

Diskrétní matematika

Seznámení s matematikou jako vědou

Petr Habala

FEL ČVUT Praha

<http://math.feld.cvut.cz/habala/>

Úvod, návod ke knize

Co je matematika? Rozhodně ne vzorečky k učení nazpaměť—to jsou počty. Matematika je jazyk, který nám dovoluje vyjádřit, že mezi určitými objekty existují rozličné vztahy, popřípadě že tyto objekty spolu různě interagují a tyto interakce splňují rozličná pravidla. Výhodou tohoto jazyka je jeho přesnost, protože v matematice je přesně definováno (určeno), co jednotlivé pojmy a značky znamenají. Další výhodou je jeho stručnost.

Je například možné říci: „Uvažujme kvantitu takovou, že když udělám čtvercové pole o straně rovné této kvantitě, pak bude mít toto pole výměru 4 jednotky“. Matematika nám umožňuje namísto toho říct „uvažujme číslo $\sqrt{4}$ “. Mimochodem, není to umělý příklad. Ta dlouhá věta ukazuje, jak lidé s matematikou začínali, první spisky o výpočtech a algoritmech (starověký Egypt, Čína, Indie,...) takto fungovaly.

Kromě stručnosti a přesnosti má matematický jazyk ještě další podstatnou výhodu: Umožňuje relativně efektivně hledat způsoby, jak ze zachycených vztahů, interakcí a pravidel získat co nejvíce informací. Například víme, že ona kvantita musí být 2. Matematika je tedy také umění řešit problémy nastolené matematickým jazykem.

Umět matematiku znamená umět kolem sebe nacházet vztahy a pravidelnosti a vyjadřovat je matematickým jazykem, struktury vzniklé matematickým popisem pak prozkoumat a získat nové informace. A naopak, je to i schopnost číst matematický jazyk, porozumět mu a překládat z něj do lidských, intuitivních pojmů, které je pak možno vztáhnout na svět kolem nás. Je to také schopnost umět odůvodnit, proč jsou metody použité k řešení problémů správné, protože základním prvkem matematiky je její spolehlivost. Ta je dána už tím, že je přesně znám význam pojmů, a hlavně tím, že matematici své závěry dokazují. To někdy vede k dojmu, že matematika je suchý kolotoč definic, vět a důkazů. Asi je trochu i oprávněný, ale je to cena, kterou platíme za spolehlivost výsledků.

Nevýhodou matematického jazyka je, že mu normální člověk nerozumí. Pokud jej někdo potřebuje (vědci, inženýři), tak se jej musí (jako každý jiný jazyk) naučit, a to v zásadě klasickým způsobem. I matematický jazyk má svá slovíčka (pojmy, značení) a gramatiku (například pravidla logiky), jeho obtížnost je ale v tom, že se podstatně liší od ostatních lidských jazyků a navíc je při jeho používání nutno silně používat mozek, a to ještě jedním specifickým způsobem (v zásadě tím, co měří IQ testy), což pro hodně lidí představuje problém a pro některé problém nepřekonatelný. Jedním z cílů tohoto textu je tento jazyk čtenáře alespoň trochu naučit. Bude to od něj samozřejmě vyžadovat práci, protože nejlépe se člověk jazyk naučí tak, že jakmile jej trochu pochytí, začne jím mluvit.

Kniha se tedy snaží o dvojí, na jedné straně má být relativně přístupným úvodem do oblasti zvané diskrétní matematika, zároveň na těchto tématech zkouší čtenáře uvést do světa logiky, matematického uvažování a kritického přístupu k vlastnímu myšlení. Pokud uspěje a čtenář si v tomto směru něco odnese, tak mu to pomůže asi i víc než konkrétní materiál, který se zde naučí. Umění uspořádat myšlenky, najít v nich řád, hledat slabá místa v argumentech, posoudit vzájemnou provázanost různých faktů a také umět vyjádřit své nápady strukturovanou formou jsou schopnosti, které se jistě budou hodit nejen při děláni matematiky.

