli jakéhosi „bezprostředního souseda“.

Ale nedělá se to, protože u obecných relací se může snadno stát, že nikoho takového nenajdeme, a to ani pro konečné množiny A, kde u uspořádání krycí relaci najdeme vždy. Viz relace napravo na množině $A = \{a, b, c, d, e\}$



Prvek a nemá bezprostředního následníka, protože ke všem prvkům b, c, d, e se dostane jak přímo, tak oklikou přes mezikrok.

K dokonalosti to dovádí relace $\mathcal{R} = \big\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\big\}$ na množině $A = \{1,2,3\}$. Máme $1\mathcal{R}2$, ale tato dvojice nemůže být v krycí relaci, protože také máme $1\mathcal{R}3\mathcal{R}2$. Stejným způsobem vyloučíme další kandidáty, takže pro tuto $\mathcal{R}$ by krycí relace byla prázdná.



Takže stačí jednoduchá relace, aby vůbec nebylo jasné, co je to vlastně bezprostřední soused.
△

Cvičení

Cvičení 6a.1 (rutinní)**:** Které z následujících relací jsou částečná uspořádání na $\{1,2,3,4\}$? Pro každé uspořádání nakreslete Hasseův diagram.
a) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3),(2,3),(3,4)\}$;
b) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$;
c) $\{(1,1),(2,2),(4,4),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$;
d) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$;
e) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3),(1,3),(3,1),(3,2)\}$.

Cvičení 6a.2 (rutinní)**:** Nechť A je množina všech lidí. Která z následujících relací je částečné uspořádání?
a) a a b mají společného přítele;
b) a je předek b nebo a je b;
c) a je vyšší než b;
d) a neváží víc než b.

Cvičení 6a.3 (rutinní)**:** Rozhodněte, které z následujících relací na $\mathbb{Z}^2$ jsou uspořádání.
a) $(u,v)R(x,y)$ jestliže $u \le x$ a $v = y$;
b) $(u,v)R(x,y)$ jestliže $u \le x$ a $v < y$;
c) $(u,v)R(x,y)$ jestliže $u \le x$ a $v \ge y$.

Cvičení 6a.4 (rutinní)**:** Pro číslo $n \in \mathbb{N}$ definujme $m(n)$ jako největší cifru použitou při desítkovém zápise n, například $m(13756) = 7$. Rozhodněte, které z následujících relací jsou částečná uspořádání na $\mathbb{N}$:
a) xRy jestliže $m(x) \le m(y)$;
bi) xRy jestliže $m(x) < m(y)$;
c) xRy jestliže $m(x) < m(y)$ nebo $x = y$.

Cvičení 6a.5 (rutinní, poučné)**:** Ukažte přímým vyšetřením vlastností, že následujících relace jsou uspořádání (viz příklad 6a.e).
a) Relace $\preceq$ na $M_{2\times 2}$, množině reálných matic 2×2: $A \preceq B$ jestliže $|A| < |B|$ (determinanty) nebo $A = B$.
b) Relace $\preceq$ na $\mathbb{N}$: $x \preceq y$ jestliže je počet jedniček v binárním zápise x menší než počet jedniček v binárním zápise y nebo $x = y$.
Nápověda: Zaveďte vhodné značení pro počet jedniček.
c) Relace $\preceq$ na P, množině všech reálných polynomů: $p \preceq q$ jestliže je stupeň p menší než stupeň q nebo $p = q$.

Cvičení 6a.6 (rutinní)**:** Nakreslete Hasseův diagram
a) pro $(\{13,23,31,33,43\},\ge)$;
b) pro množinu množin $\mathcal{A} = \{\{1\},\{2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5\}\}$ uspořádanou relací býti podmnožinou;
c) pro množinu množin $\mathcal{A} = \{\{1\},\{1,2\},\{1,4\},\{3\},\{3,4,5\},\{5\}\}$ uspořádanou relací býti podmnožinou.

Cvičení 6a.7 (rutinní)**:** Nakreslete Hasseův diagram pro $(A,|)$ (relace dělitelnosti), kde
a) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$;
b) $A = \{1,2,3,5,11,13\}$;
c) $A = \{2,3,4,5,6,30,60\}$;
d) $A = \{1,2,3,6,12,24\}$;
e) $A = \{1,2,4,8,16\}$;
f) $A = \{2,4,6,12,24,36\}$.
Viz také cvičení 6b.2.

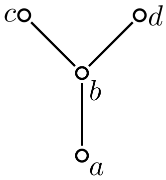
Cvičení 6a.8 (poučné)**:** Uvažujte následující relaci na $\mathbb{N}$: $a \preceq b$ právě tehdy, když $b = a + 5k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}_0$. Všimněte si, že na rozdíl od definice kongruence modulo 5 zde nemáme $k \in \mathbb{Z}$, ale chceme také $k \ge 0$. To znamená, že $a \preceq b$ právě tehdy, když $a \equiv b \pmod 5$ a $a \le b$.
a) Dokažte, že relace $\preceq$ je částečné uspořádání.
b) Sestrojte Hasseův diagram pro podmnožinu $A = \{n \in \mathbb{N};\ n \le 15\}$ a naznačte třemi tečkami, jak by vypadal Hasseův diagram pro celé $\mathbb{N}$.
Jako bonus si rozmyslete, jak by vypadal Hasseův diagram pro následující relaci na $\mathbb{Z}$: Zvolme $d \in \mathbb{N}$. Relaci $a \preceq b$ definujeme podmínkou $b = a + d\cdot k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}_0$. Pro $d = 1$ to mimochodem dává běžnou nerovnost $a \le b$.

Cvičení 6a.9 (poučné)**:**
Nechť $\preceq_1$, $\preceq_2$ jsou částečná uspořádání na téže množině A. Dokažte protipříkladem, že
a) $\preceq_1 \cup \preceq_2$ nemusí být částečné uspořádání na A;
b) $\preceq_1 \setminus \preceq_2$ nemusí být částečné uspořádání na A;
c) $\preceq_1 \circ \preceq_2$ nemusí být částečné uspořádání na A.
Nápověda: Zvolte si A dle libosti, relace pak lze vytvářet grafem, výpisem prvků nebo použít nějakou známou.

Cvičení 6a.10 (rutinní)**:** Nechť $\mathcal{R}$ je relace na A, která je antisymetrická a tranzitivní. Dokažte, že pak $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}\circ\mathcal{R}$ je také antisymetrická.

Nápověda: Využijte znalosti z kapitoly 4.

Cvičení 6a.11 (rutinní)**:** Napište výčtem dvojic prvků, která relace uspořádání je dána následujícím Hasseovým diagramem.



Cvičení 6a.12: Pro následující relace dané výpisem dvojic rozhodněte, které z nich neobsahují cykly. Pro ně sestrojte Hasseův diagram.

a) $\mathcal{R} = \{(a,f),(b,d),(a,e),(f,c),(f,e)\}$;

b) $\mathcal{R} = \{(a,b),(b,e),(c,b),(d,c),(e,c)\}$;

c) $\mathcal{R} = \{(1,5),(2,3),(3,1),(4,2),(5,2)\}$;

d) $\mathcal{R} = \{(1,3),(2,3),(4,5),(4,3),(4,1),(5,3),(2,1)\}$.

Řešení:

6a.1:

a) není tranzitivní, viz $(2,3)$ a $(3,4)$.

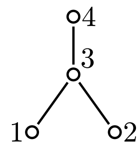
b) je uspořádání (i ekvivalence).

c) není reflexivní, viz $(3,3)$. d) je uspořádání.

e) není antisymetrická, viz $(1,3)$ a $(3,1)$.

b)

d)



6a.2: a) není **A**,**T**; (ii): je uspořádání; (iii): není **R**; (iv): není **A**.

6a.3: b) je upořádání; (ii): není **R**; (iii): je uspořádání.

6a.4: a) není **A**; b) není **R**; c) je uspořádání.

6a.5: a) **R**: přímo z definice. **A**: Nechť $A \preceq B \wedge B \preceq A$. Dvě možnosti. Kdyby $A \neq B$, pak z definice dostáváme $|A| < |B| \wedge |B| < |A|$, spor. Tudíž je to varianta $A = B$. **T**: Nechť $A \preceq B \wedge B \preceq C$. Čtyři možnosti:

A) V obou případech vzniklo $\preceq$ z první podmínky. Pak $|A| < |B| \wedge |B| < |C|$, proto $|A| < |C|$ a $A \preceq C$.

B) Vzniklo to jako $|A| < |B|$ a $B = C$. Pak $|A| < |C|$ a $A \preceq C$.

C) Varianta $A = B$ a $|B| < |C|$ dává také $A \preceq C$.

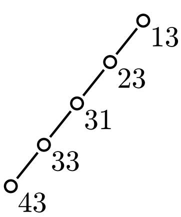
D) poslední možnost je, že to $A \preceq B \wedge B \preceq C$ vzniklo jako $A = B$ a $B = C$, pak $A = C$ a tedy $A \preceq C$.

Takže vždy $A \preceq C$ a tranzitivita je prokázána.

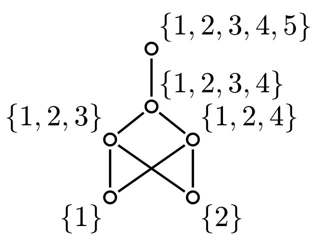
b) a c) se dělají obdobně, jen místo determinantu se pracuje s jinou funkcí.

6a.6:

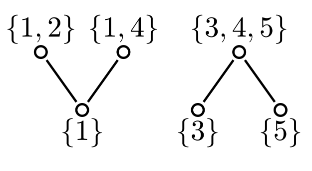
a)



b)

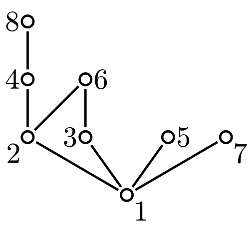


c)

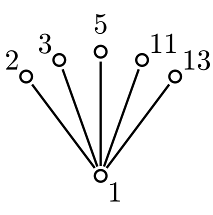


6a.7:

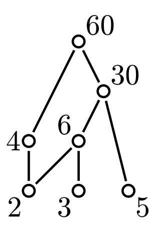
a)

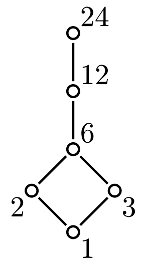


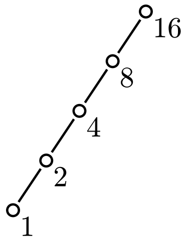
b)

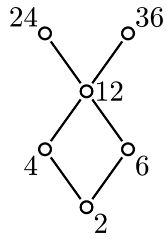


c)

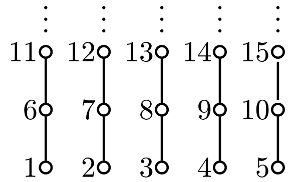


d) 

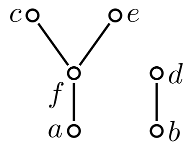
e) 

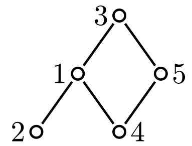
f) 

6a.8:
a) **R**: $a = a + 5 \cdot 0$ a $0 \in \mathbb{N}_0$, proto $a \preceq a$. **A**: $a \preceq b$ a $b \preceq a$ dá $a \leq b$ a $b \leq a$, proto $a = b$.
T: $a \preceq b$ a $b \preceq c$ dá $b = a + 5k$, $c = b + 5l$ pro $k, l \in \mathbb{N}_0$, pak $c = a + 5(k + l)$ a $k + l \in \mathbb{N}$.



6a.9: Nejsnáze pokazíme antisymetrii. Na $A = \{1, 2, 3\}$ zvolme $\preceq_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2)\}$ a $\preceq_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,1)\}$. Pak $\preceq_1 \cup \preceq_2$ a $\preceq_2 \circ \preceq_1$ jsou rovny $\{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$, není antisymetrická. Rozdíl není reflexivní.
Nebo $\preceq_1$ je $\leq$ na $\mathbb{Z}$, $\preceq_2$ je $\geq$ na $\mathbb{Z}$, pak sjednocení i složení je $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
6a.10: Tranzitivita dává $\mathcal{R}^2 \subseteq \mathcal{R}$ (důsledek 4c.3) a antisymetrie přechází na pdmnožinu relace (věta 4c.8).
6a.11: $\{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d)\}$.
6a.12:
b) cyklus $b\mathcal{R}e\mathcal{R}c\mathcal{R}b$.
c) cyklus $1\mathcal{R}5\mathcal{R}2\mathcal{R}3\mathcal{R}1$.

a) 

d) 

6b. Minima, nejmenší prvky a podobně, dobré uspořádání

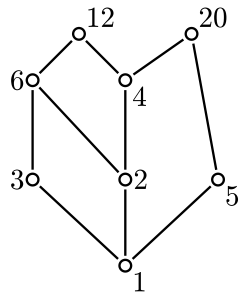
V hierarchických systémech se hodí umět poznat, kdo jim šéfuje (a na koho spadne všechna práce).

> **Definice.**
> Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina a $\prec$ odpovídající odvozená relace.
> Nechť M je neprázdná podmnožina A.
> Řekneme, že prvek $m \in A$ je **největší prvek** množiny M, jestliže $m \in M$ a pro všechna $x \in M$ platí $x \preceq m$.
> Řekneme, že prvek $m \in A$ je **nejmenší prvek** množiny M, jestliže $m \in M$ a pro všechna $x \in M$ platí $m \preceq x$.
> Řekneme, že prvek $m \in A$ je **maximální prvek** nebo **maximum** množiny M, jestliže $m \in M$ a neexistuje $x \in M$: $m \prec x$.
> Značíme to $m \in \max(M)$, popřípadě (když je jen jedno) $m = \max(M)$.
> Řekneme, že prvek $m \in A$ je **minimální prvek** nebo **minimum** množiny M, jestliže $m \in M$ a neexistuje $x \in M$: $x \prec m$.
> Značíme to $m \in \min(M)$, popřípadě (když je jen jedno) $m = \min(M)$.

Let $(A, \preceq)$ be a poset. Let M be a non-empty subset of A.
We say that an element $m \in A$ is a **greatest element** of the set M, if $m \in M$ and $x \preceq m$ for all $x \in M$.
We say that an element $m \in A$ is a **least element** of the set M, if $m \in M$ and $m \preceq x$ for all $x \in M$.
We say that an element $m \in A$ is **maximal** in the set M (or a maximum of M), if $m \in M$ and there is no $x \in M$ such that $m \prec x$. We denote it $m = \max(M)$.
We say that an element $m \in A$ is **minimal** in the set M (or a minimum of M), if $m \in M$ and there is no $x \in M$ such that $x \prec m$. We denote it $m = \min(M)$.

Největší prvek množiny M je podle definice „nad“ všemi ostatními prvky M neboli má je všechny „pod sebou“, zatímco maximální prvek nemá nikoho z M „nad sebou“. Asi nejde o totéž, jinak bychom neměli dva pojmy. Obdobně nejmenší prvek množiny je „pod“ všemi ostatními prvky z množiny, zatímco minimum nemá nikoho z množiny „pod sebou“. Prvkům z definice budeme někdy říkat extrémní prvky množiny M.

Příklad 6b.a: Uvažujeme množinu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 20\}$ uspořádanou dělitelností. V příkladě 6a.g jsme našli její Hasseův diagram.



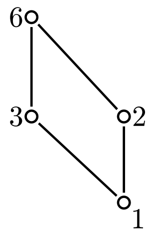
Uvažujme množinu $M = A$. Její největší prvek m by měl být z této množiny a měl by splňovat $x\,|\,m$ pro všechna $x \in A$ (všechna čísla jej mají dělit). V seznamu prvků ale takové číslo budeme hledat marně. Například $m = 20$ je zajímavý kandidát, ale nesplňuje $6\,|\,12$ neboli nemá „pod sebou“ dvanáctku. Množina M tedy nemá největší pvek vzhledem k uspořádání dělitelností.

