

18. Bonus: Soustavy lineárních diofantických rovnic

Tato kapitola je přirozeným pokračováním kapitoly 3a. Nejprve rozšíříme počet proměnných a poté počet rovnic.

V dotyčné kapitole jsme upozornili, že \mathbb{Z}^2 není vektorový prostor, proto jsme pracovali s řešením coby dvojicí čísel x, y . V této kapitole, kde budeme pracovat s neznámými x_1 až x_n , nám zpracování informací významně usnadní vektorový pohled, tedy neznámé i řešení budou algebraicky manipulovány jako vektory (x_1, \dots, x_n) ze \mathbb{Z}^n , což ale není vektorový prostor. Budeme tedy používat pouze zápis vektorů, nikoliv teorii.

Pro celočíselné vektory máme obvyklé sčítání, ale při násobení vektorů konstantou budeme omezeni jen na celá čísla. V lineární algebře se obvykle vektory uvažují jako sloupcové, ale tady budeme pro úsporu místa pracovat s řádkovými vektory.

18a. Lineární diofantická rovnice o více neznámých

V kapitole 3 jsme viděli, že řešení lineární diofantické rovnice o dvou neznámých je v zásadě stejná úloha jako nalezení Bezoutovy identity pro největší společný dělitel dvou čísel (koeficientů dotyčné rovnice). V kapitole 17c jsme zase viděli, jak pomocí řádkových úprav matice získat Bezoutovu identitu pro více čísel. Spojením těchto myšlenek získáme postup pro řešení lineárních diofantických rovnic s libovolným počtem proměnných.

Uvažujme takovou rovnici $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = c$. Můžeme sestavit matici

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

V dalším budeme o levém sloupci mluvit jako o levé části této matice, zatímco zbývajícím n sloupcům napravo (tvoří čtvercovou matici) budeme říkat výsledková část matice.

Když si představíme, že levý sloupec je přesunutý vpravo, lze tuto matici považovat za matici soustavy

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n &= a_1 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n &= a_2 \\ &\vdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot x_n &= a_n \end{aligned}$$

s jednoznačným řešením $x_i = a_i$ pro všechna i , vektorově $x = (a_1, \dots, a_n)$.

V kapitole 17c jsme ukázali, jak tuto matici celočíselnými řádkovými úpravami převést na řádkově redukováný tvar

$$\begin{pmatrix} \gcd(a_1, \dots, a_n) & A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

Pokud by číslo $\gcd(a_1, \dots, a_n)$ dělilo pravou stranu řešené rovnice c , tak bychom v dalším kroku mohli dostat matici ve tvaru

$$\begin{pmatrix} c & A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pn} \\ 0 & B_{h1} & B_{h2} & \dots & B_{hn} \\ 0 & 0 & C_{h2} & \dots & C_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

Tato matice reprezentuje soustavu, která má stejné řešení jako soustava původní, tedy platí

$$\begin{aligned} A_{p1} \cdot a_1 + A_{p2} \cdot a_2 + \dots + A_{pn} \cdot a_n &= c \\ B_{h1} \cdot a_1 + B_{h2} \cdot a_2 + \dots + B_{hn} \cdot a_n &= 0 \\ 0 \cdot a_1 + C_{h2} \cdot a_2 + \dots + C_{hn} \cdot a_n &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

První řádek říká, že $x_1 = A_{p1}, \dots, x_n = A_{pn}$ je řešení dané rovnice, vektorově psáno dostáváme partikulární řešení $\vec{x}_p = (A_{p1}, \dots, A_{pn})$. Je to vlastně první řádek výsledkové části matice.

Druhý řádek matice říká, že vektor (B_{h1}, \dots, B_{hn}) řeší přidruženou homogenní rovnici, stejně jako třetí, čtvrtý atd. řádek.

Označme jednotlivé řádky výsledkové části matice jako $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$. Rovnice říkají, že vektor $\vec{r}_1 = \vec{x}_p$ je partikulárním řešením dané rovnice, zatímco vektory $\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ řeší přidruženou homogenní rovnici. Je snadné dokázat, že pak i jejich libovolná celočíselná lineární kombinace $\sum u_i \vec{r}_i$ řeší přidruženou homogenní rovnici.

Výsledná matice je v řádkově redukovaném tvaru, což znamená, že ty z vektorů $\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$, které jsou nenulové, tvoří lineárně nezávislou množinu. Ovšem výsledková část původní matice byla tvořena maticí jednotkovou, tedy celá matice měla hodnost n , což se nemohlo eliminací změnit. Proto i matice tvořená řádky \vec{r}_1 až \vec{r}_n musí mít hodnost n , tedy všechny vektory musí být nenulové. Máme proto $n - 1$ lineárně nezávislých vektorů $\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$, které generují řešení přidružené homogenní rovnice.