Co je to za knihu

Tato kniha vznikala jako malé skriptum pro kurs diskrétní matematiky, ale trochu se vymkla z ruky. Její původní účel ji nicméně ovlivnil v několika zásadních věcech.

Jedna je obsahová. Diskrétní matematika je rozsáhlá oblast a většina autorů základních učebnic nestíhá probrat pořádně všechno, někde zajdou hlouběji, jinde jen nastíní základy, u této knihy je volba látky ovlivněna obsahem kursu diskrétní matematiky pro studenty computer science. Je to kurs úvodní a částečně přehledový, kniha tedy pokrývá hodně témat, ale málokdy jde hlouběji.

Významným faktorem je, že tento kurs byl prvním matematickým předmětem, který studenti ve svém programu mají, a měl je seznámit s matematickým způsobem myšlení, práce a vyjadřování. Autor chtěl studentům svými přednáškami i knihou představit matematiku jako vědu, ukázat jim, jak funguje, a naučit je rozumět matematickému jazyku tak, aby byli schopni matematiku číst a také do jisté míry psát (důkazy).

Dnes je k dispozici (zejména v angličtině) široké spektrum učebnic diskrétní matematiky. Mnohé se soustředí spíše na praktický pohled a neobtěžují příliš studenty abstraktními matematickými úvahami. Na opačné straně jsou knihy, pro které je diskrétní matematika jen pozadím, na kterém se snaží učit základy matematiky a logiky a zejména umění důkazů, což samozřejmě výrazně ovlivní řazení materiálu. Tato kniha si hledá místo někde uprostřed, je to pokus o kompromis. Pokud čtenáře zajímá spíš jen diskrétní matematika, může ignorovat teoretičtější pasáže (uspořádání knihy mu v tom pomůže) a dostane se mu v zásadě klasického výkladu diskrétní matematiky (autor by si rád myslel, že dost dobře provedený).

Na druhou stranu student, který se hodlá matematice věnovat hlouběji a zatím se s ní moc nepoznal, zde najde dostatek podnětů k přemýšlení. Aby kniha studentovi co nejvíce pomohla, je hlavně ze začátku výrazně rozvláčnější a detailnější, než bývá zvykem. „Výchovnému“ charakteru kursu odpovídá i to, že se zde najde spousta důkazů,

a to i u věcí, které se typicky nechávají na čtenářích nebo ignorují, a kniha se snaží postupně ukazovat, jak z probrané látky vznikají matematické struktury. Text je tedy hlubší a úplnější (z matematického pohledu) než standardní knihy. Je tu také spousta odboček směřujících čtenáře dál, dobrému studentovi by měly pomoci získat lepší představu o tom, co je vlastně matematika. Pokud autor ve svém úsilí o student-friendly knihu uspěl, pak by kniha mohla sloužit jako vstupní brána k matematice nejen studentům computer science, ale i studentům jiných oborů, kteří se budou muset s matematikou skamarádit a začínají v bodě nula.

Zvýšením prostoru pro důkazy a odbočky se už podle zákona zachování čehokoliv nedostalo na životopisné žblebty o slavných matematicích, historické anekdoty a podobně, ale to student najde v bohatém množství v libovolné novější matematické knize.

Návod ke čtení

Asi není nejlepší nápad skriptum otevřít, začít stranou 1, přejít na stranu 2 atd až po poslední. Hlavně student, který se s matematikou zatím moc nepotkal, udělá lépe, pokud ze začátku hutnější pasáže (zejména týkající se důkazů) přeskóčí, jen občas nakoukne do těch snažších. Teprve když začne mít pocit, že už do toho trochu vidí, je vhodné vrátit se zpět na začátek a znovu si přečíst to, co třeba na první čtení vypadalo nesrozumitelně. To se týká i rad, zejména těch obecnějších. Člověk obecné povídání „jak na to“ ocení mnohem lépe poté, co si to nejprve sám několikrát vyzkouší. Speciální rada ohledně první kapitoly: Rozhodně nedoporučuji přeskakovat její první část o logice, ale k části o důkazech by se začátečníci měli dostat raději až později.