V Hasseově diagramu pro největší prvek množiny vyžadujeme, aby ze všech ostatních prvků této množiny do něj vedly cesty směrem vzhůru. Vizuálně by tedy největší prvek měl představovat společný vrchol diagramu.

Podmínka pro maximální prvek m této množiny vyžaduje, aby neexistovalo žádné $x \in M$ splňující $m \prec x$, tedy nesmí existovat jiné číslo z M, které by bylo číslem m dělitelné. Taková čísla najdeme dvě, jmenovitě $m = 12$ a $m = 20$. Můžeme tedy konstatovat, že vzhledem k dělitelnosti platí $\max(A) = \{12, 20\}$.

Z pohledu Hasseova diagramu maxima představují „horní konce“, ze kterých už směrem vzhůru nic nevede. Jak vidíme, maximum nemusí být jednoznačné, zde jsou maxima dvě.

Nejmenší prvek A by měl dělit všechny prvky množiny. Jedno číslo zjevně funguje, takže $m = 1$ je nejmenší prvek množiny A vzhledem k dělitelnosti. Vidíme, že se do něj celý Hassev diagram sbíhá. Také nemá nikoho pod sebou, tudíž je to minimum: $\min(A) = 1$.



Nyní uvažujme podmnožinu $M = \{1, 2, 3, 6\}$. Hledáme největší prvek, tedy takové m, aby všechna čísla z M dělila toto m. Snadno najdeme $m = 6$. Protože pro žádné z ostatních čísel $x \in M$ neplatí $m\,|\,x$, je to i maximum.

Obdobně usoudíme, že $m = 1$ je nejmenším prvkem i minimem M vzhledem k dělitelnosti.

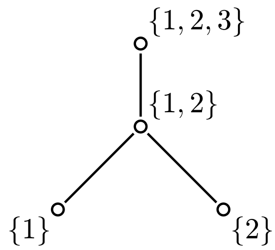
Všimneme si, že jsme při těchto úvahách vůbec nepotřebovali pracovat s prvky množiny A mimo M. Vlastně jsme tedy pracovali s restrikcí dělitelnosti na množinu M neboli s uspořádanou množinou $(M,|)$, to A jsme nepotřebovali.

Interpretace souhlasí, Hasseův diagram uspořádané množiny $(M,|)$ se nahoře sbíhá do největšího prvku a dole do nejmenšího prvku.

△

Tento příklad nám ukazuje užitečnou věc. Pokud máme uspořádanou množinu $(A, \preceq)$ a pracujeme s extrémními prvky nějaké její podmnožiny M (hledáme je, chceme znát jejich vlastnosti), tak vlastně stačí pracovat s restrikcí neboli s uspořádanou množinou $(M, \preceq)$. To nám usnadní důkazy.

Příklad 6b.b: Uvažujme množinu množin $\mathcal{A} = \big\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\big\}$ a částečné uspořádání $\subseteq$. Jako podmnožinu M vezmeme přímo toto $\mathcal{A}$.



Prvek $\{1, 2, 3\}$ je největším prvkem $\mathcal{A}$, protože všechny prvky $N \in \mathcal{A}$ splňují $N \subseteq \{1, 2, 3\}$. Je také maximálním prvkem $\mathcal{A}$, protože v $\mathcal{A}$ neexistuje množina N, která by splňovala $\{1, 2, 3\} \subseteq N$ a $\{1, 2, 3\} \neq N$.

Prvek $\{1\}$ je minimálním prvkem $\mathcal{A}$, protože neexistuje prvek N v $\mathcal{A}$, který by splňoval $N \subseteq \{1\}$ a $N \neq \{1\}$. Podobně je i $\{2\}$ minimálním prvkem $\mathcal{A}$. Nejmenší prvek $\mathcal{A}$ ale neexistuje. Takový nejmenší prvek by totiž musel být podmnožinou všech množin z $\mathcal{A}$, například by musel být podmnožinou $\{1\}$ a také podmnožinou $\{2\}$. To splňuje jen prázdná množina, která ale není prvkem $\mathcal{A}$.

Výsledky souhlasí s tvarem Hasseova diagramu, který se nahoře sbíhá do špice, ale dole ne.

△

Čtenáře jistě napadlo několik pozorování ohledně vlastností extréních prvků. Potvrdíme je. Při čtení důkazů pomůže si představit nějaký Hasseův diagram.

Věta 6b.1.
Nechť je $(A, \preceq)$ částečně uspořádaná množina, uvažujme neprázdnou podmnožinu $M \subseteq A$. Pak platí následující:
(i) Jestliže existuje největší prvek M, pak je jediný.
Jestliže existuje nejmenší prvek M, pak je jediný.
(ii) Jestliže je m největší prvek M, pak $m = \max(M)$ a jiné maximum už není.
Jestliže je m nejmenší prvek M, pak $m = \min(M)$ a jiné minimum už není.

Důkaz (rutinní)**:** (i): Nechť m_1, m_2 jsou největší prvky M, pak jsou mimo jiné z M. Protože je m_1 největší z M, musí platit $m_2 \preceq m_1$. Protože je m_2 největší z M, musí platit $m_1 \preceq m_2$. Antisymetrie pak dává $m_1 = m_2$, takže dva různé největší prvky nelze mít.

Důkaz pro nejmenší prvek je symetrický.

(ii): Předpokládejme, že m je největší prvek M. Pak pro všechny prvky $x \in M$ platí $x \preceq m$, tudíž pro ně podle faktu 6a.3 (ii) nemůže platit $m \prec x$. Proto je m maximum M.

Nechť n je také maximální prvek M. Protože je m největším prvkem M a $n \in M$, platí nutně $n \preceq m$. Ovšem nemůže platit $n \prec m$, když je n maximum. Podle definice $\prec$ tedy $m = n$.

Obdobně se dokazuje tvrzení pro nejmenší prvek a minima.

□

Zajímavá je obměna tvrzení (ii). Jestliže existuje více maximálních prvků M, pak neexistuje největší prvek M, obdobně pro minima a nejmenší prvek.

Definici a důkazy nám usnadnilo používání odvozeného ostrého uspořádání $\prec$. Ne všichni autoři jej zavádějí, teorii lze stavět bez něj. V definici je možné namísto $m \prec x$ napsat význam, tedy $m \preceq x$ a $m \neq x$, ale také existuje verze s implikací, která se někdy hodí v důkazech.

Věta 6b.2.
Nechť je $(A, \preceq)$ částečně uspořádaná množina, uvažujme neprázdnou podmnožinu $M \subseteq A$. Pak platí následující:
(i) m je maximum M právě tehdy, pokud splňuje následující:
Pro všechna $x \in M$ platí implikace $m \preceq x \implies x = m$.
(ii) m je minimum M právě tehdy, pokud splňuje následující:
Pro všechna $x \in M$ platí implikace $x \preceq m \implies x = m$.

Důkaz (rutinní)**:** (i): Oba směry dokážeme nepřímo, tedy důkazem obměny.

$\Longrightarrow$: Předpokládejme, že $m \in M$ nesplňuje podmínku. Pak existuje $x \in M$ takové, že pro něj neplatí dotyčná implikace, tedy platí $m \preceq x$ a $m \neq x$. To podle definice odvozeného uspořádání znamená, že $m \prec x$, a proto m nemůže být maximem M.

$\Longleftarrow$: Předpokládejme, že m není maximem M. Pak existuje $x \in M$ takové, že $m \prec x$. Proto $m \preceq x$ a $x \neq m$, tedy x nesplňuje implikaci z podmínky a ta je neplatná.

(ii): Důkazy obou směrů jsou obdobné.

□

Z této věty vyplývá, že když máme více maxim, pak nemohou být v Hasseově diagramu propojeny spojnicí (obecněji mezi nimi nemůže být v relaci vztah), obdobně pro minima. Důkaz necháme čtenáři jako cvičení 6b.10.

Polovinu důkazů jsme nedělali, odvolávali jsme se na symetrii případů. Intuitivně by mělo to, co platí pro největší prvky a maxima, platit i pro nejmenší prvky a minima, a naopak. Uvažujme uspořádanou množinu $(A, \preceq)$, pro kterou máme Hasseův diagram. Dá se ukázat, že pokud jej převrátíme vzhůru nohama, dostaneme Hasseův diagram inverzní relace $(A, \preceq^{-1})$. Přitom se horní konce diagramu staly dolními a naopak. Potvrdíme to obecně, i pro uspořádání bez Hasseova diagramu.

Věta 6b.3.
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina, uvažujme neprázdnou podmnožinu $M \subseteq A$.
(ia) m je největším prvkem M vzhledem k $\preceq$ právě tehdy, jestliže je m nejmenším prvkem M vzhledem k $\preceq^{-1}$.
(ib) m je nejmenším prvkem M vzhledem k $\preceq$ právě tehdy, jestliže je m největším prvkem M vzhledem k $\preceq^{-1}$.
(iia) m je maximum M vzhledem k $\preceq$ právě tehdy, jestliže je m minimem M vzhledem k $\preceq^{-1}$.
(iib) m je minimum M vzhledem k $\preceq$ právě tehdy, jestliže je m maximem M vzhledem k $\preceq^{-1}$.

Důkaz (rutinní)**:** (ia) m je největší prvek M vzhledem k $\preceq$ právě tehdy, když $x \preceq m$ pro všechna $x \in M$, což je právě tehdy, když $m \preceq^{-1} x$ pro všechna $x \in M$, což je právě tehdy, když m je nejmenší prvek M vzhledem k $\preceq^{-1}$.

(ib) Protože $\preceq = (\preceq^{-1})^{-1}$, m je nejmenším prvkem M vzhledem k $\preceq$ právě tehdy pokud to platí vzhledem k $(\preceq^{-1})^{-1}$, což podle (ia) je právě tehdy, pokud je m největším prvkem $\preceq^{-1}$.

(iia): m je maximum M právě tehdy, když pro $x \in M$ platí implikace $m \preceq x \implies x = m$, což je právě tehdy, když pro $x \in M$ platí implikace $x \preceq^{-1} x \implies x = m$, což je právě tehdy, když m je minimum $(M, \preceq^{-1})$.

(iib) se dokazuje obdobně.

□

Toto má užitečný důsledek. Pokud dokážeme, že nějaká vlastnost maxima platí pro všechna uspořádání, pak to musí platit i pro jejich inverze (což jsou také uspořádání) a tedy to musí platit i pro minima, a naopak. Jinak řečeno, obecné vlastnosti minim a maxim musí souhlasit, obdobně pro vlastnosti největších a nejmenších prvků. Takže u obecných tvrzení opravdu stačí dělat polovinu důkazů.

Z pohledu praktického využití je největší prvek užitečnější než maximum, má ale dvě nevýhody. Tou menší je, že na rozdíl od $m \in \max(M)$ kupodivu neexistuje zkratka pro „m je největší prvek M“, obdobně u nejmenšího prvku. S tím se smíříme, větší problém je, že jak jsme viděli, největší ani nejmenší prvek nemusejí existovat. Odpovídá to tomu, že se Hasseův diagram nemusí sbíhat nahoře či dole do špičky. Jak ukazuje věta 6b.1 (ii), maxima a minima mají větší šanci existovat, ostatně Hasseův diagram bude mít nějaký horní či dolní konec vždycky. Ovšem ne každé uspořádání takový diagram má.

Příklad 6b.c: Uvažujme $(\mathbb{N}, \leq)$ a podmnožinu $M = \{n \in \mathbb{N};\ n > 12\} = \{13, 14, 15, \dots\}$. Pak nejmenší prvek M je $m = 13$, protože $13 \leq x$ pro všechna $x \in M$ a $13 \in M$. Také minimální prvek M je $m = 13$, protože v M neexistuje x, které by splňovalo $x < 13$.

Největší ani maximální prvek neexistují. Důkaz: Představme si, že by m bylo maximálním prvkem M. Pak by žádné prvky $x \in M$ nesměly splňovat $m < x$, ale některé to splňují, stačí vzít $x = m + 1$. Protože neexistuje maximum, nemůže existovat ani největší prvek.

△

Tento příklad ukazuje, že množiny s nekonečným koncem jsou pro minima a maxima problematické. Není to ale problém jediný.

Příklad 6b.d: Uvažujme $(\mathbb{Q}, \leq)$ a podmnožinu $M = \{x \in \mathbb{Q};\ 0 < x < 1\}$. Tato množina nikam do nekonečna neutíká, ale nemá maximum ani minimum, nejmenší ani největší prvek.

Ukážeme, že nemůže mít nejmenší ani minimální prvek: Vezměme libovolného kandidáta $m \in M$. Pak $\frac{m}{2} \in M$ a $\frac{m}{2} < m$, tedy $\frac{m}{2}$ je protipříklad k tvrzení, že m je minimální, zároveň neplatí $m \leq \frac{m}{2}$ a proto není m ani nejmenší.

Podobně ukážeme, že nelze najít největší ani maximální prvek M: Vezměme libovolného kandidáta $m \in M$. Pak $x = \frac{m+1}{2}$ splňuje coby průměr čísel m a 1 nerovnost $m < x < 1$, proto $x \in M$ a $m < x$. Takže m nemůže být maximem a proto ani největším prvkem M.

△

Obvyklý matematický přístup je omezit se na množiny nějakého vhodného typu, u kterých už by byla existence minim a maxim zaručena.

Věta 6b.4.
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Jestliže je M konečná neprázdná podmnožina A, pak existuje $\min(M)$ a $\max(M)$.

Důkaz (poučný)**:** Přechodem k restrikci stačí dokázat, že pro libovolnou konečnou uspořádanou množinu $(M, \preceq)$ existují $\min(M)$ a $\max(M)$. Jako obvykle dokážeme jen jednu věc, třeba existenci minima, a to indukcí na počet prvků množiny.

(0) Jednoprvková uspořádaná množina $M = \{m\}$ má určitě minimum, jmenovitě m, protože v M nemohou být x takové, aby $x \prec m$, což zahrnuje $x \neq m$.

(1) Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné a předpokládejme, že všechny n-prvkové uspořádané množiny mají minimum. Potřebujeme ukázat, že totéž platí pro všechny množiny s $n+1$ prvky. Uvažujme proto uspořádanou množinu $(M, \preceq)$ s $n+1$ prvky. Zvolme libovolný prvek $y \in M$ a podívejme se na $M' = M \setminus \{y\}$. Když uděláme restrikci $\preceq$ na M', dostaneme n-prvkovou uspořádanou množinu, proto podle indukčního předpokladu existuje její minimum $m \in M'$ vzhledem k $\preceq$. Teď porovnáme m' a y a rozebereme jednotlivé možnosti.

Jestliže $y \preceq m$, tak tvrdíme, že toto y je minimálním prvkem M. Dokážeme to sporem, předpokládejme, že existuje nějaké $x \in M$ takové, že $x \prec y$. Pak máme $x \prec y \preceq m$, tedy podle faktu 6a.3 (iii) $x \prec m$, zároveň $x \in M \setminus \{y\} = M'$ a máme spor s $m' \in \min(M')$.

Jestliže $y \preceq m$ neplatí, tak je m minimálním prvkem pro celé M. Dokážeme to pomocí věty 6b.2. Uvažujme nějaké $x \in M$ splňující $x \preceq m$. Pak x nemůže být y, proto $x \in M'$ a podle $m \in \min(M')$ musí platit $x = m$.

V každém případě jsme tedy nalezli minimum M, čímž je důkaz (1) dokončen.

Podle principu matematické indukce jsem tím dokázali existenci minima pro všechny konečné uspořádané množiny.

Alternativní důkaz: Zvolme $a_1 \in M$. Jestliže to není minimum M, tak existuje $a_2 \in M_1 = M \setminus \{a_1\}$ takové, že $a_2 \prec a_1$. Jestliže a_2 není minimum, tak existuje $a_3 \in M \setminus \{a_2\}$ takové že $a_3 \prec a_2$. Všimněme si, že $a_3 \neq a_1$, protože z tranzitivity $\prec$ máme $a_3 \prec a_1$. Takže víme, že $a_3 \in M_2 = M \setminus \{a_1, a_2\}$.