Tato řešení bychom v \mathbb{R}^n identifikovali jako $(n - 1)$ -rozměrný podprostor (nadrovinu), ale v \mathbb{Z}^n to říct nemůžeme, jen si to představujeme.

Není to snadné, ale dá se dokázat, že vektory $\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ dokonce generují všechna řešení přidružené homogenní rovnice, takže vzorec $\vec{x}_h = \sum u_i \vec{r}_i$ je obecným homogenním řešením.

Podle klasické strukturální věty pak nalezneme obecné řešení dané rovnice jako

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h = \vec{r}_1 + \sum_{i=2}^n u_i \vec{r}_i.$$

Tento postup je možné provést pouze tehdy, když $\gcd(a_1, \dots, a_n)$ dělí c . To je ale v pořádku, protože v opačném případě rovnice nemá řešení.

Příklad 18a.a: Vyřešíme rovnici $6x - 12y + 15z = 45$. Přejdeme k matici:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 1 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 45 & -30 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Protože se nám v prvním řádku a sloupci podařilo vyrobít číslo 45, soustava má řešení. Dostáváme vektory $\vec{r}_1 = (-30, 0, 15)$, $\vec{r}_2 = (1, -2, -2)$ a $\vec{r}_3 = (0, 5, 4)$. Vychází obecné řešení $(-30, 0, 15) + k(1, -2, -2) + l(0, 5, 4)$ neboli $(-30 + k, -2k + 5l, 15 - 2k + 4l)$ neboli

$$\begin{aligned} x &= k - 30 \\ y &= 5l - 2k \\ z &= 15 - 2k + 4l \quad \text{pro } k, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Zkouška:

$$6(k - 30) - 12(5l - 2k) + 15(15 - 2k + 4l) = 6k - 180 - 60l + 24k + 225 - 30k + 60l = 45.$$

Pro zajímavost ověříme lineární nezávislost vektorů \vec{r}_2, \vec{r}_3 ve světě celých čísel. Ptáme se tedy, zda je možné najít celá čísla α, β tak, aby platilo $\alpha(1, -2, -2) + \beta(0, 5, 4) = (0, 0, 0)$ a alespoň jedno nebylo nulové. Ovšem první souřadnice dává rovnici $1 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta = 0$, tedy nutně $\alpha = 0$. Dosazením do rovnice z druhé souřadnice $-2\alpha + 5\beta = 0$ vychází i $\beta = 0$ a vektory jsou proto opravdu lineárně nezávislé.

△

Poznámka: Je užitečné si uvědomit, že když používáme eliminaci za účelem řešení diofantické rovnice, tak stačí provést její první etapu, tedy převést první sloupec na potřebný tvar. Výsledkovou část matice už redukovat nemusíme, protože už víme, že řádky jsou lineárně nezávislé, takže to nemusíme ověřovat.

Pokud nám tedy nevadí, že homogenní část generujeme složitěji, než je možné, tak jsme se v příkladě mohli zastavit již ve fázi

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 1 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 45 & -30 & 0 & 15 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Dostáváme vektory $\vec{r}_1 = (-30, 0, 15)$, $\vec{r}_2 = (2, -1, 0)$ a $\vec{r}_3 = (5, 0, -2)$, odtud obecné řešení

$$\begin{aligned} x &= 2k + 5l - 30 \\ y &= k \\ z &= 15 - 2l \quad \text{pro } k, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Opravdu tyto vzorce generují stejnou množinu řešení jako ty předchozí? Ověříme to následovně:

1. Zvolíme $K, L \in \mathbb{Z}$ a vytvoříme tak konkrétní řešení $x = 2K + 5L - 30$, $y = K$, $z = 15 - 2L$ dle nového vzorce. Ukážeme, že jej lze získat i vzorcem původním:

$$\begin{aligned} 2K + 5L - 30 &= k - 30 \\ K &= 5l - 2k & \longrightarrow & k = 2K + 5L, l = K + 2L, k, l \in \mathbb{Z}. \\ 15 - 2L &= 15 - 2k + 4l \end{aligned}$$

2. Zvolíme $K, L \in \mathbb{Z}$ a vytvoříme tak konkrétní řešení $x = K - 30$, $y = 5L - 2K$, $z = 15 - 2K + 4L$ dle původního vzorce. Ukážeme, že jej lze získat i vzorcem novým:

$$\begin{aligned} K - 30 &= 2k + 5l - 30 \\ 5L - 2K &= k & \longrightarrow & k = 5L - 2K, l = K - 2L, k, l \in \mathbb{Z}. \\ 15 - 2K + 4L &= 15 - 2l \end{aligned}$$

△

Alternativní řešení může vzniknout také tím, že při eliminaci postupujeme jinak, například odlišnou volbou pivotů, používáním či nepoužíváním záporných zbytků a podobně.