Čtenář si dokonce v zásadě bez větších problémů může jen vyzobat některé kapitoly, v tom mu pomůže sekce Struktura kapitol níže.

Kniha se snaží vycházet vstřícně čtenářům začínajícím, středním i pokročilým. Ti prvně jmenovaní budou asi při prvním čtení chtít některé pokročilejší pasáže přeskóčit a soustředit se na pochopení základů. Proto jsou věci, které nepovažuji za velmi důležité, odsazeny zleva jako tato část. Odsazeny jsou i důkazy, ty ale pro některé čtenáře důležité budou. Některé pasáže jsou rovnou označeny jako bonusové. Naopak čtenáře pokročilého, kterého základy nudí, mohou právě ty odsazené/bonusové části probudit a nasměrovat dál.

! Je možné, že čtenář opravdu začínající toho bude chtít přeskóčit víc. Pak mu může pomoci vykřičník nalevo, kterým značím ty pasáže, které mi přijdou důležité a raději by se přeskakovat neměly. Tvoří jakési jádro látky, na které je možné později nabalit zbytek.

S Touto značkou jsou pro změnu označeny části, které lze brát jako rady do života pro studenty. Jedná se zejména o algoritmy či doporučené postupy pro řešení hlavních typů problémů. Pro lepší orientaci jsem do obsahu přidal seznam těchto poradních koutků.

Text doprovází cvičení, která jsem se pokusil klasifikovat. „Rutinní“ přímo procvičují probraný materiál. Naučíte se řešit rovnice, rutinní cvičení chce řešit rovnici. Náročnější cvičení vyžadující trochu tvůrčí přístup jsem značil „dobrá“. U některých cvičení odhaduji, že jsou „zkoušková“, to jest ani příliš lehká, ani příliš těžká, ani příliš trikovaná. Z hlediska obsahového pak jako „poučná“ značím cvičení, která nějakým způsobem doplňují vyloženou látku. Tyto vlastnosti je samozřejmě možné kombinovat.

Podobně klasifikuji důkazy. „Rutinní“ jsou většinou velice lehké a v typické knize by byly vynechány, protože pokročilejšího čtenáře neskonalé nudí, ale já jsem je tu dal jednak proto, abych sám sebe přesvědčil, že opravdu rutinní jsou, a druhak proto, aby začínající student viděl, co všechno takový důkaz obnáší. Doporučuji je brát jako další cvičení. Pokud student zkusí „rutinní“ důkaz nejprve vytvořit sám a pak to porovná s tím, co jsem napsal já, mnoho se naučí. Očekává se, že lepší student bude na konci kursu umět takovéto rutinní důkazy sám tvořit levou zadní (leváci pravou zadní). Mimochodem, spousta důkazů se dá vést více směry, takže pokud váš důkaz nebude úplně stejný jako můj, tak to ještě nutně neznamená, že je špatně (ale u začátečníka většinou ano).

Pak jsou důkazy „poučné“, které podle mého soudu studentovi dobře ukážou, jak matematika funguje. Některé důkazy jsou myslím „drsné“, u těch rozhodně neočekávám, že by je student tvořil, a možná bude mít i problém je pochopit, ale výborný student by měl IMHO přinejmenším vnímat, co se tam děje. U některých důkazů jsem si nemohl pomoci a klasifikoval jsem je „z povinnosti“. Většinou jde o důkazy důležitých věcí, které by tedy měly být uvedeny, ale obvykle jsou dlouhé a přitom nečekám, že by studentovi něco daly, ani mě je nebavilo psát. Ale přemohl jsem se.

U klasifikací cvičení i důkazů jde samozřejmě o můj subjektivní názor, pro studenta bude zásadní třeba i to, z jakého důvodu knihu čte. Pokud ani není jeho cílem se naučit matematiku psát, pak může všechny důkazy (možná kromě pár poučných) i mnohá cvičení vynechat. Rovněž důležitost jednotlivých pasáží a to, zda je cvičení zkouškové či ne, záleží také na úrovni kursu.