Jestliže a_3 není minimum, zvolme $a_4 \in M \setminus \{a_3\}$ takové, že $a_4 \prec a_3$, zase $a_4 \in M_3 = M \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$. Atd., dříve či později musíme dostat minimum, protože M je konečná.

Tento alternativní důkaz vypadá snadněji, ale to je tím, že jsme nedokazovali některé kritické kroky, jinak by to podstatně narostlo. Vrátíme se k tomu v kapitole 7 o indukci.

□

Poznámka: Všimněte si, že při kreslení Hasseova diagramu zdola jsme používali minima množiny. Tato věta zaručuje, že existují, tedy že dotyčný algoritmus bude fungovat. Má také dopad na existenci krycí relace.

Vezměme prvek $a \in A$ a uvažujme množinu $\{x \in A;\ a \prec x\}$. Jestliže je prázdná, pak je a maximum A a tudíž přirozeně nemůže mít bezprostředního následníka. Pokud se to stane všem prvkům z M, tak je krycí relace prázdná.

Pokud tato množina prázdná není, tak všechna její minima jsou bezprostředními následníky a. Podobně hledáme bezprostřední předchůdce jako maxima množiny $\{x \in A;\ x \prec a\}$.

△

Věta nám pro konečné množiny zaručuje existenci minim a maxim, ale pořád zůstává problém s největším a nejmenším prvkem. Pokud chceme jejich existenci vynutit, musíme zabránit tomu, aby bylo více minim či maxim. Víme, že vícenásobná maxima nemohou být propojena (cvičení 6b.10), obdobně pro minima, tedy problém je s nedostatkem spojnic. Zavedeme pro to oficiální terminologii.

Definice.
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Řekneme, že $a, b \in A$ jsou **porovnatelné**, jestliže $a \preceq b$ nebo $b \preceq a$. Řekneme, že $a, b \in R$ jsou **neporovnatelné**, jestliže neplatí $a \preceq b$ ani $b \preceq a$.

Let $(A, \preceq)$ be a poset. We say that $a, b \in A$ are **comparable** if $a \preceq b$ or $b \preceq a$.
We say that $a, b \in A$ are **incomparable** if neither $a \preceq b$ nor $b \preceq a$.

Například pracujeme-li s relací $\subseteq$, pak množiny $\{13, 23\}$ a $\{3, 13\}$ porovnatelné nejsou, zato množiny $\{13, 23\}$ a $\{3, 13, 23\}$ porovnatelné jsou.

Podobně uvažujeme-li pro přirozená čísla relaci dělitelnosti, pak čísla 6 a 12 porovnatelná jsou, zato čísla 6 a 9 porovnatelná nejsou.

Definice.
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Řekneme, že $\preceq$ je **lineární uspořádání**, popřípadě **úplné uspořádání**, jestliže jsou každé dva prvky z A porovnatelné.

Let $(A, \preceq)$ be a poset. We say that $\preceq$ is a **total order** or a **linear order** if every two elements from A are comparable.

Příklad 6b.e: $(\mathbb{Z}, \leq)$ je lineárně uspořádaná množina. $(\mathbb{N}, \geq)$ je lineárně uspořádaná množina.

Na druhou stranu $(P(X), \subseteq)$ není lineárně uspořádaná množina pro $|X| > 1$ (viz příklad 6a.b), také relace dělitelnosti není lineární uspořádání na $\mathbb{N}$.

△

→ Bonusové pozorování: V této souvislosti si možná připomenete vlastnosti dichotomie a trichotomie z kapitoly 4d, které otázku porovnatelnosti kladou pro obecné relace. Částečné uspořádání je lineární právě tehdy, když je dichotomické.

Máme-li částečné uspořádání $\preceq$, které je dichotomické, tak od něj odvozená relace $\prec$ je nutně trichotomická. Naopak začneme-li s asymetrickou, tranzitivní a trichotomickou relací $\prec$, tak od ní odvozená relace $\preceq$ je lineární uspořádání. ←

Již tradičně se zeptáme, kdy se linearita zachovává.

Fakt 6b.5.
Je-li $(A, \preceq)$ lineární uspořádání, pak také jeho restrikce na libovolnou podmnožinu A je lineární uspořádání.

Důkaz (poučný)**:** Zde budeme protínat relaci s množinou, proto bude výhodnější zápis pomocí uspořádaných dvojic, bude také lepší použít pro $\preceq$ písmeno $\mathcal{R}$, takže namísto $a \preceq b$ píšeme $(a,b) \in \mathcal{R}$.

Nechť B je podmnožina A, nechť $\mathcal{S}$ je restrikce $\mathcal{R}$ na B, připomeňme, že $\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap (B \times B)$. Vezměme teď libovolné $a,b \in B$. Pak $a,b \in A$, proto dle linarity $\preceq$ je splněn výrok „$(a,b) \in \mathcal{R}$ nebo $(b,a) \in \mathcal{R}$“. Ale z $(a,b) \in \mathcal{R}$ plyne díky $(a,b) \in B \times B$ také $(a,b) \in \mathcal{S}$, podobně z $(b,a) \in \mathcal{R}$ plyne $(b,a) \in \mathcal{S}$. Je tedy pravdivý výrok „$(a,b) \in \mathcal{S}$ nebo $(b,a) \in \mathcal{S}$.“

□

Fakt 6b.6.
Nechť $(A, \preceq)$ je lineárně uspořádaná množina. Pak je také $\preceq^{-1}$ lineární uspořádání na A.

Důkaz je tak snadný, že to snad ani nestojí za těchto třináct slov.

Zajímavější jsou množinové operace. Víme, že průnikem dvou částečných uspořádání zase dostaneme částečné uspořádání, ale linearita už se nemusí zachovat. Například $\leq$ i $\geq$ jsou lineární uspořádání na $\mathbb{Z}$, ale jejich průnikem dostaneme $\Delta(\mathbb{Z})$ neboli relaci danou vztahem $a = b$, což rozhodně není lineární uspořádání.

Nyní potvrdíme, že linearita pomůže s existencí extrémů.

Věta 6b.7.
Nechť $(A, \preceq)$ je lineárně uspořádaná množina a M je její neprázdná podmnožina.
Jestliže je $m = \max(M)$, pak je to také největší prvek M.
Jestliže je $m = \min(M)$, pak je to také nejmenší prvek M.

Důkaz (rutinní)**:** Předpokládejme, že $m = \max(M)$. Nechť $x \in M$ je libovolné, potřebujeme ukázat, že $x \preceq m$. Protože je $\preceq$ lineární, musí platit $m \preceq x$ nebo $x \preceq m$. V případě toho druhého je důkaz hotov. Co kdyby platilo $m \preceq x$? Protože je m maximální, tak podle věty 6b.2 $x = m$ a tedy zase $x \preceq m$. Důkaz je hotov.

Druhá část se dokáže symetricky.

□

U lineárně uspořádaných množin tedy minimum a nejmenší prvek jedno jsou, podobně pro maximum a největší prvek.

→ Čtenář znalý matematické analýzy (kalkulu) si mohl všimnout, že v tomto oboru definují pro podmnožiny $\mathbb{R}$ maximum a minimum, přičemž v jejich definici je podmínka z naší definice největšího a nejmenšího prvku. Je to v analýze tradiční, ale z hlediska obecné teorie je to samozřejmě špatně. Naštěstí to díky linearitě uspořádání ← $\leq$ na $\mathbb{R}$ vyjde v tomto konkrétním případě nastejno.

A teď už okamžitý důsledek věty 6b.4 a posledního tvrzení.

Věta 6b.8.
Nechť $(A, \preceq)$ je lineárně uspořádaná množina. Každá její neprázdná konečná podmnožina má nejmenší a největší prvek.

→ Silně pokročilá a nedůležitá, nicméně možná zajímavá poznámka: Na existenci nejmenšího a největšího prvku nepotřebujeme plnou sílu uspořádání. Dobře to ukazuje následující tvrzení:

Věta 6b.9.
Nechť je $\mathcal{R}$ relace na množině A, která je tranzitivní. Nechť M je neprázdná podmnožina A taková, že pro každé dva různé prvky $a,b \in M$ platí $a\mathcal{R}b$ nebo $b\mathcal{R}a$. Pak existuje prvek $m \in M$ takový, že pro všechna $x \in M \setminus \{m\}$ platí $m\mathcal{R}x$.

Důkaz (poučný)**:** Důkaz povedeme indukcí podle počtu prvků M.
(0) $n = 1$: Pro jednoprvkové množiny je tvrzení triviálně splněno.
(1) Vezměme libovolné $n \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že každá množina velikosti n, na které je tranzitivní relace $\mathcal{R}$ splňující podmínku vzájemné porovnatelnosti všech různých prvků M, má prvek m s vlastností, že $m\mathcal{R}x$ pro všechna $x \in M \setminus \{m\}$.

Uvažujme teď množinu M o $n+1$ prvcích uspořádanou relací $\mathcal{R}$ splňující příslušné požadavky (tranzitivita, porovnatelnost). Zvolme nějaké $y \in M$, označme $M' = M \setminus \{y\}$. Restrikce $\mathcal{R}$ na M' je pořád tranzitivní a porovnává všechny prvky, takže podle indukčního předpokladu existuje $m \in M'$ takové, že $m\mathcal{R}x$ pro všechna $x \in M' \setminus \{m\}$.

Protože $m, y \in M$ a $y \neq m$, musí být podle předpokladu porovnatelné, platí tedy $m\mathcal{R}y$ nebo $y\mathcal{R}m$.
Jestliže $m\mathcal{R}y$, pak $m\mathcal{R}x$ pro všechny $x \in (M' \setminus \{m\}) \cup \{y\} = M \setminus \{m\}$, máme tedy hledaný prvek.
Jestliže $y\mathcal{R}m$, pak tvrdíme, že y je ten hledaný prvek. Vezměme libovolné $x \in M \setminus \{y\} = M'$. Jestliže $x = m$, pak $y\mathcal{R}m$ říká $y\mathcal{R}x$ a vše je v pořádku. Jestliže $x \neq m$, pak $x \in M' \setminus \{m\}$ a proto $m\mathcal{R}x$, také $y\mathcal{R}m$ a podle tranzitivity $y\mathcal{R}x$, jak bylo potřeba.

□

Z toho již hravě odvodíme předchozí větu: Nechť $(A, \preceq)$ je lineárně uspořádaná množina, M její konečná podmnožina. Pak $\preceq$ je tranzitivní relace, která díky linearitě porovnává všechny prvky M. Podle věty 6b.9 tedy existuje prvek $m \in M$ takový, že pro $x \in M \setminus \{m\}$ máme $m \preceq x$. Díky reflexivitě ovšem máme i $m \preceq m$,
$\leftarrow$ takže $m \preceq x$ pro všechna $x \in M$ a m je tedy nejmenší prvek.

Věta nám poskytla existenci nejmenšího a největšího prvku za předpokladu, že máme lineární uspořádání. Následující tvrzení ukáže, že to platí i naopak, tedy bez linearity už se na takové prvky spoléhat nelze.

Fakt 6b.10.
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Jestliže platí, že každá dvouprvková podmnožina A má nejmenší prvek, pak $(A, \preceq)$ už je nutně lineárně uspořádaná množina.

Důkaz (poučný)**:** Nechť $x, y \in A$. Jestliže $x = y$, pak $x \preceq y$ z reflexivity. Jinak je $\{x, y\}$ dvouprvková podmnožina A, tudíž podle předpokladu musí mít nejmenší prvek. Pokud je jím x, tak platí $x \preceq y$, a pokud je jím y, tak platí $y \preceq x$. Tyto dva prvky jsou tedy porovnatelné.

□

Všechny konečné lineárně uspořádané množiny jsou v jistém smyslu stejné.

Věta 6b.11.
Nechť $(A, \preceq)$ je konečná částečně uspořádaná množina. Je to lineární uspořádání právě tehdy, jestliže lze prvky A napsat jako $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ tak, aby $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_n$.

Důkaz (poučný)**:** 1) $\Longrightarrow$: Indukcí dokážeme, že jestliže je n-prvková množina lineárně uspořádaná, pak ji lze příslušným způsobem seřadit.
(0) $n = 1$: Pro jednoprvkové množiny to evidentně platí, $A = \{a_1\}$.
(1) Vezměme libovolné $n \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že n-prvkové možiny lze řadit. Uvažujme nějakou lineárně uspořádanou množinu $(A, \preceq)$ o $n+1$ prvcích. Protože je to konečná lineárně uspořádaná množina, tak musí mít největší prvek m. Uvažujme $M' = M \setminus \{m\}$. Ukázali jsme, že restrikce lineárního uspořádání je zase lineární uspořádání, takže $(M', \preceq)$ je lineárně uspořádaná množina o n prvcích, tudíž ji podle indukčního předpokladu můžeme uspořádat jako $M \setminus \{m\} = \{a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_n\}$. Jelikož je m největší prvek M, tak určitě $a_n \preceq m$, také $a_n \neq m$, máme tedy $a_n \prec m$. Můžeme tudíž položit $a_{n+1} = m$ a jsme hotovi.
2) $\Longleftarrow$: Předpokládejme, že částečně uspořádanou množinu $(A, \preceq)$ lze napsat jako $A = \{a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_n\}$.
Pro dané $a, b \in A$ musí existovat i, j takové, že $a_i = a$ a $a_j = b$. Možnost $i = j$ odpovídá $a = b$, pak $a \preceq b$ díky reflexivitě. Pokud by bylo $i < j$, pak je a v tom řetězci někde před b, tudíž dle tranzitivity $a \preceq b$. Případ $i > j$ pak symetricky a naprosto stejně vede na $b \preceq a$. Takže a, b jsou porovnatelné.

□

Řečeno jinak, konečná uspořádaná množina je lineárně uspořádaná právě tehdy, jestliže její Hasseův diagram vypadá jako jedna šňůrka s korálky zdola nahoru. Pro nekonečné množiny to již platit nemusí. Nerovnost $\leq$ je zjevně lineární uspořádání na $\mathbb{Q}$, ale neumíme $\mathbb{Q}$ zapsat jako rostoucí posloupnost prvků.

V předchozí sekci jsme poukázali na praktický problém, kdy z určitých prerekvizit neboli relace, která neobsahuje cyklus, odvodíme částečné uspořádání, popřípadě pro ni vytvoříme diagram. Formálním nástrojem byl reflexivní a tranzitivní uzávěr. Pokud má tato výchozí relace formu seřazení prvků, tedy je dána posloupnost (třeba i nekonečná!) $a_1 \prec a_2 \prec \cdots$, pak příslušný reflexivní a tranzitivní uzávěr již vytváří lineární uspořádání. Formálně:

Věta 6b.12.
Nechť $I = \{1, 2, \dots, n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$ nebo $I = \mathbb{N}$. Nechť $A = \{a_i;\ i \in I\}$, kde $a_i \neq a_j$ pro $i \neq j$. Uvažujme relaci $\mathcal{R} = \{(a_{i-1}, a_i);\ i \in I, i > 1\}$, nechť $\mathcal{S}$ je její reflexivní a tranzitivní uzávěr. Pak $\mathcal{S}$ je lineární uspořádání.

Důkaz: Protože jsou a_i různé, dvojice (a_{i-1}, a_i) nemohou vytvářet cyklus. Podle věty 6a.7 je uzávěr $\mathcal{S}$ antisymetricky a z definice také reflexivní a tranzitivní, tedy je to částečné uspořádání. Protože $a_{i-1}\mathcal{R}a_i$ a $\mathcal{S}$ je uzávěr $\mathcal{R}$, musí také platit $a_{i-1}\mathcal{S}a_i$ pro všechna $i \in I$, $i > 1$.