Poznámka: V kapitole 3a jsme představili řešení diofantické rovnice, přičemž nejefektivnější způsob vyhodnocení tabulky Euklidova algoritmu fungoval následovně:

Řádek s $\gcd(a, b)$ jsme vynásobili tak, aby se v levém sloupci objevila pravá strana řešení rovnice (zde 24), v pomocných sloupcích se tím vytvořilo partikulární řešení. Řádek s nulou vlevo pak generoval homogenní řešení, takže jsme si mohli v pomocných sloupcích představit parametr k . Jednotlivá řešení jsme pak mohli sestavit podle sloupců. V levém pomocném sloupci by nám poslední dva řádky daly $x = -2 + 5k$, v pravém pomocném sloupci vidíme $y = 4 - 9k$.

a, b	(x)	(y)
\vdots	\vdots	\vdots
12●	-1●	2●
0	5k	-9k
24	-2	4

Stejný přístup funguje pro maticový postup řešení diofantických rovnic. Vraťme se k poslední matici příkladu výše.

Do řádků, které mají vlevo nulu, jsme ve výsledkové části matice připsali parametry k a l . Nyní již snadno v jednotlivých sloupcích přečteme řešení:

$$x = -30 + 2k + 5l, \quad y = k, \quad z = 15 - 2l.$$

Tento postup je efektivní nejen při řešení ručním, ale také programově.

△

18a.1 Bonus²: Eliminace

Když jsme zaváděli největší společný jmenovatel pro více čísel, zvolili jsme definici, která to udělá najednou. Ve cvičení 1b.13 jsme ovšem ještě nastínili druhou možnost, jmenovitě hledat $\gcd(a_1, \dots, a_n)$ induktivně. Nejprve najdeme $d_2 = \gcd(a_1, a_2)$, pak $d_3 = \gcd(d_2, a_3)$ a tak dále až nakonec $\gcd(a_1, \dots, a_n) = \gcd(d_{n-1}, a_n)$. Dá se ukázat, že vyjde stejné číslo jako podle definice.

Podobně lze i diofantickou rovnici $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = c$ řešit rekurzivně. Platí totiž následující tvrzení:

• Čísla A_1, \dots, A_n řeší rovnici $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = c$ právě tehdy, pokud existuje $U \in \mathbb{Z}$ takové, že čísla U, A_3, \dots, A_n řeší rovnici $\gcd(a_1, a_2)u + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = c$ a A_1, A_2 řeší rovnici $a_1x_1 + a_2x_2 = \gcd(a_1, a_2)U$.

Jak to víme?

1. Předpokládejme, že A_i jsou řešení. Pak po dosazení do dané rovnice a úpravě dostáváme

$$a_1A_1 + a_2A_2 = c - a_3A_3 - \dots - a_nA_n. \quad (\star)$$

To se dá interpretovat tak, že A_1, A_2 řeší rovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c - a_3A_3 - \dots - a_nA_n.$$

To znamená, že $\gcd(a_1, a_2)$ musí dělit pravou stranu neboli $c - a_3A_3 - \dots - a_nA_n = U \gcd(a_1, a_2)$ pro nějaké $U \in \mathbb{Z}$. Po úpravě dostáváme $\gcd(a_1, a_2)U + a_3A_3 + \dots + a_nA_n = c$, tedy čísla U, A_3, \dots, A_n opravdu řeší rovnici $\gcd(a_1, a_2)u + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = c$.

Když pak dosadíme $c - a_3A_3 - \dots - a_nA_n = U \gcd(a_1, a_2)$ do (\star) , dostaneme $a_1A_1 + a_2A_2 = U \gcd(a_1, a_2)$, tedy A_1, A_2 řeší $a_1x_1 + a_2x_2 = U \gcd(a_1, a_2)$.

2. Teď mějme čísla U, A_1, \dots, A_n taková, že A_1, A_2 řeší rovnici $a_1x_1 + a_2x_2 = \gcd(a_1, a_2)U$ a U, A_3, \dots, A_n řeší rovnici $\gcd(a_1, a_2)u + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = c$. Po dosazení dostáváme vzorec

$$a_1A_1 + a_2A_2 = \gcd(a_1, a_2)U, \quad \gcd(a_1, a_2)U + a_3A_3 + \dots + a_nA_n = c,$$

což dává $a_1A_1 + \dots + a_nA_n = c$ a čísla A_1, \dots, A_n tedy řeší danou rovnici.