Text je strukturován klasickým způsobem (definice, věty atd.), tvrzení jsou vymezena rámečkem. Pro přehlednost vyznačujeme i konce stylistických celků, konce důkazů jsou značeny tradičním čtverečkem vpravo, konce příkladů, poznámek a algoritmů trojúhelníčkem. Tvrzení jsou číslována arabskými číslicemi v každé kapitole zvlášť, značení ukazuje kapitolu a za tečkou číslo tvrzení (věta 6d.13). Podobně jsou číslovány příklady, ale mají své vlastní

číslování a používají na to písmena (příklad 6d.k). Abychom čtenáři ulehčili hledání konkrétního tvrzení/příkladu, značíme na spodním okraji poslední tvrzení a příklad, které se na té stránce objevily.

Abych čtenářům pomohl do dalších let, kdy budou nejspíše studovat z anglických zdrojů, uvádím v textu i anglické ekvivalenty termínů, občas celé věty. Popravdě řečeno mě lákalo to napsat celé anglicky, protože každý, kdo se kolem computer science motá, musí tento jazyk umět. Nakonec jsem se ale rozhodl být hodný na začátečníky. Pokud půjdete v oboru dál, anglických knih si ještě užijete.

Na závěr pár rad. Lidé se liší v tom, jakou preferenci dávají paměti a jakou porozumění. Zejména u snažší látky bývá častou volbou se jen nadřtit hromádku vzorových příkladů a doufat, že u zkoušky se natrefí na podobný. Tato strategie bývá ve škole bohužel docela účinná, ale v praxi často selhává, protože studenta nevyzbrojí na situace, které vybočují z naučených schémat.

Mnohem perspektivnější je látku pochopit. Student přemýšlivý nejprve stráví delší dobu rozjímaním nad podstatou věci a souvislostmi, načež si udělá pár příkladů, aby se ujistil, že to má opravdu v paži. Výhodou tohoto přístupu je, že už nevyžaduje tolik pamatování a navíc je získaná znalost vysoce flexibilní a neztrácí se v čase tak rychle jako našprtané rutinní postupy. Nevýhoda je, že to vyžaduje přemýšlení a to bolí. Většina studentů oba přístupy kombinuje a poměr si nastavuje dle vlastního vkusu, nicméně pro studenta s ambicemi, který by rád v oboru působil tvůrčím způsobem, je jednoznačnou volbou cesta přes pochopení.

Jak se k takovému pochopení dospěje? Kromě rozjímaní nad textem je důležité správně pracovat s příklady a cvičeními. Klasická situace: Student se podívá na zadání, nevidí jak na to, koukne do řešení, prohlásí „A jo, tak takhle to je“ a jede dál. Výsledek: nenaučí se nic. Dvě věci jsou třeba dělat jinak.

1. Je třeba příklad opravdu zkusit vyřešit, věnovat mu čas, napnout mozek. Teprve když se to nezlomí ani po větším úsilí, je čas kouknout na řešení. Proč? Protože nejvíce si pamatujeme věci, které máme svázány s emocemi, například vztekem, že něco nejde. Pokud bez emocí konstatujeme „to nevidím“, tak máme malou šanci, že něco z této epizody uvízne v paměti.

2. Když se podíváme na řešení (ať už cvičení nebo ukázkového příkladu v textu), tak nestačí jen konstatovat, že vidíme, co se tam děje. Klíčové je umět si zodpovědět na otázku, proč se to tam děje. Proč autor řešil tento příklad zrovna tímto způsobem? Jak poznal, že nemá zkusit něco jiného? A co by se stalo, kdyby něco jiného zkusil? Teprve až čtenář najde odpovědi na tyto otázky, tak má jistotu, že až tento (či podobný) příklad zase potká, tak bude vědět, co dělat. Pokud si na tyto otázky odpovědět neumí, tak by se měl vrátit k textu, protože ty odpovědi tam někde jsou.