Zvolme $a, b \in A$. Protože $A = \{a_i\}$, musí platit $a = a_i$, $b = a_j$ pro nějaké $i, j \in I$. Podobně jako v důkazu věty 6b.11 pak pomocí tranzitivity $\mathcal{S}$ ukážeme, že $a\mathcal{S}b$ nebo $b\mathcal{S}a$. Relace $\mathcal{S}$ je tedy lineární.

□

Pro konečné množiny tedy můžeme lineární uspořádání korektně zadat seřazením prvků $a_1 \prec a_2 \prec \cdots$.

Poznámka: Již jsme pracovali s myšlenkou, že relace je možné modifikovat přidáváním či ubíráním dvojic, čímž je možné vlastnosti porušit či naopak přidat (to jsme dělali s uzávěry). Někdy si zase hlídáme, abychom vlastnosti nepokazili (viz věty o průniku relací). Lineární uspořádání jsou v tomto smyslu nemodifikovatelná, protože každé je přesně na hraně mezi dvěma nebezpečími.

Lineární uspořádání na A musí díky linearitě pro každou dvojici $a, b \in A$ obsahovat jednu z dvojic (a, b), (b, a), ale kvůli antisymetrii nemůže pro $a \neq b$ obsahovat obě. Má tedy přesně jednu dvojici (a, b) pro každé $a, b \in A$. To znamená, že jakmile máme linární uspořádání, tak z něj nemůžeme beztrestně ani ubrat nějakou dvojici (pokazili bychom linearitu), ani přidat (pokazili bychom antisymetrii).

△

Poznámka bonusová: Pro danou množinu A můžeme všechna uspořádání na ní sebrat do množiny $\mathcal{M}$. Uspořádání lze porovnávat inkluzí, takže $(\mathcal{M}, \subseteq)$ je uspořádaná množina a lze na ni aplikovat naše poznatky, například lze vytvořit Hasseův diagram uspořádání na A. U ekvivalencí jsme zjistili, že pro danou množinu existují nejmenší a největší uspořádání vzhledem k inkluzi. Pro konečné množiny tedy ekvivalence na dané množině vytvoří diagram, který se nahoře i dole sbíhá.

U částečných uspořádání na A dokážeme najít to nejmenší vzhledem k inkluzi, a to stejné jako u ekvivalencí, tedy diagonální relaci všech smyček $\Delta(A)$. Je to také částečné uspořádání a každé částečné uspořádání na A má toto $\Delta(A)$ jako podmnožinu díky reflexivitě.

Další částečná uspořádání vznikají tak, že k tomuto nejmenšímu přidáváme další dvojice (tak, abychom zachovali tranzitivitu a antisymetrii). Na rozdíl od ekvivalencí ale neexistuje největší uspořádání. Je to způsobeno tím, že když vytváříme různá nová částečná uspořádání z $\Delta(A)$, tak můžeme přidávat dvojice různými způsoby, které jsou spolu ve sporu, tudíž je nelze všechny zahrnout v jednom velkém uspořádání.

Například rovnost na $\mathbb{N}$ je možno rozšířit na uspořádání $\leq$ a na uspořádání $\geq$. Jakákoliv relace $\mathcal{R}$, která by tyto dvě obsahovala jako podmnožinu, by musela obsahovat dvojice $(1, 13)$ a $(13, 1)$ a nemohla by tedy být uspořádáním.

Existují ale uspořádání, která jsou na dané množině maximální, a to jsou právě lineární uspořádání. Jak jsme viděli v předchozí poznámce, k danému lineárnímu uspořádání na A již nelze beztrestně přidat žádnou další dvojici, takže žádné větší uspořádání než lineární (ve smyslu inkluze) nemůže existovat.

Můžeme si to představovat tak, že když začneme vytvářet uspořádání přidáváním dvojic k $\Delta(A)$, tak si každým rozhodnutím o hierarchii dvou prvků uzavíráme možnost k mnoha dalším uspořádáním, která jsou s touto hierarchií ve sporu. Můžeme ale přidávat další a další dvojice, které ve sporu nejsou, a vytvářet tak větší a větší částečná uspořádání, až dojdeme k lineárnímu a tam se proces zastaví.

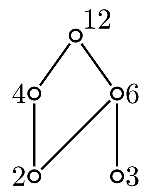
△

V poznámce jsme naznačili, že je možné k danému částečnému uspořádání přidat další dvojice a vytvořit tak lineární uspořádání. Z praktického pohledu to znamená, že k existující hierarchii přidáme další porovnání tak, aby vzniklo lineární seřazení prvků. To má významné praktické aplikace a proto také svou terminologii.

Definice.
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Relace $\preceq_L$ na A se nazývá **lineární rozšíření** (**linear extension**) relace $\preceq$, jestliže je $(A, \preceq_L)$ lineárně uspořádaná množina a $\preceq \subseteq \preceq_L$, tedy pro všechna $a, b \in A$ splňující $a \preceq b$ platí i $a \preceq_L b$.

Poznámka: De facto jde o lineární uspořádaný uzávěr. V definici se nevyžaduje úspornost, ale jak už jsme nahlédli, lineární uspořádání je automaticky úsporné, nelze z něj odebrat dvojice bez ztráty linearity.

Příklad 6b.f: Uvažujme množinu $A = \{2, 3, 4, 6, 12\}$ uspořádanou dělitelností.



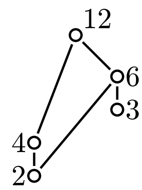
Tato možina není lineárně uspořádaná, jak ostatně napoví Hasseův diagram. Nebo si prostě všimneme, že 4 a 6 jsou dělitelností neporovnatelné.

Uvažujme teď tutéž množinu, ale s uspořádáním $\leq$. Pak ji lze krásně seřadit $2 < 3 < 4 < 6 < 12$, je to tedy již lineárně uspořádaná množina. Zároveň víme, že na kladných číslech dělitelnost implikuje nerovnost, tedy formálně řečeno je relace dělitelnosti podmnožinou relace nerovnosti. Proto je relace $\leq$ lineárním rozšířením relace dělitelnosti na A. Obdobný argument bude platit pro všechny podmnožiny $\mathbb{N}$ včetně $\mathbb{N}$ samotného.

Můžeme si všimnout, že toto rozšíření vznikne tak, že pro každé patro Hasseova diagramu zvolíme nějaké pořadí pro jeho prvky a pak jednotlivé skupiny dáme za sebe. Tento postup funguje a zároveň ukazuje, že lineárních rozšíření může být více. Když v každém patře použijeme opačné pořadí, vznikne tak lineární rozšíření dané pořadím

$$3 \prec_L 2 \prec_L 6 \prec_L 4 \prec_L 12.$$

Jak jsme dokázali výše, tyto vztahy již definují jisté lineární částečné uspořádání, které je rozšířením původního uspořádání. Čtenář může ověřit, že všechny vztahy původní dělitelnosti jsou stále zachovány i tímto novým uspořádáním.



Jsou i jiné linearizace, například

$$2 \prec_L 4 \prec_L 3 \prec_L 6 \prec_L 12.$$

To z našeho Hasseova diagramu nevzniklo, ale lze ji najít z jiného Hasseova diagramu pro dělitelnost, kde přesuneme body tak, jak nám to spojnice v původním diagramu dovolí. Pro částečné uspořádání obvykle existuje více konkrétních podob Hasseova diagramu a z nich pak obvykle víc možností převedení na lineární tvar.

△

Intuitivně, pokud pro uspořádání máme Hasseův diagram, pak jej vždy dokážeme převést na jednu šňůrku tak, že jej zmáčkneme z boku, aby patra zůstala nad sebou, ale každé se nějak seřadilo. Tím vznikne lineární uspořádání, které zároveň respektuje původní hierarchii.

Věta 6b.13.
Pro každou konečnou částečně uspořádanou množinu $(A, \preceq)$ existuje lineární rozšíření $\preceq_L$ daného uspořádání $\preceq$.

Důkaz (poučný, drsný)**:** Důkaz provedeme indukcí.
(0) $n = 1$: Pro jednoprvkové množiny tvrzení evidentně platí.
(1) Mějme libovolné $n \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že lineární rozšíření lze najít pro všechny n-prvkové množiny. Teď nechť $(M, \preceq)$ je uspořádaná množina o $n+1$ prvcích. Dokázali jsme, že konečné uspořádané množiny mají maximální prvek (či více), tak jedno $m = \max(M)$ vezměme a uvažujme množinu $M' = M \setminus \{m\}$, kterou uspořádáme restrikcí $\preceq$. Dostaneme n-prvkovou částečně uspořádanou množinu, proto podle indukčního předpokladu pro ni existuje lineární rozšíření $\preceq_l$. Můžeme tedy psát $M' = \{a_1 \prec_l a_2 \prec_l \cdots \prec_l a_n\}$.

Tvrdíme, že lineární uspořádání $\prec_L$ vzniklé podle věty 6b.12 seřazením

$$a_1 \prec_L a_2 \prec_L \cdots \prec_L a_n \prec_L m$$

je lineárním rozšířením $\preceq$.

Víme, že je to lineární uspořádání, takže stačí ukázat, že obsahuje původní uspořádání $\preceq$.

Uvažujme $a, b \in M$ takové, že $a \preceq b$. Jestliže $a = m$, pak to znamená $m \preceq b$. Protože je $m = \max(A)$, musí být i $b = m$ a proto platí $a \preceq_L b$ díky reflexivitě $\preceq_L$.

Dále tedy uvažujme $a \neq M$, tedy $a \in M'$. Pak existuje i takové, že $a = a_i$. Pokud $b = m$, tak máme v seřazení $a_i \prec_L \cdots \prec_L m$ a tedy díky tranzitivitě $a \preceq_L m$ neboli $a \preceq_L b$. Pokud $b \neq m$, tak $b \in M'$ a musí existovat j takové, že $b = a_j$. Protože je $\preceq_l$ rozšířením $\preceq$, tak $a_i \preceq_l a_j$, přesněji $a_i \prec_l a_j$, tedy $i < j$. Potom máme také seřazení $a_i \prec_L \cdots \prec_L a_j$, tedy musí platit $a \preceq_L b$.

Ukázali jsme, že z $a \preceq b$ vždy plyne $a \preceq_L b$.

□

Tento proces je užitečný a má své jméno. Pro matematiky je zajímavý teoreticky, protože s lineárním uspořádáním se lépe pracuje, říkají tomu **linearizace částečného uspořádání**. Pro lidi z computer science je to praktický nástroj a říkají tomu **topologické uspořádávání**, čímž se odvolávají na přesun pozice bodů Hasseova diagramu (matematici používají pojem „topologie“ pro něco úplně jiného, proto mají svůj název.)

Důkaz věty zároveň slouží jako praktický návod na algoritmus takového procesu, a protože jde o důkaz indukcí, půjde o algoritmus rekurzivní. Abychom ukázali, že i zde funguje symetrie mezi horním a dolním koncem, budeme v algoritmu budovat linearizaci zdola na rozdíl od důkazu, kde jsme to dělali shora.

S Algoritmus 6b.14.
Linearizace (topolologické uspořádání) pro danou uspořádanou množinu $(A,\preceq)$.

Verze 1.
Iniciace: $k:=0$.
Krok: Zvýšíme k o jedničku.
 Najdeme nějaké minimum množiny A.
 Označíme jej a_k a odebereme z A.
Opakovat dokud nenastane $A=\emptyset$.
Výsledek: $a_1\prec_L a_2\prec_L\dots\prec_L a_k$

Verze 2.
```
procedure topological sort ((A, ⪯))
k := 0;
while A ≠ ∅ do
    k := k + 1;
    a_k := min(A);
    A := A \ {a_k};
output: a_1 ≺_L a_2 ≺_L ··· ≺_L a_k;
```

△

Tento postup docela dobře koresponduje s algoritmem pro tvoření Hasseova diagramu. Rozdíl je v tom, že pro Hasseův diagram v každém kroku rovnou vybíráme všechna minima do jednoho patra, zatímco zde vždy z kandidátů jednoho vybereme.

Lze toho využít. Pokud máme Hasseův diagram uspořádání vytvořený pomocí standardního algoritmu zdola, pak linearizaci provedeme velice snadno: Nejprve vezmeme prvky z dolního řádku a seřadíme je libovolně. Za ně zařadíme prvky z druhého řádku a seřadíme je libovolně. A tak dále, až je množina linearizována.

Příklad 6b.g: Uvažujme částečně uspořádanou množinu $(\{1,2,3,4,5,6,12,20\},|)$, viz příklad 6a.g.

Pak $a_1=\min(\{1,2,3,4,5,6,12,20\})=1$, a_2 je nějaké $\min(\{2,3,4,5,6,12,20\})$, třeba $a_2=3$, a_3 je nějaké $\min(\{2,4,5,6,12,20\})$, třeba $a_3=2$, a_4 je nějaké $\min(\{4,5,6,12,20\})$, třeba $a_4=5$, a_5 je nějaké $\min(\{4,6,12,20\})$, třeba $a_5=6$, a_6 je nějaké $\min(\{4,12,20\})$, třeba $a_6=4$, a_7 je nějaké $\min(\{12,20\})$, třeba $a_7=12$, a a_8 je nějaké $\min(\{20\})$, tedy $a_8=20$,

Dostáváme linearizaci $1\prec_L 3\prec_L 2\prec_L 5\prec_L 6\prec_L 4\prec_L 12\prec_L 20$. Podíváte-li se na Hasseův graf z příkladu 6a.g, vidíte, že jsme prostě brali postupně řádky zleva doprava.

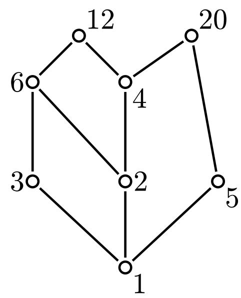


Diagram nám ukazuje, jaké další možné linearizace jsou k dispozici, zejména když se oprostíme od přesných pozic prvků a soustředíme se na naznačené hierarchie. Vidíme například, že 5 může být libovolně mezi jedniču a dvacítkou, tedy by klidně mohlo být hned druhé v seznamu nebo třeba předposlední, pokud bychom dali dvacítku nakonec. Pokud bychom naopak chtěli mít dvacítku co nejdříve, tak diagram ukazuje, že ji kromě pětky vytlačuje také čtyřka a všechno, co je pod ní, takže po dvacítce mohou přijít ještě čísla $3,6,12$.

△

Podobně jako u vytváření Hasseova diagramu, také zde může pomoci, když si vypíšeme všechny dvojice z odpovídající relace $\prec$. Minimum poznáme podle toho, že se v tomto seznamu nikdy nenachází vpravo ve dvojici. Když jej zvolíme a zařadíme jako nový prvek do seznamu pro linearizaci, tak ze seznamu vyškrtáme všechny dvojice, které tento prvek obsahují.

Tato práce se seznamem nám umožní aplikovat linearizační algoritmus také na případy, kdy není zadáno přímo částečné uspořádání, ale nějaký seznam prerekvizit (či jiná hierarchie) neobsahující cyklus.

Příklad 6b.h: Autor fantasy ságy napsal sedm knih, příběhů p_1 až p_7 ze stejného světa, které na sebe částečně navazují. Je dobré číst p_7 až po p_4 a p_6; p_6 až po p_5 a p_2; p_4 až po p_1, p_2 a p_3; p_2 až po p_1 a p_3. Protože číst více knih najednou není dobrý nápad, chceme knihy seřadit tak, abychom je pak četli v pořadí, které vyhovuje všem požadavkům. Matematicky řečeno, chceme lineární rozšíření pro částečné uspořádání dané zadanými podmínkami.

Nejprve předpoklady přepíšeme do tvaru relace: $p_4\prec p_7$, $p_6\prec p_7$, $p_5\prec p_6$, $p_2\prec p_6$, $p_1\prec p_4$, $p_2\prec p_4$, $p_3\prec p_4$, $p_1\prec p_2$ a $p_3\prec p_2$. Ověříme, že tyto požadavky neobsahují cyklus.