Tvrzení, které jsme právě dokázali, nám umožňuje namísto rovnice o n neznámých řešit nejprve rovnici o $n - 1$ neznámých a pomocí nalezeného řešení pak ještě rovnici o dvou neznámých (to už umíme). Pokud nejsme spokojeni s rovnicí o $n - 1$ neznámých, lze na ni aplikovat stejný postup a získat rovnici o $n - 2$ neznámých. Dříve či později se dobereme k rovnici, kterou už umíme (popřípadě nemá řešení, což je také dobrý konec).

Vyzkoušíme to na již jednou řešené rovnici $6x - 12y + 15z = 45$.

Protože $\gcd(6, -12) = 6$, měli bychom namísto té zadané řešit rovnice $6u + 15z = 45$ a $6x - 12y = 6u$. Začneme přirozeně tou první. Je jednoduchá, to se ani nevyplácí zkoušet algoritmus.

Vidíme, že $\gcd(6, 15) = 3$, odhadneme $3 = 1 \cdot 15 + (-2) \cdot 6$ a vynásobením a mírnou reorganizací dospějeme k rovnosti $6 \cdot (-30) + 15 \cdot 15 = 45$. Vychází partikulární řešení $u_p = -30$, $z_p = 15$. Z homogenní rovnice $6u + 15z = 0$ vykrácením na $2u + 5z = 0$ vykukáme řešení $u_h = 5k$, $z_h = -2k$. Než je dáme dohromady, využijeme homogenní řešení k nalezení lepšího partikulárního zástupce, $u_p = -30 + 5 \cdot 6 = 0$, $z_p = 15 - 2 \cdot 6 = 3$, budeme tedy dále počítat s řešením $u = 5k$, $z = 3 - 2k$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Dostáváme se k druhé rovnici, $6x - 12y = 6u$ neboli $6x - 12y = 30k$. Rovnou ji vykrátíme šesti, výslednou rovnici $x - 2y = 5k$ tentokrát zkusíme pro změnu řešit tabulkou.

To bylo trapně jednoduché, vlastně hned druhý řádek ze zadání dal \gcd . Z posledních dvou řádků vyčteme řešení $x = 5k + 2l$, $y = 0 + l$ pro $l \in \mathbb{Z}$.

Shrnuto, máme $x = 5k + 2l$, $y = l$, $z = 3 - 2k$ pro $k, l \in \mathbb{Z}$.

To vypadá podezřele pěkně. Zkouška:

$$6(5k + 2l) - 12l + 15(3 - 2k) = 30k + 12l - 12l + 45 - 30k = 45.$$

I zde snadno ověříme, že tyto vzorce generují stejnou množinu jako původní sada.

△

a/b	x	y
-2	0	1
1	1	0
0	2	1
$5k$	$5k$	0

18b. Soustavy lineárních diofantických rovnic

Uvažujme obecnou soustavu m rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= c_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= c_m \end{aligned}$$

Typicky máme $m \leq n$.

Jako inspiraci se znovu podíváme na případ jedné rovnice. Rovnost $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = c$ se dá zapsat v maticovém tvaru jako

$$(a_1 \quad \cdots \quad a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (c).$$

Označíme-li matici soustavy jako A , vektor neznámých jako $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ a vektor pravé strany jako $\vec{c} = (c)$, můžeme rovnici zachytit zápisem $A\vec{x}^T = \vec{c}^T$. Sloupcové vektory jsme získali z řádkových pomocí transpozice. U \vec{c} jsme vlastně nemuseli, ale čtenář asi tuší, že si již připravujeme půdu pro případ více rovnic.

Rovnici jsme řešili tak, že jsme sestavili matici $(A^T|E_n)$, kterou jsme pak řádkovými úpravami redukovali.

Vrátíme-li se k soustavě, i tu lze napsat jako $A\vec{x}^T = \vec{c}^T$. Pak je možná dobrý nápad uvažovat matici $(A^T|E_n)$, tedy z koeficientů každé z rovnic vytvořit jeden sloupec nové matice (bude jich m a budou mít výšku n) a k tomu přilepit zprava jednotkovou matici o velikosti $n \times n$. Dostaneme tak matici $(A^T|E_n)$ o rozměru $n \times (m + n)$. I zde budeme mluvit o její levé části (teď tvořená A^T) a výsledkové části tvořené pravými n sloupci.