Struktura kapitol

Z obsahové stránky je diskrétní matematika zajímavá tím, že mezi jednotlivými tématy je relativně slabá vazba (na rozdíl třeba od analýzy). Kapitoly je možné do značné míry studovat samostatně či permutovat, aniž by vznikly větší problémy. Konec konců, tato kniha prošla během přípravy třemi značně rozdílnými pořadími kapitol a ani jedno z nich by nebylo špatně, rozhodovaly maličkosti.

Čtenáři (či učitelé předmětu diskrétní matematika) se tak nabízí značná svoboda, co a v jakém pořadí číst. Omezení je velice málo:

- Silně doporučuji začít kapitolou 1a, dobré je pak alespoň proletět množiny a zobrazení.
- Kapitolou o kombinatorice se dá klidně i začít a může sloužit jako motivace pro později zařazenou kapitolu o rekurentních rovnicích, která také může být samostatně hned na začátku, používá sice indukci, ale jen zlehka, mnohý čtenář ji již zná v dostatečné míře.
- Je jasné, že obě kapitoly o relacích patří za sebe, ale neodvolávají se příliš na ostatní materiál a klidně mohou přijít později. Podobně kapitola o indukci může klidně přijít později nebo naopak dříve. Jediná silná vazba je k relacím (princip dobrého uspořádání a princip indukce). Je tedy třeba umístit povídání o axiomech do té kapitoly, která přijde dříve (indukce či relace).

Pokud se u studentů očekává již nějaká zkušenost s matematikou, je dobrý nápad dát kapitolu o indukci na začátek, protože nic nevyžaduje a naopak prakticky všechny kapitoly indukci používají, je to tedy z matematického pohledu takto čistější (tak tomu bylo i v původní verzi tohoto textu). Pro začínající studenty ale bývá lepší je nejprve do matematiky uvést na něčem snažším, proto je v této knize nejprve dvojkapitola o relacích.

- Kapitola o dělitelnosti a počítání modulo se částečně odvolává na předchozí výsledky o relacích, ale je možné ji bez větší újmy studovat i samostatně.

- Kapitola o binárních operacích je v zásadě nezávislá na zbytku knihy (používá relace a prostory modulo jako příklady, ale to se dá zvládnout). Vzhledem k silné abstraktnosti materiálu je dobré ji řadit později, až si student trochu na matematiku zvykne. Je to zase otázka vspělosti čtenáře, pokud ten již abstraktnější matematiku potkal, tak může být lepší zařadit kapitolu o počítání modulo až za binární operace.

• Grafy jsou jedna z věcí, na které v původním kursu nedošlo, zde byla zařazena čistě přehledová kapitola jen pro úplnost. Čtenáři doporučujeme nějakou dobrou knihu.

Literatura

V knize chybí tradiční bohaté odkazy na literaturu. Většina látky je totiž klasická, nové je její podání. Při svém studiu i přípravě tohoto kursu jsem samozřejmě čerpal z mnoha zdrojů, zmíním ty hlavní. Hodně pomohli mi učitelé matematiky, počínaje základní školou a konče MFF UK, své zápisky z tehdejších přednášek mám dodnes schovány a několikrát jsem do nich nakoukl i při přípravě této knihy. Inspirací mi bylo pojetí diskrétní matematiky mých kolegů, prof. Demlové a doc. Velebila, hodně se mi také líbila níže zmíněná kniha od Rosena.

Pokud by se student chtěl podívat i do jiné knihy, pak je jich k dispozici mnoho, stačí vyhledat „discrete mathematics“ na Webu. Většina má podobný obsah (ale prakticky žádná se nekryje s touto, něco chybí a něco je navíc), i zpracování bývá v modernějších knihách podobné a je otázkou osobního vkusu, která více vyhoví. Pokud by čtenáře zajímal můj názor, zde je pár doporučení:

• Rosen, K.H.: *Discrete Mathematics And Its Applications*, 6ed, McGraw-Hill (2007).