Hledáme minimum, tedy komponentu, která se nevyskytuje ve srovnáních napravo. Vidíme p_1, tím začneme. Teď odebereme všechna srovnání, ve kterých se p_1 vyskutuje, zbude seznam

$p_4\prec p_7$, $p_6\prec p_7$, $p_5\prec p_6$, $p_2\prec p_6$, $p_2\prec p_4$, $p_3\prec p_4$, $p_3\prec p_2$.

Hledáme minimum mezi $p_2,\dots,p_7$, najdeme třeba p_3. Dostáváme tedy $p_1\prec_L p_3$, nový seznam bez p_3:

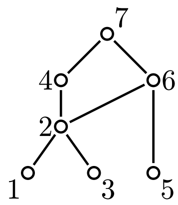
$p_4\prec p_7$, $p_6\prec p_7$, $p_5\prec p_6$, $p_2\prec p_6$, $p_2\prec p_4$.

Další minimum je třeba p_2. Dostáváme tedy $p_1\prec_L p_3\prec_L p_2$, nový seznam bez p_2: $p_4\prec p_7$, $p_6\prec p_7$, $p_5\prec p_6$.

Další minimum je třeba p_5. Dostáváme tedy $p_1\prec_L p_3\prec_L p_2\prec_L p_5$, nový seznam bez p_5: $p_4\prec p_7$, $p_6\prec p_7$.

Další minimum je třeba p_4. Dostáváme tedy $p_1\prec_L p_3\prec_L p_2\prec_L p_5\prec_L p_4$, nový seznam bez p_4: $p_6\prec p_7$.

Teď už dorazíme celou linearizaci, máme $p_1\prec_L p_3\prec_L p_2\prec_L p_5\prec_L p_4\prec_L p_6\prec_L p_7$.



Zajímavou shodou okolností jsme pro tyto podmínky vytvořili Hasseův diagram (příklad 6a.m). Vidíme, že naše linearizase je s ním v souladu. Hasseův diagram nám také ukazuje, jaké jsou pro linearizaci možnosti. Klíčovými pozicemi jsou p_2 a p_7. Vidíme, že p_1 a p_3 musí být před p_2 (v libovolném pořadí), zatímco p_4 a p_6 musí být (v libovolném vzájemném pořadí) mezi p_2 a p_7. Kniha p_5 je jakýsi volný agent, tu lze zařadit na libovolné místo před p_6. Například toto by měla být správná linearizace: $p_5 \prec_L p_3 \prec_L p_1 \prec_L p_2 \prec_L p_6 \prec_L p_4 \prec_L p_7$.
△

Seřazování činností podle prerekvizit je užitečné pro plánování. Asi si umíte představit, že něco takového se může hodit programu, který zadává úkoly procesoru, inženýrovi navrhujícímu výrobní linku a spoustě dalším lidem. Je to samostatný obor na pomezí matematiky (oprimalizace) a computer science, ke kterému jsme zde jen přičichli na té nejsnažší úrovni, opravdu zajímavé to začne být, když povolíme paralelní zpracování a podobné hrátky, započítáme do toho délku splnění úkolu, ceny operací a ceny prostojů a ceny přepravy od úkolu k úkolu a ještě chceme něco minimalizovat.

Shrňme si, jakou máme situaci. Jestliže chceme mít zaručeny nejmenší prvky, potřebujeme na to linearitu. Pro konečné množiny už to stačí, ale pro nekonečné ani to stačit nemusí. Tam už žádné prostředky na vynucení nemáme, prostě buď máme štěstí a nejmenší prvky jsou, nebo nejsou. Případy s existujícími nejmenšími prvky jsou důležité, tak jim dáme jméno.

Definice.
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Řekneme, že $(A, \preceq)$ je **dobře uspořádaná množina**, jestliže každá neprázdná podmnožina množiny A má nejmenší prvek.

Let $(A, \preceq)$ be a poset. We say that $(A, \preceq)$ is a **well-ordered set** if every non-empty subset of A has a least element.

Někteří autoři definují dobré uspořádání jako uspořádání, které je lineární a podmnožiny mají nejmenší prvky. Není v tom žádný rozdíl, protože i naše definice už linearitu automaticky zahrnuje.

Fakt 6b.15.
Každé dobré uspořádání je také lineární.

Vyplývá to okamžitě z faktu 6b.10.

Všimněte si, že zde ztrácíme onu symetrii mezi „horním a dolním koncem“. Jestliže máme dobré uspořádání $\preceq$ a hledáme největší prvek podmnožiny M, pak jej můžeme hledat jako nejmenší prvek M vůči $\preceq^{-1}$, ale o tomto inverzním uspořádání obecně nevíme, zda je dobré (viz níže).

Díky větě 6b.8 víme, že každá konečná lineárně uspořádaná množina je dobře uspořádaná. Teď představíme nejdůležitější nekonečnou dobře uspořádanou množinu.

6b.16. Princip dobrého uspořádání (well-ordering principle).
$(\mathbb{N}, \leq)$ je dobře uspořádaná množina.

M **6b.17 Poznámka o axiomech a matematice vůbec:** Toto tvrzení asi čtenáře nikterak nepřekvapilo, nejmenší čísla z různých množin přirozených čísel hledáme běžně. Zajímavé ovšem je, že jsme tento užitečný fakt neuvedli jako větu. Proč? Pro odpověď musíme začít od jiného konce.

V předchozích kapitolách jsme už viděli, jak matematika roste coby strom. Něco dokážeme, pak pomocí toho dokážeme něco těžšího, čímž se naše znalosti rozvětví, ale z těch nových věcí zase dostaneme další znalosti, a tak matematika postupně košatí. Ovšem na nový poznatek se obvykle potřebuje víc než jedna věc, takže se ty větve zase spojují a zaplétají a zase větví, vzniká tak velice komplikovaný keř. Zajímavá otázka: Co najdeme, když se po větvích pustíme opačným směrem? Každý fakt je dokázán pomocí jistých jednodušších faktíků, ty jsou zase dokázány pomocí jiných věcí. Takže sestupujeme stále níže až ke kořenům. Co tam najdeme?

V zásadě nic `:-)`. Neexistují totiž žádné věci, které by byly pravdivé samy od sebe. Můžete si například myslet, že bychom mohli jako jeden základ vzít $1 + 1 = 2$, ale pak si člověk položí otázku, co je vlastně 1, a rychle znejistí. Když tedy nejsou žádné absolutní pravdy, z čeho vlastně vycházíme?

Z takzvaných axiomů. Matematici si podobné otázky kladli někdy v 19. století, pořádně prozkoumali onen strom matematického vědění, co z čeho plyne a co by potřebovali znát, aby věci fungovaly, až se nakonec domluvili na seznamu kritických vlastností. Jsou to věci, které matematici považují za rozumná východiska pro budování matematiky. Není nutné věřit, že jsou pravdivé, matematici je spíše jen akceptují, a proto se jim neříká dogmata, ale axiomy.

Existuje skupina axiomů, která je všeobecně přijímaná a stojí na ní současná matematika, pro zajímavost je to třeba axiom, že vůbec nějaké množiny existují, nebo axiom, že když máme dvě množiny A a B, tak když je použijeme coby prvky v objektu $\{A, B\}$, tak ta nová věc je také množina. Hlavním kritériem pro výběr těchto axiomů bylo, aby matematika, která z nich vznikne, byla užitečná, tedy aby byla v souladu se světem, který nám pomáhá studovat. Významný vliv také měla logika, zvolené axiomy odpovídají tomu, co je považováno za „rozumné“. Pro úplnost poznamenejme, že (někteří) matematici také vytvářejí pro zábavu teorie matematiky založené na jiných axiomech, tam pak věci mnohdy fungují jinak.

Tím se dostáváme k principu dobrého uspořádání. Jeho platnost se pomocí standardních axiomů dokázat nedá. Protože to ale přijde matematikům rozumné, tak jeho fungování přibírají jako další axiom. V kapitole o indukci uvidíme, že přibráním tohoto axiomu si zároveň otevíráme dveře k mnoha dalším užitečným matematickým trikům, nejde tedy o žádnou kontroverzní volbu. Pokud se čtenář nechce hlouběji procházet filosofií matematiky, může to prostě brát jako další daný fakt, jako akceptuje i $1 + 1 = 2$.

△

→ Poznámka pro zvídavé: Protože axiomy hrají základní roli a silně ovlivní to, jak výsledná teorie vypadá, tak se samozřejmě pilně zkoumají. Jedním z témat je vzájemná souvislost. Pokud se třeba ukáže, že nějaký axiom už se dá dokázat na základě jiných, tak je vlastně navíc. O dnešních axiomech se ví, že jsou navzájem nezávislé a také nejsou ve sporu. Nezávislost a bezespornost je také kritériem pro přidávání nových axiomů.

Některé axiomy jsou kontroverzní. Prvním (a na dlouhou dobu jediným) axiomatickým systémem je rovinná geometrie (body, přímky, ...) vyvinutá a sepsaná Euklidem před dvěma tisíciletími. Byla to skutečná matematika včetně definic, tvrzení a důkazů a předběhla dobu o víc než tisíc let; jeho kniha o geometrii byla používána jako standardní učebnice ještě v 19. století. Nicméně jeden z axiomů mezi ostatní nezapadal a někdy na začátku 19. století si někteří matematici řekli, jak by geometrie vypadala bez něj. Vzniklo několik verzí neeuklidovských geometrií, ve kterých se dějí zajímavé věci, například úhly v trojúhelníku nemusí mít součet π. Pro matematiky to byla ohromná zábava, ale pak jim to zkazili fyzici, protože se ukázalo, že je to k něčemu užitečné, jmenovitě se to hodí pro moderní kosmologii (vesmír se díky Einsteinovi ukázal jako opravdu divné místo).

Asi nejkontroverznější je axiom výběru (AC, axiom of choice). Když máme nějaké množiny, tak nám umožní vybrat z každé po jednom prvku. To nevypadá nijak divně. Ovšem ukázalo se, že pomocí něj lze vzít kouli, rozříznout na pět kusů, ty různě zrotovat a přesunout a vzniknou dvě (plné!) koule stejně velké jako ta původní, viz Banach-Tarski paradox. To vypadá jako jasný důvod (AC) vyřadit, ale je tak masivně užitečný, že se stal součástí standardní sady axiomů a s tou věcí s koulemi se typický matematik smíří. Existuje nestandardní matematika bez (AC), kterou pěstuje menšina heretiků; mají z toho lepší pocit, ale také občas masivně obtížnější důkazy a některé výsledky standardní matematiky neumí získat. ←

V předchozích kapitolách jsme již Princip dobrého uspořádání použili, závisí na něm některé významné výsledky, třeba existence dělení se zbytkem (věta 1a.26) a Bezoutova identita (věta 1b.15).

Příklad 6b.i: Použijeme princip dobrého uspořádání k důkazu, že všechna přirozená čísla lze popsat nejvýše 10 českými slovy.

Důkaz sporem: Předpokládejme, že to nejde. Pak je množina M přirozených čísel, která nejdou popsat nejvýše 10 českými slovy, neprázdná. Podle principu dobrého uspořádání tedy musí existovat její nejmenší prvek, nazvěme jej m. Pak je m vlastně *nejmenší přirozené číslo, které nelze popsat nejvýše desíti českými slovy*, takže jsme jej popsali přesně deseti českými slovy a máme spor.

△

M **Poznámka:** Další nepovinný náhled za oponu matematiky: Všimněte si, že jsme dokázali popsatelnost všech čísel deseti slovy, ale tento důkaz nám nedal žádný návod, jak to vlastně dělat. Já třeba nevím, jak bych popsal číslo 1946240936592523658376, jen vím, že to nějak musí jít. Jsou principiálně dva druhy důkazů, že něco existuje. Důkazy *konstruktivní* to dokazují tak, že dotyčný objekt přímo najdou (či doloží, jak jej najít). Tento přístup jsme používali v této knize. Pak jsou důkazy *nekonstruktivní*, kdy se existence dovodí nějakým trikem, aniž bychom ale nějaký exemplář předvedli. Někteří matematici s těmito důkazy mají filosofický problém a neuznávají je za platné. Mají tak svou vlastní teorii matematiky, která je o něco chudší než ta obecně přijímaná, protože k některým výsledkům se konstruktivně neumějí dostat, a komplikovanější, protože k mnoha výsledkům se nakonec dopracovali, ale trnitější cestou.

△

Dobře uspořádané množiny jsou velice užitečné, mimo jiné tím, že na nich lze používat matematickou indukci (viz kapitola 7d). Ukážeme jich teď více, ale začneme pro srovnání několika případy, kdy dobrota naopak selže.

Příklad 6b.j: $(\mathbb{Z}, \leq)$ je lineárně uspořádaná množina, ale není dobře uspořádaná, neboť neprázdná podmnožina $M = \mathbb{Z}$ určitě nemá nejmenší prvek, tedy prvek m, který by splňoval $m \leq n$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$.
△

Příklad 6b.k: $(\mathbb{Q}, \leq)$ je lineárně uspořádaná množina, ale není dobře uspořádaná, neboť neprázdná podmnožina $M = \{x \in \mathbb{Q};\ 0 < x < 1\}$ určitě nemá nejmenší prvek.

Tento příklad je zajímavý tím, že M „neutíká“ nikam do nekonečna.
△

Příklad 6b.l: Nechť X je libovolná alespoň dvouprvková množina, třeba konečná, uvažujme množinu jejích podmnožin $A = P(X)$ uspořádanou inkluzí. Pak nejde o lineární uspořádání, tím pádem ani nemůže být dobré, viz fakt 6b.15 a příklad 6a.b.

Podobně nedostáváme lineární uspořádání u relace dělitelnosti, pokud vhodně zvolíme množinu A. Například na množině $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ dává dělitelnost dobré uspořádání, ale na $A = \{1, 2, 3, 6\}$ už ne: Podmnožina $\{2, 3\}$ nemá vůči dělitelnosti nejmenší prvek.

Konečné příklady nedobrých uspořádání se tedy vyrábějí velice snadno.
△

Příklad 6b.m: $(\mathbb{N}, \geq)$ je lineárně uspořádaná množina, ale není dobře uspořádaná, neboť neprázdná podmnožina $M = \mathbb{N}$ určitě nemá nejmenší prvek. Opravdu? Takový prvek m by musel splňovat $m \geq n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, takže neexistuje.
△

Poslední příklad ukazuje, že když vezmeme dobře uspořádanou množinu $(\mathbb{N}, \leq)$ a přejdeme k duálnímu uspořádání $(\mathbb{N}, \leq^{-1}) = (\mathbb{N}, \geq)$, tak se dobrota může ztratit. Přechod k inverznímu uspořádání tedy rozhodně není něco, co bychom chtěli u dobře uspořádaných množin dělat, a ztrácíme onu příjemnou symetrii mezi pohledy „shorna“ a „zdola“. Naopak přechod k podmnožině je jako obvykle bezproblémový.

Fakt 6b.18.
Nechť $(A, \preceq)$ je dobře uspořádaná množina. Pak pro libovolnou neprázdnou podmnožinu $B \subseteq A$ je restrikce $\preceq$ na B dobré uspořádání.

Důkaz (rutinní)**:** Podle faktu 6b.5 už víme, že tato restrikce je lineární uspořádání. Zbývá dokázat, že je dobré. Nechť M je neprázdná podmnožina B. Pak je to i neprázdná podmnožina A a tudíž existuje její nejmenší prvek m. Podmínka, že $m \preceq x$ pro všechna $x \in M$, je ale zcela nezávislá na tom, v jaké nadmnožině M je, relace $\preceq$ a její restrikce na B se na M shodují, tudíž je m také minimem M v $(B, \preceq)$.
□

Dobře uspořádané množiny tedy můžeme získávat pomocí podmnožin $(\mathbb{N}, \leq)$, které lze i různě přetvářet.

Příklad 6b.n: Uvažujme $N \in \mathbb{Z}$ a $A = \{n \in \mathbb{Z};\ n \geq N\}$. Tvrdíme, že $(A, \leq)$ je dobře uspořádaná množina.