Tuto matici pak převedeme na řádkově redukovaný tvar celočíselnými řádkovými úpravami. Napravo vidíme typický výsledek takové eliminace pro tři rovnice o čtyřech neznámých. Co víme o levé části?

První sloupec bude mít nahoře číslo $\pm \gcd(a_{1,1}, \dots, a_{1,n})$, a pod ním nuly, v dalších sloupcích už není jasné, co nenulová čísla znamenají.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{array} \right)$$

Počet nenulových řádků v levé části, nazvěme jej N , říká, kolik z původních rovnic bylo lineárně nezávislých. V našem příkladě šlo ve skutečnosti o soustavu dvou rovnic, třetí byla zbytečná. V těchto N řádcích budeme hledat partikulární řešení. Poučení případem jedné rovnice bychom asi měli namísto onoho \gcd vyrobit c_1 chytrým vynásobením prvního řádku, pokud to tedy jde. Ve druhém sloupci (reprezentujícím druhou rovnici) se nabízí vyrobit c_2 . Protože první řádek matice už posloužil k výrobě c_1 v prvním sloupci a třetí (a další) řádky mají v druhém sloupci nulu, je zjevné, že se ono c_2 bude vyrábět pomocí druhého řádku, ale není hned jasné jak. Dozvíme se to níže.

Zbývajících $n - N$ řádků bude svou pravou částí (z výsledkové části matice) generovat homogenní řešení. Je jich $n - N$, což souhlasí s intuicí: Máme n neznámých, tedy původně n stupňů volnosti, a N nezávislých rovnic, z nichž každá odebere ze světa \mathbb{Z}_n jednu „dimenzi“, homogenní řešení by tedy mělo mít $n - N$ parametrů.

V této souvislosti si opět všimneme, že se žádný z těchto řádků nemůže vynulovat. Výsledková část matice měla původně podobu E_n , jejíž determinant je 1. Celočíselné řádkové operace nemohou změnit absolutní hodnotu determinantu výsledkové části matice, takže její výsledná podoba musí mít determinant ± 1 . Proto musí být všechny její řádky nenulové.

Dokonce musí být v optimálním tvaru, tedy nezkrácitelném. Uvažujme nějaký takový řádek, jehož výsledková část má členy a_1 až a_n , a nějaké $d \in \mathbb{N}$, které je všechny dělí. Protože se jedno z těchto čísel nachází v každém součinu z definice determinantu, bude d dělit všechny tyto součiny a tedy i determinant. Proto $d = 1$, což ukazuje, že $\gcd(a_1, \dots, a_n) = 1$. Díky tomu pak dolních $n - N$ řádků generuje všechna řešení a ne jen některá, ale důkaz je komplikovaný a vynecháme jej.

Postup nalezení řešení je tedy následující.

S Algoritmus 18b.1.

pro řešení soustavy lineárních homogenních rovnic $A\vec{x}^T = \vec{c}^T$, kde A je $m \times n$ matice s celočíselnými prvky, $\vec{c} \in \mathbb{Z}^m$ a očekáváme $\vec{x} \in \mathbb{Z}^n$.

1. Vytvoříme matici $(A^T|E_n)$ a převedeme ji celočíselnými řádkovými úpravami do řádkově redukovaného tvaru $(D|S)$. Nechť $N \in \mathbb{N}_0$ je počet nenulových řádků v D .

2. Pomocí celočíselného násobení prvních N řádků matice $(D|S)$ ji upravíme do tvaru $(B|R)$ tak, aby pro každé $j = 1, \dots, m$ byl součet prvků ve sloupci j matice B roven c_j .

Pokud toto není možné, daná soustava nemá řešení.

3. Předpokládejme, že jsme v kroku **2** uspěli.

Nechť \vec{r}_i jsou řádky matice R . Označme $\vec{x}_p = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i$.

Obecné řešení soustavy $A\vec{x}^T = \vec{c}^T$ je pak dáno vzorcem

$$\vec{x}_p + \sum_{i>N} u_i \vec{r}_i \quad \text{pro } u_i \in \mathbb{Z}.$$

△

Rozmyslete si, že když je jen jedna rovnice, tedy $m = 1$, tak tento algoritmus souhlasí s postupem předvedeným v předchozí sekci. Důkaz správnosti algoritmu je delší, v bonusové kapitole si jej odpustíme.

Trochu nejasný zůstává druhý krok. Jak poznáme, kdy je a kdy není možná ona předepsaná úprava? Tady je klíčové, že matice D je ve schodovitém tvaru. Nejprve ukážeme příklad. Dohodneme se, že slovem „vedoucí člen řádku“ budeme označovat první nenulový prvek řádku matice, počítáno zleva (pokud takový existuje).