Tohle je první liga. Je to kniha „nového“ typu, se spoustou historických poznámek, životopisů matematiků, pěkných příkladů s aplikacemi, počítačovými cvičeními a podobně. Obsah: Logika, množiny a zobrazení, kombinatorika, relace, dělitelnost a počítání modulo, rekurentní rovnice, také teorie grafů a dokonce algoritmy. Oproti tomuto textu chybí binární operace, kniha nejde tak hluboko a nesnaží se tolik organizovat materiál do matematických struktur (pro některé čtenáře to může být výhodou). Navíc probírá diskrétní matematiku a algoritmy paralelně a ony se pěkně doplňují, velice dobře se čte a má málo chyb, zato spoustu cvičení. Je to také pěkná bichle (1000 stran). Doporučil bych ji jako zajímavou knihu ke čtení zároveň s tímto textem, protože namísto pohledu teoretičtějšího nabízí spíš pohled praktičtější. Moc se mi líbila.

• Velebil, J.: *Diskrétní matematika a logika*, online (pdf soubor).

První polovina skripty nabízí zajímavý pohled na indukci, relace a počítání modulo. Odtud se pak odrazí k obecnějším algebraickým strukturám pro pokročilé. Skriptum je méně upovídané, nabízí výklad z pohledu matematiky a také dost zajímavých příkladů, náročnějšího čtenáře rozhodně nezklame.

• Velebil, J.: *Lecture notes for Mathematics 5(d)*, online (pdf soubor).

Rovněž začíná indukci a počítáním modulo, i zde se pak rozjede do pokročilých luhů a hájů, v tomto případě ještě dále. Procvičí angličtinu.

• Matoušek, J. a Nešetřil, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum Praha (2000).

V prvních kapitolách se podrobně proberou množiny a zobrazení, dále relace, dělají to matematicky, ale se spoustou příkladů a povídaní. Dobře se to čte. V druhé polovině knihy autoři utečou hlavně ke grafům a dalším tématům mnohem pokročilejším než tento kurs. Jako dobré cvičení bych doporučil anglickou verzi *Invitation to Discrete Mathematics*, Oxford UP (2008).

• Demlová M., Pondělíček B.: *Matematická logika*, ČVUT Praha (1997).

Doplní studentovi logiku, velice pěkné skriptum.

• Demel J.: *Grafy a jejich aplikace*, Academia (2002).

Díky této knize zde stačil jen stručný úvod o grafech, zbytek je tam.

Upozornění: Snažil jsem se psát česky, pokud se tedy někdy od pravidel českého pravopisu odchyliji (a není to překlep), pak je to záměr, protože si naivně myslím, že to tak je hezčí.

Poděkování: Rád bych poděkoval všem, od kterých jsem se tuto látku naučil a kteří mě různým způsobem podporovali při psaní tohoto textu (třeba děti mě nechaly občas i vyspat). Special thanks jdou panu Knuthovi, jehož sázecí systém \TeX byl naprostou revolucí v přípravě textů, používám jeho mutaci $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\TeX}$. Obrázky jsem přímo ve zdrojovém kódu tvořil pomocí \PGF/TikZ , který jsem se kvůli této knize naučil a bylo to šťastné setkání.

Děkuji také studentům za odchylené chyby a překlepy, zejména panu Michalu Souchovi, který byl obzvláště pečlivým čtenářem.

Příjemné čtení přeje autor.

