

### 3. Binární relace

Vzájemné vztahy mezi objekty se vyskytují velice často. Některá čísla se rovnají, jiná ne, některá jsou menší než jiná. Někteří lidé se spolu znají a jiní ne, některé jídlo vyžaduje jistou surovinu a jiné ne. Takové situace teď budeme chtít zachytit. Existující vztahy lze vyjádřit matematicky vytvářením uspořádaných dvojic. Vyjdeme ze dvou množin objektů, třeba  $A$  jsou druhy ovoce a  $B$  jsou vitamíny, a to, že určité ovoce obsahuje určitý vitamín, zachytíme tak, že si příslušnou dvojici (ovoce, vitamín) schováme do nějaké množiny  $R$  (jako relace).

Takto jsme to dělali již u zobrazení, ale tam jsme měli pro výslednou množinu dvojic výrazné omezení, které zrovna u našeho příkladu s ovocem neplatí, protože jedno ovoce může mít více vitamínů. Zde tedy žádná omezení dělat nebudeme, čímž vznikne naprosto odlišný typ objektu. Budou nás proto na relacích zajímat jiné věci, než jsme zkoumali u zobrazení, ta už měla svou vlastní kapitolu.

#### 3a. Binární relace a operace s nimi

##### ! Definice.

Nechť  $A, B$  jsou množiny. Libovolná podmnožina  $R \subseteq A \times B$  se nazývá **relace** z  $A$  do  $B$ .

Jestliže  $(a, b) \in R$ , pak to značíme  $aRb$  a řekneme, že  **$a$  je v relaci s  $b$**  vzhledem k  $R$ .

Jestliže  $(a, b) \notin R$ , pak řekneme, že  **$a$  není v relaci s  $b$**  vzhledem k  $R$ .

By a **relation** from a set  $A$  to a set  $B$  we mean an arbitrary subset  $R$  of the Cartesian product  $A \times B$ .

When  $(a, b) \in R$ , we also denote it  $aRb$  for short and say that  **$a$  is related to  $b$**  by  $R$ .

Oba způsoby značení,  $aRb$  i  $(a, b) \in R$ , jsou zcela rovnocenné a autor obvykle volí to, o kterém si myslí, že v daném kontextu rychleji předá čtenáři sdělovanou myšlenku. První značení je kratší a v mnoha situacích výrazně snazší, jsou ale věci, které se jím vyjadřují obtížně. Občas tedy nezbyde než si připomenout, že vlastně „ $aRb$ “ není nic jiného než pohodlná zkratka pro  $(a, b) \in R$ , protože konec konců z matematického hlediska relace nejsou nic jiného než množiny dvojic.

**Příklad 3a.a:** Nechť  $A$  je množina všech živých lidí a  $B$  je množina všech existujících zájmů a koníčků. Definujeme relaci  $R$  jako množinu všech dvojic  $(a, b)$  takových, že  $a$  má  $b$  jako koníčka. Pokud bychom chtěli použít ten druhý zápis, definovali bychom tuto relaci takto: „ $aRb$  právě tehdy, jestliže se  $a$  zabývá koníčkem  $b$ .“

Například  $(pH, \text{čtení}) \in R$  neboli  $(pH)R(\text{čtení})$ , zde je evidentně první zápis lepší.

Toto určitě nebude zobrazení, sice je to podmnožina  $A \times B$ , ale nesplňuje podmínku z definice, protože například autor této knihy má více než jeden koníček. Někteří lidé naopak nemají žádného.

△

**Příklad 3a.b:** Uvažujme množiny  $A$  a  $B$  a zobrazení  $T$  z  $A$  do  $B$ . Pak je to relace z  $A$  do  $B$ . Je to vlastně samozřejmé, podle definice je každé zobrazení podmnožinou  $A \times B$  splňující určité podmínky, a všechny podmnožiny  $A \times B$  jsou relace. V jistém smyslu se dá říct, že relace jsou zobecněním zobrazení, protože nám umožňují poslat z jednoho  $a$  více šipek nebo také žádnou.