Příklad 18b.a: Vyřešíme soustavu

$$\begin{aligned} 10w + 14x + 16y + 18z &= 4 \\ w - 10x + y + 3z &= -5 \\ 2w - x + 3y + 4z &= -1 \\ 9w + 13x + 16y + 17z &= 0 \end{aligned}$$

Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 10 & 14 & 16 & 18 \\ 1 & -10 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 9 & 13 & 16 & 17 \end{pmatrix}$, podle algoritmu bychom tedy měli pracovat s maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 10 & 1 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & -10 & -1 & 13 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 1 & 3 & 16 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 18 & 3 & 4 & 17 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Krok 1: Potřebujeme matici upravit na řádkově redukovaný tvar pomocí celočíselných řádkových operací. Začneme prvním sloupcem, prvním pivotem je 10.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 10 & 1 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -11 & -3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Teď je nejmenším číslem -2 ve čtvrtém řádku. Vidíme, že dělí všechny ostatní prvky prvního sloupce, takže první etapa tímto skončí. Vyrobíme pomocí čtvrtého řádku nuly v prvním sloupci a pak jej vyměníme s prvním. Není třeba násobit jej mínus jedničkou, záporná čísla nám nevadí. Vychází matice

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & -3 & 2 & -5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & -9 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right).$$

Teď se přesuneme do druhého sloupce. Nejmenší číslo (když neuvažujeme první řádek) je tam -3 ve třetím řádku. Vyrobíme nuly ve druhém a čtvrtém řádku a pak zaměníme třetí s druhým. A abychom měli na diagonále něco kladného, ještě jej jen tak z rozpustlosti vynásobíme mínus jedničkou. Dostaneme.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -11 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Ve třetím sloupci žádný pivot nemáme, takže nám v levé části matice zůstanou nejvýše tři nenulové řádky. Vlastně vidíme, že zůstanou přesně tři. Jinými slovy, vznikne jeden generující vektor pro homogenní řešení. Abychom tento krok dokončili, přesuneme se do čtvrtého sloupce a vyrobíme ve čtvrtém řádku nulu pomocí třetího.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -11 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & -2 & 8 & -15 \end{array} \right).$$

Máme $N = 3$.

Krok 2: Potřebujeme vyrobit správné součty v sloupcích.

Aby se první sloupec nasčítal do 4, vynásobíme první řádek číslem -2 :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -11 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & -2 & 8 & -15 \end{array} \right).$$

První řádek je nastaven, takže pokud chceme dosáhnout správného součtu ve druhém sloupci, potřebujeme použít nižší řádky. Naštěstí máme v druhém řádku na správném místě nenulové číslo. Potřebujeme vynásobit druhý řádek vhodným celým číslem tak, aby v druhém sloupci vznikl správný součet, tedy hledáme $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby $-2 + 3k = -5$. Pokud by neexistovalo, soustava by neměla řešení.

Naštěstí takové k existuje, vynásobíme druhý řádek číslem -1 . Díky nule v prvním sloupci tímto násobením nepokazíme to, co jsme před chvílí vytvořili v prvním sloupci.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -11 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & -2 & 8 & -15 \end{array} \right).$$

Součet třetího sloupce nelze ovlivnit. První dva řádky jsou již nastaveny, jediná šance něco ovlivnit je mít ve třetím řádku vedoucí člen, ale není tam. Můžeme jen ověřit, zda má třetí sloupec správný součet. Ano, vychází -1 , máme štěstí, jinak by soustava neměla řešení.

Ve čtvrtém sloupci máme vedoucí člen třetího řádku, máme tedy možnost jej nastavit. Hledáme $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby $2 + 0 + 2k = 0$ a najdeme $k = -1$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 11 & -1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & -2 & 8 & -15 \end{array} \right).$$

Krok 3: Máme $N = 3$ nenulové řádky, takže $\vec{x}_h = (17, -2, 8, -15)$ a

$$\vec{x}_p = (4, 0, 0, -2) + (2, 0, 1, -2) + (11, -1, 3, -8) = (17, -1, 4, -12).$$

Obecné řešení soustavy je $(17, -1, 4, -12) + k(17, -2, 8, -15)$ neboli

$$\begin{aligned} w &= 17 + 17k, \\ x &= -1 - 2k, \\ y &= 4 + 8k, \\ z &= -12 - 15k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Zkouška potvrdí, že tato čísla opravdu řeší všechny čtyři rovnice (fakt jsem ji udělal).

△

Postup z kroku 2, který jsme viděli, je možné formalizovat.