Značení

Varování: U čísel používám zásadně desetinnou tečku, protože je tomu tak na kalkulačkách, počítačích i v anglických knihách, lidi od computer science jsou na to zvyklí a já taky. Jako milovníkovi literatury se mi neporušují pravidla snadno, ale jsem přesvědčen, že odborná literatura by měla čtenáři pochopení usnadňovat, ne komplikovat.

| | |
|---|---|
| \mathbb{N} | přirozená čísla 1, 2, 3, 4, ... |
| \mathbb{Z} | celá čísla 0, 1, -1, 2, -2, ... |
| A, B, C, \dots | množiny |
| a, b, c, \dots, x, y, z | prvky množin, čísla |
| $A \cap B, A \cup B$ | průnik, sjednocení množin |
| R, S, T, \dots | zobrazení, relace |
| $S \circ R$ | skládání dvou relací/zobrazení v pořadí R , pak S |
| $T: A \mapsto B$ | zobrazení z A do B |
| $ A = B $ | množiny A, B mají stejnou mohutnost |
| aRb | dvojice (a, b) je v relaci R |
| $a \preceq b$ | dvojice (a, b) je v relaci \preceq , což je částečné uspořádání |
| $a b$ | a dělí b |
| $r = a \bmod d$ | r je zbytek po dělení a číslem d |
| $a \equiv b \pmod{n}$ | čísla a, b jsou kongruentní (mají stejný zbytek) modulo n , |
| $a = b \pmod{n}$ | viz $a \equiv b \pmod{n}$ |
| $a \circ b$ | binární operace \circ aplikovaná na prvky a, b |
| $\{a_k\}_{k=1}^n, \{a_k\}_{k=1}^\infty$ | posloupnost čísel a_1, a_2, \dots konečná či nekonečná |
| $\{a_k\}$ | posloupnost čísel a_k , začátek indexace irelevantní |

Obsah

^b: bonusový materiál.

0. Úvod, návody k použití, značení, obsah
1. Matematika, logika
 - 1a. Průlet logikou
(výroky a spojky; pravidla; logika v aplikacích; kvantifikátory)
 - 1b. Logika a matematika
(jazyk: definice a věty; důkazy: přímý, nepřímý, sporem; 1b.5 jak dokazovat)
2. Teorie množin
 - 2a. Množiny
(množiny, operace, pravidla)
 - 2b. Zobrazení
(skládání a inverze; prosté, na a bijekce; velikost množin; funkce $\lfloor x \rfloor$ a $\lceil x \rceil$)
 - 2c. Mohutnost množin
(mohutnost; spočetné a nespočetné množiny; \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} a \mathbb{R})
3. Binární relace
 - 3a. Binární relace a operace s nimi
(reprezentace maticemi; množinové operace; inverze, skládání a mocnina; operace a reprezentace)
 - 3b. Základní vlastnosti binárních relací
(čtyři základní vlastnosti; vyšetřování vlastností; 3b.9 Kartézský součin)
 - 3c. Další vlastnosti relací^b
(vlastnosti a operace; 3c.6 uzávěr relace; 3c.8 další vlastnosti)
 - 3d. n -ární relace^b
4. Speciální relace
 - 4a. Ekvivalence
(ekvivalence; třídy ekvivalence; rozklad množiny)
 - 4b. Částečná uspořádání
(relace \preceq a \prec ; 4b.6 Hasseův diagram; 4b.17 uspořádání a kartézský součin)
 - 4c. Minima, nejmenší prvky a podobně, dobré uspořádání
(max. a min., nej[men/vět]ší prvek; porovnatelnost a lineární uspořádání; 4c.14 princip dobrého uspořádání)
 - 4d. Bonus: Další pojmy okolo uspořádání
(horní/dolní mez, sup a inf, svaz)
5. Indukce a rekurze
 - 5a. Matematická indukce
(principy slabé indukce; 5a.7 indukce a algoritmy; principy silné indukce)
 - 5b. Rekurze a strukturální indukce
(induktivní definice množin; princip strukturální indukce)
6. Dělitelnost a prvočísla
 - 6a. Dělitelnost
(dělitelnost; dělení se zbytkem; gcd a lcm; 6a.19 Bezout; 6a.21 Euklidův algoritmus)
 - 6b. Prvočísla
(prvočísla; 6b.4 Fundamentální věta aritmetiky)
 - 6c. Diofantické rovnice
(struktura řešení; homogenní případ; 6c.6 algoritmus)
7. Počítání modulo
 - 7a. Kongruence, počítání modulo
(kongruence a operace; počítání modulo, opačný a inverzní prvek; \mathbb{Z}_n ;
7a.12 Malá Fermatova věta; \mathbb{Z}_n jako třídy ekvivalence; 7a.22 Eulerova funkce a věta)
 - 7b. Řešení rovnic modulo
(7b.1 lineární kongruence; 7b.8 soustavy a Čínská věta o zbytcích)
 - 7c. Matice a polynomy modulo
(7c.1 matice: problém výpočtu determinantu a inverzní matice;
7c.5 polynomy: stupeň, rozklad, kořeny)