Vezměme libovolnou neprázdnou podmnožinu M množiny A. Uvažujme posun této množiny

$$Y = \{x + N + 1;\ x \in M\}.$$

Protože pro $x \in M$ máme $x \geq N$, je $x + N + 1 \geq 1$ a tedy $x \in \mathbb{N}$. Proto je Y neprázdnou podmnožinou $(\mathbb{N}, \leq)$ a tudíž má nejmenší prvek m. Ten splňuje $m \leq y$ pro $y \in Y$. Pak pro všechna $x \in M$ máme $m \leq x + N + 1$ neboli $m - N - 1 \leq x$ a $m - N - 1 \in M$, proto je $m - N - 1$ nejmenším prvkem množiny M.
△

Příklad 6b.o: Viděli jsme, že $\mathbb{Q}$ není vzhledem k nerovnosti dobré uspořádání, neplatí to ani pro množiny typu $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Kořenem problému je schopnost zlomků dostat se libovolně blízko k určitému číslu, což ale vyžaduje jmenovatele rostoucí do nekonečna. To znamená, že některé podmnožiny $(\mathbb{Q}, \leq)$ už mohou být dobré.

Zvolme $N \in \mathbb{N}$ a uvažujme množinu $A = \left\{\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, q \leq N\right\}$. Neboli je to nekonečná podmnožina $\mathbb{Q}$ zlomků, jejichž jmenovatelé nepřekročí N. Pro každé $\frac{p}{q} \in A$ je $q \leq N$, proto je q jedním z faktorů faktoriálu $N!$ a tedy $N!\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$.

Uvažujme nějakou neprázdnou podmnožinu $M \subseteq A$. Pak můžeme přejít k neprázdné podmnožině
$$Y = \{N! \cdot x;\ x \in M\}$$
přirozených čísel, která musí mít nejmenší prvek $m \in \mathbb{N}$. Pak $\frac{m}{N!} \in M$ a díky $m \leq x$ máme i $\frac{m}{N!} \leq \frac{x}{N!}$, tedy $\frac{m}{N!}$ je nejmenším prvkem M.
△

6b.19 Uspořádání a kartézský součin

V kapitole 4 o relacích jsme zavedli uspořádání na kartézském součinu množin. Vysoce užitečné to začne být zejména u uspořádání. Připomeňme, že máme-li množiny s relacemi $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_m, \preceq_n)$, pak součinové uspořádání porovnává vektory z $A_1 \times \dots \times A_n$ předpisem $(a_i) \preceq (b_i)$ právě tehdy, pokud $a_i \preceq_i b_i$ po všechna i.

Na začátku této kapitoly jsme nahlédli, že díky větě 4c.12 je součinová relace částečných uspořádání také částečné uspořádání. Příklad 6a.k ale ukazuje, že linearita se nemusí přenášet. Dokonce je to pravidlem. Pokud mají alespoň dvě z množin A_i alespoň dva prvky, tak součinová relace už jistě nebude lineární bez ohledu na to, zda jednotlivé složky $\preceq_i$ lineární jsou nebo ne (viz cvičení 6b.16).

To bývá v mnoha aplikacích zásadní problém. V takovém případě se standardně používá uspořádání inspirované tím, jak řadíme slova ve slovnících. Odtud i jeho název.

Definice.
Uvažujme částečně uspořádané množiny $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_n, \preceq_n)$. Definujeme **lexikografické uspořádání** (**lexicographic ordering**) $\preceq_L$ na množině $A = A_1 \times \dots \times A_n$ následovně: Pro $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in A$ platí $a \preceq_L b$ právě tehdy, jestliže $a_i = b_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$ (tedy $a = b$), nebo existuje index k takový, že $a_i = b_i$ pro všechna i splňující $1 \leq i < k$ a $a_k \prec_k b_k$.

Příklad 6b.p: Uvažujme $A_1 = A_2 = \{a, b, c, d\}$ uspořádané podle abecedy a $A_3 = A_4 = A_5 = \{1, 2, 3, .., 9\}$ uspořádané nerovností $\leq$. Označme $A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$ (můžeme si představit poznávací značky aut), nechť $\preceq$ je příslušné lexikografické srovnání.

Pak $a = (a, c, 1, 9, 9)$ a $b = (a, c, 3, 1, 1)$ jsou prvky z A. Zkusíme je porovnat. První souřadnice nerozhodly (rovnost), tedy zkusíme druhé, ty také nerozhodly, ale u třetích souřadnic máme $1 < 3$. Platí tedy $a \preceq b$ podle druhé možnosti v definici (pro $k = 3$) a na dalších souřadnicích už nezáleží.

Samozřejmě přesně takto porovnáváme slova ve slovníku a nepřekvapí nás, že „potom“ je dříve než „předtím“.
△

Zejména v důkazech je praktičtější jiný přístup, kdy tu možnost rovnosti oddělíme. Nejprve zavedeme „ostré srovnání“ na A, značená tradičně $(a_1, \dots, a_n) \prec_L (b_1, \dots, b_n)$, podmínkou „existuje index k takový, že $a_i = b_i$ pro všechna i splňující $1 \leq i < k$ a $a_k \prec_k b_k$“. Pokud ukážeme, že je to asymetrická a tranzitivní relace, tak podmínkou „$a \prec_L b$ nebo $a = b$“ vznikne částečné uspořádání, viz věta 6a.2 (ii), které zjevně souhlasí s naší definicí.

Věta 6b.20.
Uvažujme částečně uspořádané množiny $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_n, \preceq_n)$. Pak je $A = A_1 \times \dots \times A_n$ spolu s lexikografickým uspořádáním $\preceq_L$ částečně uspořádaná množina.

Důkaz (z povinnosti)**:** Uvažujme relaci $\prec$ definovanou podmínkou
• $(a_1, \dots, a_n) \prec_L (b_1, \dots, b_n)$ právě tehdy, když existuje $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že $a_i = b_i$ pro všechna i splňující $1 \leq i < k$ a $a_k \prec_k b_k$.

Ukážeme, že je to asymetrická a tranzitivní relace.

Antisymetrie: Vezměme libovolné $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in A$ takové, že $a \prec_L b$. Pak existuje k takové, že $a_i = b_i$ pro $i < k$ a $a_k \prec_k b_k$. Dokážeme, že nemůže nastat $b \prec_L a$.

Předpokládejme opak. Pak také máme l splňující $a_i = b_i$ pro $i < l$ a $b_l \prec_l a_l$. Když $a_i = b_i$ pro $i < k$ ale $a_l \neq b_l$, tak nutně $k \leq l$, symetrickým argumentem pak odvodíme, že musí být $k = l$. Máme tedy $a_k \prec_k b_k$ a zároveň $b_k \prec_k a_k$, což je ve sporu s asymetrií $\prec_k$.

Tranzitivita: Vezměme libovolné $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n), c = (c_1, \dots, c_n) \in A$ takové, že $a \prec_L b$ a $b \prec_L c$. Pak podle definice existuje k takové, že $a_i = b_i$ pro $i < k$ a $a_k \prec_k b_k$, a také existuje l splňující $b_i = c_i$ pro $i < l$ a $b_l \prec_l c_l$. Nechť $m = \min(k, l)$. Pak pro $i < m$ máme $a_i = b_i = c_i$.

Co platí pro m? Jsou dvě možnosti, podle toho, jestli je to minimum rovno k nebo l (nevylučují se, v případě $m = k = l$ budou platné oba argumenty, takže to nevadí). Jak vypadá případ $m = k \leq l$? Podle předpokladu $a_k \prec_k b_k$, tedy $a_m \prec_m b_m$. Co bude s l? Pro $m < l$ máme $b_m = c_m$, pro $m = l$ máme $b_m \prec_m c_m$, každopádně

$b_m \preceq_m c_m$. Jsme tedy v situaci $a_m \prec_m b_m \preceq_m c_m$ a fakt 6a.3 (iii) dává $a_m \prec_m c_m$, což spolu se závěrem předchozího odstavce dává $a \prec_L c$. Podobně to dopadne, pokud $m = l \leq k$.

□

Teď potvrdíme, v čem je hlavní výhoda lexikografického uspořádání.

Věta 6b.21.
Nechť $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_n, \preceq_n)$ jsou částečně uspořádané množiny, uvažujme $A = A_1 \times \dots \times A_n$ spolu s lexikografickým uspořádáním $\preceq_L$.
(i) Jestliže jsou všechny $(A_i, \preceq_i)$ lineárně uspořádané, tak je také $(A, \preceq_L)$ lineárně uspořádaná.
(ii) Jestliže jsou všechny $(A_i, \preceq_i)$ dobře uspořádané, tak je také $(A, \preceq_L)$ dobře uspořádaná.

Důkaz (drsný, poučný)**:** (i): Předpokládejme, že všechny $(A_i, \preceq_i)$ jsou lineárně uspořádané. Vezměme libovolné $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in A$. Buď jsou si rovny, pak $a \preceq_L b$ a tyto prvky jsou porovnatelné. Nebo existují j taková, že $a_j \neq b_j$, nechť k je z nich nejmenší. Pak $a_i = b_i$ pro $i < k$ a $a_k \neq b_k$. Protože je $(A_k, \preceq_k)$ lineární, tak určitě buď $a_k \preceq_k b_k$ nebo $b_k \preceq_k a_k$, díky $a_k \neq b_k$ to znamená $a_k \prec_k b_k$ nebo $b_k \prec_k a_k$. V prvním případě pak máme $a \preceq_L b$, v druhém $b \preceq_L a$. Lexikografické uspořádání je tedy lineární.
(ii): Důkaz provedeme indukcí na n.
(0) Pro $n = 1$ máme jednu množinu, jejíž součin se sebou je zase ona, tedy je dobře uspořádaná.
(1) Zvolme nějaké $n \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že kartézský součin libovolných n dobře uspořádaných množin je dobrý v lexikografickém uspořádání. Teď mějme $n+1$ dobře uspořádaných množin $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_{n+1}, \preceq_{n+1})$ a jejich kartézský součin A s lexikografickým uspořádáním $\preceq_L$.

Uvažujme $\widehat{M_1} = \{a_1;\ (a_1, \dots, a_{n+1}) \in M\}$ (ze všech prvků M vytáhneme první souřadnici). To je neprázdná podmnožina A_1, takže podle předpokladu musí existovat její nejmenší prvek m_1. Máme tedy prvek takový, že kdykoliv $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in M$, pak $m_1 \preceq_1 a_1$. Navíc tento prvek pochází z nějakého $(m_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \in M$. Nechť

$$M_1 = \{(a_2, a_3, \dots, a_{n+1}) \in M;\ (m_1, a_2, a_3 \dots, a_{n+1}) \in M\}.$$

Zde bereme všechny prvky z M, jejichž první souřadnice je m_1, tuto první souřadnici vynecháme a zbývající dáme do M_1. Pak M_1 je neprázdná podmnožina kartézského součinu $A_2 \times \dots \times A_{n+1}$. To je n množin, proto podle indukčního předpokladu jde o dobře uspořádanou množinu vzhledem k příslušnému lexikografickému uspořádání, tudíž tato množina musí mít nejmenší prvek $(m_2, \dots, m_{n+1})$. Nechť $m = (m_1, m_2, \dots, m_{n+1})$. Tvrdíme, že jde o nejmenší prvek M vzhledem k lexikografickému uspořádání na A.

Vezměme tedy libovolné $a = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in M$. Protože $a_1 \in \widehat{M_1}$, musí podle volby m_1 platit $m_1 \preceq_1 a_1$. Pokud platí dokonce $m_1 \prec_1 a_1$, pak již $m \preceq_L a$ podle definice lexikografického uspořádání (rozhodla hned první souřadnice).

Pokud $m_1 \prec_1 a_1$ neplatí, tak nutně $m_1 = a_1$. Pak ovšem $(a_2, \dots, a_{n+1}) \in M_1$ a tudíž $(m_2, \dots, m_{n+1}) \preceq (a_2 \dots, a_{n+1})$ v lexikografickém uspořádání $A_2 \times \dots \times A_{n+1}$. To zase nabízí dvě možnosti.

Jedna je, že $m_i = a_i$ pro všechna $i = 2, \dots, n+1$, ale my teď předpokládáme i $m_1 = a_1$, tedy $m_i = a_i$ pro všechna i a máme $m \preceq_L a$. Druhá je, že existuje nějaké k takové, že $m_i = a_i$ pro $i = 2, \dots, k-1$ a $m_k \prec_k a_k$. To ale znamená, že $m_i = a_i$ pro $i = 1, \dots, k-1$ a $m_k \prec_k a_k$, tedy $m \preceq_L a$. Důkaz hotov.

□

Naopak se dá ukázat, že stačí, aby jen jediná složka takového kartézského součinu nebyla lineárně či dobře uspořádaná, a už to pokazí pro celý součin, například $(\mathbb{Z}, \leq) \times (\mathbb{N}, \leq)$ s lexikografickým uspořádáním není dobře uspořádaná.

V typickém případě jsou všechny množiny A_i stejné a porovnáváme prvky z $A \times \dots \times A$, kde máme jen jedno uspořádání.

Příklad 6b.q: Uvažujme $\mathbb{Z}^6$ s lexikografickým uspořádáním daným relací $\leq$. Pak máme $(1,2,3,9,9,9) \prec_L (1,2,4,1,1,1)$, rozhodla třetí souřadnice a další už nehrály roli. V součinovém uspořádání by tyto vektory byly neporovnatelné, neboť u třetí a čtvrté souřadnice máme opačné nerovnosti.
△

Příklad 6b.r: Co vše je menší než $(3,4)$ v množině $(\mathbb{N}, \leq) \times (\mathbb{N}, \leq)$ uspořádané lexikograficky?
Aby platilo $(x,y) \prec_L (3,4)$, tak buď musí rozhodnout první souřadnice, tedy musí být $x = 1$ či $x = 2$ a zbytek libovolný, nebo $x = 3$ a rozhoduje až druhá souřadnice. Proto

$$\{(x,y) \in \mathbb{N}^2;\ (x,y) \preceq_L (3,4)\} = \{(1,y);\ y \in \mathbb{N}\} \cup \{(2,y);\ y \in \mathbb{N}\} \cup \{(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

△

Příklad 6b.s: Lexikografické uspořádání, které jsme definovali, nám umožňuje porovnávat vektory o stejné délce. Ve slovníku ale porovnáváme slova různých délek. Jak by se taková definice udělala obecně? Základní myšlenka je, že když máme dva vektory nestejné délky, tak ten delší zkrátíme. Pro zjednodušení zápisu budeme předpokládat, že všechny složky pocházejí z jedné množiny.

Mějme uspořádanou množinu $(A,\preceq)$ a uvažujme množinu $B=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A^n$. Nejprve definujeme ostrou relaci takto: Pro $(a_i)_{i=1}^m,(b_j)_{j=1}^n\in B$ nechť $k=\min(m,n)$. Platí $(a_i)_{i=1}^m\prec(b_j)_{j=1}^n$ právě tehdy, když buď $(a_i)_{i=1}^k\prec_L(b_i)_{i=1}^k$, nebo $(a_i)_{i=1}^k=(b_i)_{i=1}^k$ a $m<n$.

Pak standardním způsobem definujeme $(a_i)_{i=1}^m\preceq(b_j)_{j=1}^n$ jestliže buď $(a_i)_{i=1}^m\prec(b_j)_{j=1}^n$ nebo $(a_i)_{i=1}^m=(b_j)_{j=1}^n$.

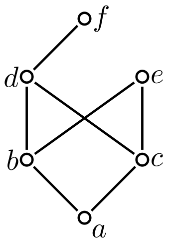
Tímto dostaneme částečné uspořádání na B. Není problém tuto definici převést na uspořádání pro řetězce, prostě se řetězce považují za vektory, například bereme *ahoj* jako (a,h,o,j). Na abecedě máme přirozené částečné uspořádání a právě popsanou procedurou z něj dostaneme obvyklé slovníkové uspořádání, takže třeba auto$\preceq$autobus$\preceq$autobusek$\preceq$auvajs.