0. Nastavíme $j = 1$.

1. Pokud se ve sloupci j nenachází žádný vedoucí člen řádku, ověříme, že součet jeho prvků je c_j . Pokud toto není splněno, soustava nemá řešení a postup končí.

Pokud se ve sloupci j nachází vedoucí člen nějakého řádku, vynásobíme dotyčný řádek celým číslem tak, aby byl součet sloupce j roven c_j . Pokud to nejde, soustava nemá řešení a postup končí.

Pokud je $j < m$, zvětšíme j o jedničku a zopakujeme krok 1.

Není těžké ukázat, že tento postup dokáže správně rozpoznat, kdy je výroba matice $(B|R)$ možná a kdy ne. Ještě jeden příklad.

Příklad 18b.b: Uvažujme soustavu rovnic

$$15s + 24t - 12u + 30v = 6$$

$$10s - 4t + 26u + 14v = 12.$$

Máme matici soustavy $A = \begin{pmatrix} 15 & 24 & -12 & 30 \\ 10 & -4 & 26 & 14 \end{pmatrix}$.

Sestavíme pracovní matici a redukujeme ji.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cccc} 15 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -12 & 26 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 30 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 3 & 36 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 48 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -12 & 26 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 92 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 3 & 36 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 48 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 170 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 164 & 2 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 3 & 36 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 48 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -22 & 4 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 20 & 2 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 3 & 36 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & 7 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & -7 & -4 & 1 \\ 0 & 20 & 2 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 3 & 36 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -21 & -12 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & -7 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 62 & -73 & -41 & 11 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 3 & 36 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -7 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & -21 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 62 & -73 & -41 & 11 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 3 & 36 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -7 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & -21 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -5 & 5 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 3 & 36 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -7 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 79 & 38 & -48 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -5 & 5 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ještě pak prohodíme poslední dva řádky.

Nyní přijde upravovací fáze. Nejprve v prvním sloupci potřebujeme výsledek 6, takže první řádek vynásobíme dvojkou. Přejdeme k druhému sloupci a hledáme $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby $72 - 2k = 12$, najdeme $k = 15$. Vynásobíme tím druhý řádek.

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 3 & 36 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -7 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 79 & 38 & -48 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|cccc} 6 & 72 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -7 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 79 & 38 & -48 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|cccc} 6 & 72 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -60 & 180 & -210 & -120 & 30 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 79 & 38 & -48 \end{array} \right)$$

Mimochodem, vidíme, že podmínkou řešitelnosti je, že c_1 je násobkem tří a $c_2 - 72$ je sudé, tedy c_2 musí být sudé.

Dostáváme se k poslední fázi řešení. První dva řádky jsou v levé části nenulové, takže partikulární řešení je

$$\vec{x}_p = (2, 0, 2, 0) + (180, -210, -120, 30) = (182, -210, -118, 30)$$

a obecné řešení přidružené homogenní rovnice je

$$\vec{x}_h = k(2, -10, -5, 5) + l(0, 79, 38, -48).$$

Máme řešení naší soustavy

$$\begin{aligned} s &= 182 + 2k \\ t &= -210 - 10k + 79l \\ u &= -118 - 5k + 38l \\ v &= 30 + 5k - 48l \end{aligned} \quad \text{pro } k, l \in \mathbb{Z}.$$

△

Poznámka: Podobně jako u jedné rovnice, ani v případě řešení soustav není nutné redukovat výsledkovou část matice. Stačí získat schodovitý tvar v levé části, což umožní rozeznat řešitelnost, vyrobit správná c_i a poznat, které řádky generují partikulární a které homogenní řešení.

△

Poznámka: Podobně jako u jedné rovnice, také u soustav lze řešení napsat snadno přímo z výsledné matice, tentokrát po ještě jedné úpravě. Prvních N řádků (ty, které mají vlevo nenulové členy), nahradíme jejich součtem, ostatní řádky vynásobíme postupně parametry.

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 6 & 12 & 182 & -210 & -118 & 30 \\ 0 & 0 & 2k & -10k & -5k & 5k \\ 0 & 0 & 0l & 79l & 38l & -48l \end{array} \right)$$

Nyní ve sloupcích snadno přečteme řešení:

$$s = 182 + 2k, \quad t = -210 - 10k + 79l, \quad u = -118 - 5k + 38l, \quad v = 30 + 5k - 48l.$$

△

Cvičení

Cvičení 18b.1 (rutinní): Najděte obecná řešení pro následující rovnice:

a) $21x + 28x - 14y = 35$;

c) $3a + 5b + 7c = 9$;

b) $8x - 12y + 28z = 18$;

d) $2r - 3s + 4t - 5u + 6v = 7$.