- 8. Binární operace
 - 8a. Pologrupy a monoidy
(binární operace; asociativita; mocnina; jednotkový a inverzní prvek; podmonoid; řád prvku; monoid generovaný mocninami prvku)
 - 8b. Grupy
(grupy; podgrupy; podgrupy generované prvkem, řád prvku, mohutnost podgrup)
 - 8c. Další struktury^b
(okruhy; obory integrity; tělesa; 8c.4 okruhy polynomů)
 - 8d. Bonus: Racionální čísla
- 9. Posloupnosti a součty, řady
 - 9a. Posloupnosti
(aritmetická a geometrická posloupnost; monotonie; limita)
 - 9b. Porovnávání rychlosti růstu
(pojmy \ll , o , ω , Θ atd.; škála mocnin)
 - 9c. Sumy
(operace se sumami; součty mocnin; součet geometrické posloupnosti; součiny)
 - 9d. Řady^b
(konvergence; operace s řadami; mocninné řady)
- 10. Rekurentní vztahy
 - 10a. Lineární rekurentní rovnice
(obecné a partikulární řešení; počáteční podmínky; Věta o existenci a jednoznačnosti; Věty o struktuře řešení)
 - 10b. Rovnice s konstantními koeficienty
(charakteristická čísla a báze prostoru řešení homogenní rovnice; metoda odhadu pro speciální pravou stranu; Věta o superpozici)
 - 10c. Další rovnice (Master theorem)
(rovnice algoritmů divide-and-conquer; The Master Theorem)
 - 10d. Bonus: Generující funkce
(transformace posloupností na funkce, řešení rekurentních rovnic)
- 11. Kombinatorika (počítání)
 - 11a. Základní principy
(sčítací, násobící a doplňkový princip; klasické permutace kombinace variace; nestandardní situace; stromy jako nástroj)
 - 11b. Pokročilejší principy
(princip inkluze a exkluze; Dirichletův šuplíkový princip; 11b.7 krabičky)
 - 11c. Binomická věta, kombinační čísla
(kombinační čísla; Pascalova a jiné identity; 11c.3 binomická věta a její varianty)
 - 11d. Bonus: Generování výběrů.
- 12. Grafy (přehled)
 - 12a. Co jsou grafy (poprvé)
 - 12b. Co jsou grafy (podruhé)
 - 12c. Procházení grafem
 - 12d. Kreslení grafů
 - 12e. Barvení grafu
 - 12f. Stromy, kostra grafu
 - 12g. Bonus: Platónovská tělesa
- 13. Bonus: Isomorfismy a transformace

S Návody a algoritmy:

- 1b.5: Jak vytvářet důkazy
- 2a.10: Jak psát a číst důkazy
- 2b.9: Jak na vlastnosti funkcí
- 2c.17: Jak určovat mohutnost
- 3b.2: Jak vyšetřovat vlastnosti relací
- 4b.7: Jak vytvářet Hasseův diagram
- 5a.12: Jak dokazovat indukci
- 6a.21: Rozšířený Euklidův algoritmus
- 6a.22: Ruční výpočet Euklidova algoritmu
- 6c.6: Jak řešit diofantické rovnice
- 7a.11: Jak najít inverzní prvek modulo
- 7b.7: Jak řešit rovnice $ax = b$ modulo n
- 7b.13: Jak řešit soustavy lineárních kongruencí
- 10b.8: Jak řešit lineární rekurentní rovnice