△

V počítačových vědách (a tedy i diskrétní matematice) je lexikografické uspořádání velmi užitečné. Na druhou stranu pro analýzu či fyziku lexikografické uspořádání není tím pravým, protože nebere ohled na velikost vektorů. Různé obory tedy mají různé požadavky a není jedno uspořádání na vektorech, které by vyhovělo všem.

Cvičení

Cvičení 6b.1 (rutinní)**:** Uvažujte uspořádanou množinu danou následujícím Hasseovým diagramem.



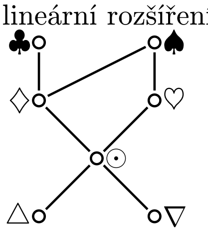
Najděte maximum, minimum, největší a nejmenší prvek podmnožiny $M=\{a,b,c,d,e\}$, pokud existují.

Cvičení 6b.2 (rutinní)**:** Uvažujte uspořádanou množinu $(\{3,5,9,15,24,45\},|)$, tedy relace dělitelnosti.
a) Nakreslete její Hasseův diagram.
b) Najděte její maxima, minima, největší a nejmenší prvek, pokud existují.
c) Najděte maxima, minima, největší a nejmenší prvek podmnožiny $M=\{3,9,15\}$, pokud existují.

Cvičení 6b.3 (rutinní)**:** Nakreslete Hasseův diagram množiny, která
a) má nejmenší prvek, ale nemá největší;
b) má největší prvek, ale nemá nejmenší;
c) nemá nejmenší ani největší prvek.

Cvičení 6b.4 (rutinní)**:** Uvažujte množinu množin $\mathcal{A}=\{\{1\},\{2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5\}\}$ uspořádanou relací býti podmnožinou (viz cvičení 6a.6).
a) Najděte maximum, minimum, největší a nejmenší prvek množiny A, pokud existují.
b) Najděte nějaké lineární rozšíření $(A,\subseteq)$.

Cvičení 6b.5 (rutinní)**:** Uvažujte uspořádání dané následujícím Hasseovým diagramem. Najděte nějaké jeho lineární rozšíření.



Cvičení 6b.6 (rutinní)**:** Uvažujme prvky $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$, mezi kterými je dána hierarchie podmínkami $a_1\prec a_2$, $a_1\prec a_5$, $a_2\prec a_5$, $a_4\prec a_5$, $a_4\prec a_6$, $a_4\prec a_7$, $a_5\prec a_7$, $a_6\prec a_7$.
Ověřte, že tato relace neobsahuje cyklus.
Najděte nějakou linearizaci této hierarchie, tedy linearizaci částečného uspořádání daného touto relací.

Cvičení 6b.7 (rutinní)**:** Uvažujte množinu $A = \{2, 3, 10, 30, 60, 90\}$ uspořádanou relací dělitelnosti $a\,|\,b$. Najděte nějaké její lineární rozšíření.

Cvičení 6b.8 (rutinní)**:** Uvažujte množinu vektorů $A = \{(3, 23), (13, 23), (23, 3), (23, 13), (23, 23)\}$ uspořádanou součinovým uspořádáním založeným na $\geq$, tedy $(u, v) \preceq (x, y)$ jestliže $u \geq x$ a $v \geq y$. Najděte nějaké její lineární rozšíření.

Cvičení 6b.9 (poučné)**:** Pro následující uspořádání najděte dvojici prvků, která je porovnatelná, a dvojici prvků, která porovnatelná není.
a) M je množina matic 2×2 nad celými čísly. Uspořádání $\preceq$ na M je dáno podmínkou $\det(A) < \det(B)$ nebo $A = B$.
b) $\mathcal{M}$ je množina konečných podmnožin $\mathbb{N}$. Pro takovou podmnožinu M definujeme $|M|$ jako počet prvků M. Uspořádání $\preceq$ na $\mathcal{M}$ je dáno podmínkou $|M| < |N|$ nebo $M = N$.
c) $\mathcal{P}$ je množina polynomů nad $\mathbb{R}$. Pro $p \in \mathcal{P}$ definujeme parametr $k(p)$ jako $\max|r|$, kde se maximum bere přes všechny kořeny r polynomu p; pro polynomy bez kořenů definujeme $k(p) = 0$.
Uspořádání $\preceq$ na $\mathcal{P}$ je dáno podmínkou $k(p) < k(q)$ nebo $p = q$.
d) Nechť I je omezený uzavřený interval v $\mathcal{R}$ (nedegenerovaný, tedy má nenulovou délku). Uvažujme množinu $C(I)$ všech spojitých funkcí na I. Ty musejí mít maximum a minimum, proto pro $f \in C(I)$ můžeme definovat parametr $\|f\|_\infty = \max_{x\in I}\{|f(x)|\}$.
Poznámka: Pro tyto funkce je to norma, tedy jakási velikost funkce.
Uspořádání $\preceq$ na $C(I)$ je dáno podmínkou $\|f\|_\infty < \|g\|_\infty$ nebo $f = g$.

Cvičení 6b.10: Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina a M její neprázdná podmnožina. Dokažte:
a) Jestliže jsou m_1 a m_2 různá maxima M, pak nemůže platit $m_1 \preceq m_2$ ani $m_2 \preceq m_1$.
b) Jestliže jsou m_1 a m_2 různá maxima M, pak nemůže platit $m_1 \preceq m_2$ ani $m_2 \preceq m_1$.

Cvičení 6b.11 (rutinní)**:** Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Dokažte, že $\preceq$ je lineární právě tehdy, když je $\preceq^{-1}$ lineární.

Cvičení 6b.12 (rutinní)**:** Která z následujících množin je dobře uspořádaná?
a) $(\{n \in \mathbb{Z};\ n \geq -13\}, \leq)$;
b) $(\{n \in \mathbb{Z};\ n > -13\}, \leq)$;
c) $(\{n \in \mathbb{Z};\ n > -13\}, \geq)$;
d) $(\{n \in \mathbb{Z};\ n \text{ sudé}\}, \leq)$;
e) $(\mathbb{Q}, \leq)$;
f) $(\mathbb{Q}^+, \leq)$;
g) $(\{x \in \mathbb{Q}^+;\ x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ q < 100\}, \leq)$.

Cvičení 6b.13 (rutinní)**:** Nechť $A = \{a, b, c\}$, uspořádejme ji podle abecedy. Uvažujte $A \times A$ s lexikografickým uspořádáním. Najděte všechny prvky z $A \times A$, které jsou vzhledem k lexikografickému uspořádání
a) menší než (a, c); b) větší než (a, c); c) menší než (b, b).

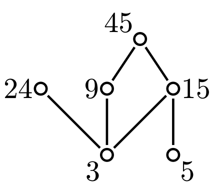
Cvičení 6b.14 (rutinní)**:** Uspořádejte podle lexikografického uspořádání binární řetězce 0, 01, 11, 001, 010, 011, 0001, 0101.

Cvičení 6b.15 (rutinní)**:** a) Nakreslete Hasseův diagram pro $(\{1, 2, 3\}, \leq)^2$ v lexikografickém uspořádání.
b) Nakreslete Hasseův diagram pro $(\{1, 2, 3\}, \leq)^2$ v součinovém uspořádání („po složkách").

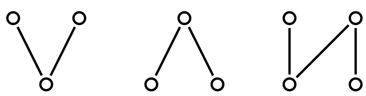
Cvičení 6b.16 (poučné)**:** . Nechť $(A, \preceq_A)$ a $(B, \preceq_B)$ jsou alespoň dvouprvkové uspořádané množiny. Ukažte, že součinové uspořádání $\mathcal{R} = \preceq_A \times \preceq_B$ na $A \times B$ není lineární.
Nápověda: Příklad 6a.k.

Řešení:

6b.1: Max d, e, největší neex., min a, nejmenší a.
6b.2: a) Viz vpravo.



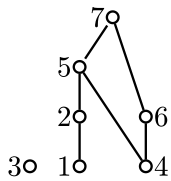
b) Max 24,45, největší neex., min 3,5, nejmenší neex.
c) Max 9,15, největší neex., min 3, nejmenší 3.

6b.3: Třeba 
6b.4: a) Max $\{1, 2, 3, 4\}$, největší $\{1, 2, 3, 4\}$, min $\{1\}$, $\{2\}$, nejmenší neex.

b) Třeba $\emptyset \prec_L \{1\} \prec_L \{2\} \prec_L \{1,2,4\} \prec_L \{1,2,3\} \prec_L \{1,2,3,4\} \prec_L \{1,2,3,4,5\}$.

6b.5: Například $\triangle \prec_L \nabla \prec_L \odot \prec_L \heartsuit \prec_L \diamondsuit \prec_L \clubsuit \prec_L \spadesuit$ nebo $\nabla \prec_L \triangle \prec_L \odot \prec_L \diamondsuit \prec_L \clubsuit \prec_L \heartsuit \prec_L \spadesuit$ nebo ...

6b.6:



Vyhoví libovolné pořadí v souladu s diagramem napravo. Prvky a_1, a_2, a_5, a_7 mají jasně dané pořadí, zatímco p_4 a p_6 mají více svobody. a_3 je volný agent. Ukážeme některé možnosti:

$a_1 \prec_L a_2 \prec_L a_3 \prec_L a_4 \prec_L a_5 \prec_L a_6 \prec_L a_7$,

$a_3 \prec_L a_4 \prec_L a_1 \prec_L a_2 \prec_L a_5 \prec_L a_6 \prec_L a_7$,

$a_4 \prec_L a_6 \prec_L a_1 \prec_L a_2 \prec_L a_5 \prec_L a_7 \prec_L a_3$.

6b.7: Například $3 \prec_L 2 \prec_L 10 \prec_L 30 \prec_L 90 \prec_L 60$ nebo $2 \prec_L 10 \prec_L 3 \prec_L 30 \prec_L 60 \prec_L 90$ nebo dle velikosti nebo ...

6b.8: Třeba $(23,23) \prec_L (23,13) \prec_L (23,3) \prec_L (13,23) \prec_L (3,23)$
nebo $(23,23) \prec_L (13,23) \prec_L (3,23) \prec_L (23,13) \prec_L (23,3)$
nebo $(23,23) \prec_L (13,23) \prec_L (23,13) \prec_L (3,23) \prec_L (23,3)$ nebo ...

6b.9: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pak $A \preceq B$. Neporovnatelné jsou například $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, pak $|A| = |B| = 1$ ale $A \neq B$.

b) $M = \{13\}$, $N = \{13, 23\}$ pak $|M| = 1$, $|N| = 2$ a tedy $M \preceq N$. Neporovnatelné: $M = \{13\}$, $N = \{23\}$.

c) $p = x - 4$, $q = (x-4)(x-7)$, pak $k(p) = 4$, $k(q) = 7$ a tedy $p \preceq q$. Neporovnatelné: $p = x - 4$, $q = (x-4)(x-1)$.

d) $f(x) = 2$ na I, $g(x) = 6$ na I (konstantní funkce). Pak $\|f\|_\infty = 2$ a $\|g\|_\infty = 6$ a tedy $f \preceq g$.
Neporovnatelné: $f(x) = 2$ na I, $g(x) = -2$ na I (konstantní funkce, obě s normou 2).

6b.10: a) Sporem či nepřímým důkazem: Pokud by platilo $m_1 \preceq m_2$, tak podle věty 6b.2 a toho, že je m_1 maximum, už musí platit $m_1 = m_2$. b) je obdobné.

6b.11: $\Longrightarrow$: Nechť $\preceq$ lineární. Zvolme $a, b \in A$. Pak $a \preceq b$ (potom $b \preceq^{-1} a$) nebo $b \preceq a$ (potom $a \preceq^{-1} b$), každopádně jsou a, b porovnatelné pomocí $\preceq^{-1}$.
$\Longleftarrow$: Obdobně.

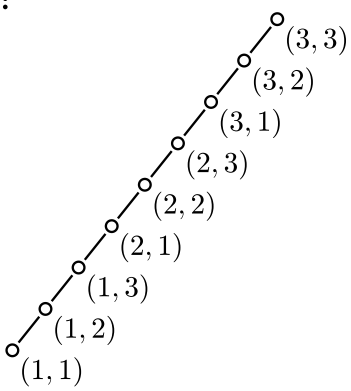
6b.12: a), b), g).
Re: g) V množině je omezená velikost jmenovatele, proto uvažované body nejsou husté, ale jednotlivé body množiny jsou od sebe vzdáleny. Protože $p, q > 0$, jde o kladná čísla a nemohou utéci do mínus nekonečna. Pro libovolné $K > 0$ je množina $\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 : q < 100 \wedge p \leq Kq\}$ konečná, mezi odpovídajícími zlomky $\frac{p}{q}$ tedy vždy najdeme nejmenší.

6b.13: a) $(a,a), (a,b)$; b) $(b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)$; c) $(a,a), (a,b), (a,c), (b,a)$.

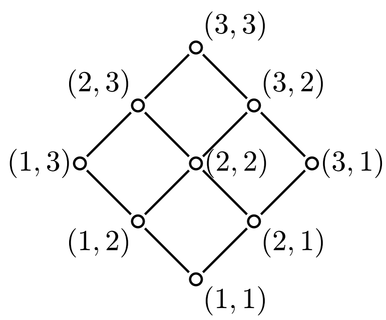
6b.14: 0,0001,001,01,010,0101,011,11

6b.15:

a)



b)



6b.16: Zvolme $a_1, a_2 \in A$ a $b_1, b_2 \in B$ tak, aby $a_1 \neq a_2$ a $b_1 \neq b_2$. Pokud jsou a_1, a_2 neporovnatelné, tak jsou v součinovém uspořádání neporovnatelné i (a_1, b_1) a (a_2, b_2). Podobně když b_1, b_2 neporovnatelné. Poslední možnost je, že obě dvojice jsou porovnatelné, řekněme $a_1 \preceq_A a_2$ a $b_1 \preceq_B b_2$. Pak díky antisymetrii nemůže platit $b_2 \preceq_B b_1$, proto jsou (a_1, b_2) a (a_2, b_1) neporovnatelné.

6c. Bonus: Další pojmy okolo uspořádání

Když jsme hledali nejmenší a největší prvky, měli jsme dva problémy. Jednou překážkou byl nedostatek vzájemné porovnatelnosti, ten jsme vyřešili pojmem lineárního zobrazení. Druhý problém nastal, když nám množina „utíkala“ jako třeba $\mathbb{Z}$ při porovnávání pomocí $\leq$. Zatím jsme to řešili tak, že jsme se omezili na konečné množiny, teď utíkání zkusíme obecně pojmenovat a pak zakázat; uvidíme, jestli dostaneme něco rozumného.

Definice.
Nechť $(A, \preceq)$ uspořádaná množina. Řekneme, že je **fundovaná** (**well-founded**), jestliže neexistuje nekonečná posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ prvků z A taková, že $a_{i+1} \prec a_i$ pro všechna i.

Problémem pro fundovanost jsou tedy „nekonečné klesající posloupnosti“ $a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ \cdots$. Uvažujme takovou posloupnost. Díky tranzitivitě pak pro všechna $j > i$ máme $a_j \prec a_i$. Ostrá nerovnost ukazuje, že jde o navzájem různé prvky. Z toho vyplývá, že konečná množina takovou posloupnpost obsahovat nemůže, takže konečné uspořádané množiny jsou automaticky fundované.

Není pravda, že pokud zabráníme takovým posloupnostem, tak automaticky dostáváme existenci nejmenších prvků, tedy dobré uspořádání, protože může zlobit porovnatelnost.

Příklad 6c.a: Uvažujme uspořádanou množinu $(\mathbb{Z}, \preceq)$, kde $x \preceq y$ jestliže $|x| < |y|$ nebo $x = y$ (viz příklad 6a.e).