Cvičení 18b.2 (rutinní): Najděte obecná řešení pro následující soustavy rovnic:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 25x - 15y = 10 \\ 4x + 6y = 52; \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 2u - 4v + 6w = 8 \\ 4u - 8v + 12w = 16; \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} 3r + 5s - 7t + 9u = 2 \\ 3r - 5s + 7t - 9u = 3 \\ 2r + 4s + 6t + 8u = 4; \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 9x + 6y = 5 \\ 6x - 4y = 10; \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 6u - 9v + 9w = 12 \\ 2u - 4v + 5w = 13; \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 6 \\ 4x + 5y + 6z = 7. \end{cases} \end{array}$$

Řešení:

Poznámka: Protože při eliminaci matic existuje více možných postupů, může se vaše matice lišit. Podstatné je, že by vaše vektory měly generovat stejný prostor řešení.

18b.1: a) $\left(\begin{array}{c|ccc} 21 & 1 & 0 & 0 \\ 28 & 0 & 1 & 0 \\ -14 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|ccc} 7 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{c|ccc} 35 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right).$

$(5, 0, 5) + k(0, 1, 2) + l(2, 0, 3)$ neboli $x = 5 + 2l, y = k, z = 5 + 2k + 3l$ pro $k, l \in \mathbb{Z}$.

Mimochoodem, $\gcd(21, 28, -14) = 7$.

b) $\left(\begin{array}{c|ccc} 8 & 1 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 1 & 0 \\ 28 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|ccc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \end{array} \right)$

Nelze $4 \mapsto 18$, řešení neexistuje.

c) Kladné zbytky: $\left(\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 0 & -3 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{c|ccc} 9 & -18 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 0 & -3 \end{array} \right).$

$(-18, 0, 9) + k(3, 1, -2) + l(7, 0, -3)$ neboli $a = -18 + 3k + 7l, b = k, c = 9 - 2k - 3l$ pro $k, l \in \mathbb{Z}$.

Záporné zbytky: $\left(\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{c|ccc} 9 & 18 & -9 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{array} \right).$

$(18, -9, 0) + k(-5, 3, 0) + l(-4, 1, 1)$ neboli $a = 18 - 5k - 4l, b = -9 + 3k + l, c = l$ pro $k, l \in \mathbb{Z}$.

d) $\left(\begin{array}{c|cccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{c|cccccc} 7 & 14 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$

$(14, 7, 0, 0, 0) + k(-3, -2, 0, 0, 0) + l(-2, 0, 1, 0, 0) + m(4, 1, 0, 1, 0) + n(-3, 0, 0, 0, 1)$ neboli $r = 14 - 3k - 2l + 4m - 3n, s = 7 - 2k + m, t = l, u = m, v = n$ pro $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbf{18b.2: a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 25 & 4 & 1 & 0 \\ -15 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & -16 & -1 & -2 \\ 0 & 42 & 3 & 5 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & -32 & -2 & -4 \\ 0 & 42 & 3 & 5 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & -32 & -2 & -4 \\ 0 & 84 & 6 & 10 \end{array} \right).$$

$(x, y) = (-2, -4) + (6, 10) = (4, 6)$ neboli $x = 4, y = 6$.

$$\mathbf{b)} \left(\begin{array}{cc|cc} 9 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 10 & 1 & -1 \\ 0 & -24 & -2 & 3 \end{array} \right).$$

Pomocí $k \in \mathbb{Z}$ nelze vytvořit $3k = 5$, proto soustava nemá řešení.

$$\mathbf{c)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 16 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$(u, v, w) = (4, 0, 0) + k(2, 1, 0) + l(-3, 0, 1)$ neboli $u = 4 + 2k - 3l, v = k, w = l$ pro $k, l \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbf{d)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 8 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 8 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right).$$

$(u, v, w) = (-4, -4, 0) + (0, 5, 5) + k(3, 4, 2)$ neboli $u = -4 + 3k, v = 1 + 4k, w = 5 + 2k$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbf{e)} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -9 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 11 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 23 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 55 & 2 & -29 \end{array} \right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 22 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 23 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 55 & 2 & -29 \end{array} \right).$$

Pomocí $k \in \mathbb{Z}$ nelze dosáhnout $22 + 6k = 3$, proto soustava nemá řešení.

$$\mathbf{f)} \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|ccc} 6 & 6 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

$(x, y, z) = (-6, 6, 0) + (4, -3, 5) + k(1, -2, 1)$ neboli $x = -2 + k, y = 3 - 2k, z = k$ pro $k \in \mathbb{Z}$.