Víme, že toto uspořádání není lineární (viz 13 a -13), tím pádem ani dobré. Je ale fundované. Uvažujme nějakou nekonečnou posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ ze $\mathbb{Z}$ takovou, že $a_{i+1} \preceq a_i$ pro všechna i. Tvrdíme, že nemůže nastat případ, že by všechna ta srovnání byla ostrá, tedy $\prec$. Uvažujme množinu $M = \{|a_i|;\ i \in \mathbb{N}\}$. To je neprázdná podmnožina $\mathbb{N}_0$, což je vzhledem k $\leq$ dobře uspořádaná množina. Existuje tedy j takové, že $|a_j|$ je nejmenší prvek z M. To znamená, že $|a_j| \leq |a_i|$ pro všechna i.

Tvrdíme, že $a_i = a_j$ pro všechna $i > j$. Z tranzitivity máme pro $i > j$ relaci $a_i \preceq a_j$, teď jsou dvě možnosti. Jedna je $|a_i| < |a_j|$, ale to nejde, takže musí platit ta druhá, $a_i = a_j$.

Dokázali jsme, že $(\mathbb{Z}, \preceq)$ nemá nekonečné klesající posloupnosti, je tedy fundovaná.

△

Dobré uspořádání je definováno pomocí existence nejmenších prvků. Pro fundovaná uspořádání existuje alternativní charakterizace podobného typu.

Věta 6c.1.
Nechť je $(A, \preceq)$ částečně uspořádaná množina. Toto uspořádání je fundované právě tehdy, když pro každou neprázdnou podmnožinu $M \subseteq A$ existuje $\min(M)$.

Důkaz (poučný, náznak)**:** 1) $\Longrightarrow$: Předpokládejme, že $\preceq$ je fundované. Nechť M je neprázdná podmnožina A. Vezměme libovolné $a_1 \in M$. Pokud je to minimální prvek, jsme hotovi. Pokud ne, musí existovat $a_2 \in M$ splňující $a_2 \prec a_1$. Pokud je to minimální prvek, jsme hotovi. Pokud ne, musí existovat $a_3 \in M$ splňující $a_3 \prec a_2$. Pokračujeme tak dále, a protože není možná nekonečná klesající posloupnost, tak se tento proces musí zastavit, tedy najdeme minimální prvek M.

2) $\Longleftarrow$: Fundovanost dokážeme obměnou. Nechť existuje nekonečná klesající posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$. Označme $M = \{a_i;\ i \in \mathbb{N}\}$. To je neprázdná podmnožina A, která ale nemá minimum. Pro každé a_i totiž existuje prvek $x \in M$ splňující $x \prec a_i$, jmenovitě $x = a_{i+1}$.

□

Možná máte pocit, že slova „proces musí zastavit“ nejsou zrovna korektním matematickým vyjádřením. A máte pravdu, korektní důkaz se musí dělat podrobněji a je citelně delší, dokonce dojde na axiom výběru, takže je to úrovní znatelně výš než toto skriptum. Proto jsme napsali, že jde jen o náznak.

Teď ukážeme, že když se postaráme o porovnatelnost a zakážeme utíkání, tak už nejmenší prvky najdeme.

Věta 6c.2.
Uvažujme částečně uspořádanou množinu $(A, \preceq)$.
Tato množina je dobře uspořádaná právě tehdy, když je lineárně uspořádaná a fundovaná.

Důkaz (poučný)**:** 1) $\Longrightarrow$: Podle faktu 6b.15 víme, že dobře uspořádané množiny jsou automaticky lineárně uspořádané, tedy pro všechny neprázdné podmnožiny poskytují nejmenší prvky, což jsou podle věty 6b.1 (iii) minima.

2) $\Longleftarrow$: Nechť M je neprázdná podmnožina A. Podle předchozí věty nám fundovanost dává minimální prvek této množiny. Protože je uspořádání lineární, tak je podle věty 6b.7 toto minimum i nejmenším prvkem.

□

M **6c.3 Poznámka:** Protože je uspořádání $\leq$ na $\mathbb{N}$ lineární, dá se Princip dobrého uspořádání (PDU) ekvivalentně vyjádřit tvrzením, že $(\mathbb{N}, \leq)$ je fundované uspořádání.

Řada axiomů má alternativní znění, které ukazuje jinou formulaci základní myšlenky. Obvykle tato alternativní vyjádření vznikají praktickou potřebou. Pro přirozená čísla tedy máme alternativní axiom k PDU:

- Neexistuje nekonečná ryze klesající posloupnost přirozených čísel.

Tento princip lze použít k dokazování nebo třeba analýze algoritmů, což úzce souvisí s indukcí. Blíže se tomu proto věnujeme v kapitole 7d, viz věta 7d.5 a příklad 7d.b.

△

Pojem fundovanosti se dá použít také pro relace, které nejsou částečnými uspořádáními. Zejména populární je tento pojem pro ostrá uspořádání, viz věta 6a.2.

Kromě maxim, nejmenších prvků a podobně jsou ještě další příbuzné pojmy.

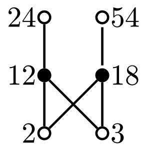
Definice.
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina, M je její neprázdná podmnožina.
Prvek $m \in A$ se nazývá **horní mez** (**upper bound**) množiny M, jestliže $x \preceq m$ pro všechna $x \in M$.
Prvek $m \in A$ se nazývá **dolní mez** (**lower bound**) množiny M, jestliže $m \preceq x$ pro všechna $x \in M$.

Od definice největšího a nejmenšího prvku se liší v tom, že se již nevyžaduje, aby byly z M. Z toho okamžitě plyne následující.

Fakt 6c.4.
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina a M její neprázdná podmnožina.
Jestliže je m největší prvek M, pak je to také horní mez M.
Jestliže je m nejmenší prvek M, pak je to také dolní mez M.

Podmnožiny konečných lineárně uspořádaných množin tedy vždy mají horní a dolní mez. U nelineárních uspořádání je to jinak.

Příklad 6c.b: Uvažujme množinu $A = \{2, 3, 12, 18, 24, 54\}$ uspořádanou dělitelností.
Čtenář si jistě snadno odvodí Hasseův diagram.
Podívejme se na množinu $M = \{12, 18\}$ (vybarvené tečky). Číslo 2 dělí všechna čísla z M, je tedy dolní mezí M. Totéž platí pro číslo 3. Máme tedy dvě dolní meze M. Neexistuje ale číslo z A takové, že by jej dělila všechna čísla z M, proto tato množina nemá horní mez.
$\triangle$



V Hasseově diagramu hledáme dolní meze tak, že vyjdeme ze všech prvků M po spojnicích dolů a čekáme, zda se někde všechny cesty sejdou. Při hledání horní meze naopak hledáme prvek, ve kterém by se sešly cesty z prvků M směrem nahoru.

Příklad potvrzuje, že existence mezí není zaručena, a také že jich může existovat i více. To, že se při hledání mezí díváme i mimo množinu M, má jeden podstatný dopad. Při práci s největšími prvky, maximy a podobně jsme se mohli omezit na restrikci $(M, \preceq)$ a ignorovat zbytek množiny A, což třeba usnadňovalo důkazy. U mezí je situace jiná. Pokud bychom v příkladě 6c.b přidali do A prvek 36, tak už by množina M měla horní mez (samozřejmě tu 36), ačkoliv se vůbec nezměnila.

Ukážeme ještě jednu souvislost.

Fakt 6c.5.
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina a M její neprázdná podmnožina.
Horní mez množiny M existuje právě tehdy, pokud existuje nějaká nadmnožina $N \subseteq A$ množiny M taková, že N má největší prvek.
Dolní mez množiny M existuje právě tehdy, pokud existuje nějaká nadmnožina $N \subseteq A$ množiny M taková, že N má nejmenší prvek.

Důkaz (poučný)**:** Dokážeme první tvrzení, druhé funguje symetricky.
1) Jestliže je m horní mez množiny M, pak uvažujme $N = M \cup \{m\}$. Protože je m horní mezí, platí $x \preceq m$ pro všechna $x \in M$, také $m \preceq m$, proto $x \preceq m$ pro všechna $x \in N$, také $m \in N$, tedy m je největší prvek N.
2) Naopak nechť existuje množina N taková, že $M \subseteq N$ a N má největší prvek m. Pak pro libovolné $x \in M$ platí i $x \in N$ a m je největší v N, tedy $x \preceq m$. Proto je m horní mezí M.

$\square$

V příkladě 6c.b horní mez neexistovala, protože v základní množině A chyběl přirozený kandidát. V aplikacích se ale často meze používají jinak. Jako A máme nějakou známou lineárně uspořádanou množinu, ze které jsme žádné kandidáty neodebrali, takže existence a neexistence mezí vypovídá o množinách něco zajímavého.

Příklad 6c.c: Uvažujme množinu $(\mathbb{N}, \leq)$.

Podmnožina $M = \{13, 23\}$ má dokonce nekonečně horních mezí, jmenovitě všechna $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq 23$. Má také celkem 13 dolních mezí, jmenovitě čísla 1 až 13.

Podmnožina M všech přirozených sudých čísel má dolní meze 1 a 2, ale nemá horní mez.

Nyní uvažujme množinu $(\mathbb{Q}, \leq)$ a její podmnožinu $M = \{x \in \mathbb{Q};\ 0 < x < 1\}$. Víme, že tato množina nemá maximum ani minimum, ale má horní meze, jmenovitě všechna $m \in \mathbb{Q}$ splňující $m \geq 1$, a čísla $m \in \mathbb{Q}$ splňující $m \leq 0$ jsou pro změnu dolní meze.

Naopak $\mathbb{Z}$ coby podmnožina $\mathbb{Q}$ žádné meze nemá.

△

Jak ukazuje příklad, meze nám množinu vymezují na číselné ose. S tím je spojena užitečná terminologie. Pokud má nějaká množina horní mez, pak jí říkáme „omezená shora“, obdobně se definuje „omezená zdola“. Množina, která má horní i dolní mez, se nazývá „omezená“.

Když už máme množinou omezenou, tak bychom rádi přesněji věděli, kde začíná a končí.

Definice.
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina, M je její neprázdná podmnožina.
Jestliže existuje horní mez M, pak definujeme **supremum** množiny M, také zvané **nejmenší horní mez** (**least upper bound**), značeno $\sup(M)$ nebo $\mathrm{l.\,u.\,b.}(M)$, jako nejmenší prvek množiny $\{x \in A;\ x \text{ horní mez } M\}$, pokud existuje.
Jestliže existuje dolní mez M, pak definujeme **infimum** množiny M, také zvané **největší dolní mez** (**greatest lower bound**), značeno $\inf(M)$ nebo $\mathrm{g.\,l.\,b.}(M)$, jako největší prvek množiny $\{x \in A;\ x \text{ dolní mez } M\}$, pokud existuje.

Podobně jako u mezí, existuje-li největší prvek množiny M, pak je jejím supremem, symetricky nejmenší prvek je infimem. Proto nám linearita uspořádání zaručí existenci infim a suprem pro konečné množiny, jinak ale nemusí existovat.

Příklad 6c.d: Vraťme se k příkladu 6c.c.

Podmnožina $M = \{13, 23\}$ množiny $(\mathbb{N}, \leq)$ má jako dolní meze čísla 1 až 13, proto $\inf(M) = 13$. Obdobně $\sup(M) = 23$. Opravdu nám to říká, kde M začíná a končí. Tato množina je omezená.

Podmnožina M všech přirozených sudých čísel má dolní meze 1 a 2, tedy $\inf(M) = 2$ (je omezená zdola), ale nemá horní mez a tedy ani supremum. Totéž platí, pokud bychom M brali jako podmnožinu $(\mathbb{Q}, \leq)$,

Podmnožina $M = \{x \in \mathbb{Q};\ 0 < x < 1\}$ množiny $(\mathbb{Q}, \leq)$ má $\inf(M) = 0$ a $\sup(M) = 1$, je to tedy omezená množina.

Naopak $\mathbb{Z}$ coby podmnožina $\mathbb{Q}$ infimum ani supremum nemá a tedy není omezená ani shora či zdola.

△

Příklad 6c.e: V příkladě 6c.b jsme měli množinu $A = \{2, 3, 12, 18, 24, 54\}$ uspořádanou dělitelností.

Její podmnožina $M = \{12, 18\}$ nemá horní meze, tedy ani supremum. Má dolní meze 2 a 3, ty ale nejsou vzhledem k dělitelnosti porovnatelné a proto nelze určit mezi nimi největší mez. $\inf(M)$ tedy také neexistuje.

△

Vidíme, že existence suprem a infim rozhodně není zaručena ani u konečných množin v případě nelineárních uspořádání. V aplikacích se hodí mít alespoň něco.

Definice.
Uvažujme uspořádanou množinu $(A, \preceq)$. Řekneme, že je to **svaz** (**lattice**), jestliže pro všechna $x, y \in A$ existují $\sup(\{x, y\})$ a $\inf(\{x, y\})$.

Protože linearita uspořádání zaručuje existenci největších a nejmenších prvků pro dvouprvkové množiny, je každé lineární uspořádání automaticky svazem. Platí to tedy i pro $(\mathbb{N}, \leq)$ a $(\mathbb{Q}, \leq)$. Příklad výše ukazuje, že existence infim a suprem pro dvouprvkové množiny rozhodně neimplikuje jejich existenci pro množiny s více prvky.

Nelineární uspořádání svazem být mohou a nemusí. Jak jsme viděli, $A = \{2, 3, 12, 18, 24, 54\}$ uspořádaná dělitelností není svaz. Zde je to ale způsobeno spíše množinou než relací.

Příklad 6c.f: Množina $\mathbb{N}$ uspořádaná dělitelností je svaz. Snadno si rozmyslíme, že $\sup(\{x,y\}) = \operatorname{lcm}(x,y)$ a $\inf(\{x,y\}) = \gcd(x,y)$.
$\triangle$

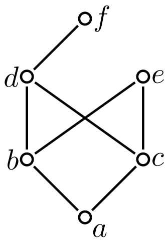
I druhé vzorové uspořádání se chová dobře, pokud ze základní množiny záměrně něco neodebereme.

Příklad 6c.g: Nechť U je množina, uvažujme $(P(U),\subseteq)$. Tato uspořádaná množina je svaz.
Stačí si rozmyslet, že jsou-li dány $M,N \in P(U)$, tedy jsou to podmnožiny U, pak $\inf(\{M,N\}) = M \cap N \in P(U)$ a $\sup(\{M,N\}) = M \cup N \in P(U)$.
Ověříme infimum: Evidentně $M \cap N \subseteq M$ a $M \cap N \subseteq N$, takže je to dolní mez. Je největší? Nechť X je jiná dolní mez. Pak splňuje $X \subseteq M$ a $X \subseteq N$, proto i $X \subseteq M \cap N$, což jsme přesně potřebovali.
$\triangle$

Svazy mají svou vlastní teorii a používají se třeba v práci s Booleovými algebrami či namátkou při modelování bezpečných informačních toků, kdy se zavádí uspořádání na různých stupních oprávnění.

Cvičení

Cvičení 6c.1 (rutinní)**:** Uvažujte uspořádanou množinu danou následujícím Hasseovým diagramem.



Najděte pro množinu $M = \{b,c\}$ její horní meze a supremum, dolní meze a infumum, pokud existují.

Cvičení 6c.2 (rutinní)**:** Uvažujte množinu množin $\mathcal{A} = \{\{1\},\{2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5\}\}$ uspořádanou relací býti podmnožinou (viz cvičení 6a.6).
Pro $\mathcal{M} = \{\{1\},\{2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\}\}$ najděte horní meze a supremum, dolní meze a infimum, pokud existují.

Řešení:

6c.1: Horní meze d,e,f, supremum neex., dolní mez a, infimum a.
6c.2: Horní meze $\{1,2,3,4\}$ a $\{1,2,3,4,5\}$, supremum $\{1,2,3,4\}$, dolní meze a infimum neex.