△

Často porovnáváme objekty stejného typu, tedy množiny  $A$  a  $B$  jsou stejné.

##### ! Definice.

Nechť  $A$  je množina. Řekneme, že  $R$  je relace na  $A$ , jestliže je to relace z  $A$  do  $A$ .

By a **relation** on a set  $A$  we mean an arbitrary relation from  $A$  to  $A$ .

**! Příklad 3a.c:** V kapitole 2 jsme vlastně zavedli dvě relace, když jsme porovnávali množiny pomocí rovnosti a inkluze. Jak se to udělá formálně? Relace srovnávají objekty z určitých souborů  $A$  a  $B$ , zde chceme porovnávat množiny, a to mezi sebou, takže si zvolíme nějaký soubor  $\mathcal{A}$  množin, které hodláme porovnávat. Pro množiny  $M, N \in \mathcal{A}$  pak můžeme zavést relaci  $R$  předpisem  $(M, N) \in R$  právě tehdy, když  $M = N$ . Dostáváme tak relaci na  $\mathcal{A}$ . Formálně jako množina dvojic zapsáno například takto:

$$R = \{(M, N); M, N \in \mathcal{A} \wedge M = N\}.$$

Takto jsme vyhověli definici a udělali to správně, ale v praxi se prostě řekne, že uvažujeme relaci  $M = N$  na souboru množin  $\mathcal{A}$ . Často se  $\mathcal{A}$  dostane tak, že vezmeme nějakou univerzální množinu  $U$  a jako  $\mathcal{A}$  bereme všechny

podmnožiny  $U$ , tedy  $\mathcal{A} = P(U)$ . Pak vlastně porovnáváme všechny množiny, které v univerzu  $U$  dokážeme vytvořit, běžně říkáme, že uvažujeme relaci  $M = N$  na podmnožinách  $U$ .

Podobně můžeme ne zcela správně, ale srozumitelně říct, že uvažujeme relaci  $M \subseteq N$  na souboru množin  $\mathcal{A}$ , formálně bychom to zavedli třeba takto:

$$R = \{(M, N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}; M \subseteq N\}.$$

Ale psát  $MRN$  a překládat si to pokaždé jako  $M \subseteq N$  je opravdu zbytečná ztráta času, proto se to nedělá (je ale důležité vědět, co se za tím srozumitelným značením  $M \subseteq N$  schovává, když na něj budeme chtít aplikovat nějaké relační triky).

△

**! Příklad 3a.d:** Nechť je  $U$  nějaké universum a uvažujme množinu  $\mathcal{A} = P(U)$  všech jeho podmnožin. V kapitole 2c jsme definovali dvě relace na  $\mathcal{A}$ , jmenovitě relaci rovnosti mohutnosti množin  $|M| = |N|$  a relaci  $|M| \leq |N|$ .

△

Ani v případě známých číselných množin a známých vztahů obvykle nedodržíme přesně formální jazyk. Například řekneme „uvažujme relaci  $=$  na  $\mathbb{R}$ “ a míníme tím, že uvažujeme relaci  $R$  na  $\mathbb{R}$  danou podmínkou  $xRy$  právě tehdy, když  $x = y$ . Evidentně by jen komplikovalo naši práci, kdybychom místo  $=$  psali  $R$ .

**Příklad 3a.e:** Nechť  $A$  je množina všech počítačů na světě. Definujeme relaci  $R$  na  $A$  takto:  $aRb$  pro  $a, b \in A$  jestliže jsou spolu  $a, b$  propojeny tak, aby si mohly vyměňovat informace.

△

**Příklad 3a.f:** Nechť  $R$  je relace na množině  $\mathbb{R}$  definovaná podmínkou:  $xRy$  právě tehdy, když  $x + y = 7$ .

Například  $3R4$ , protože  $3 + 4 = 7$ . Také  $8R(-1)$ ,  $\frac{13}{3}R\frac{8}{3}$  nebo třeba  $(7 - \sqrt{99})R\sqrt{99}$ .

Pokud je relace zadána vztahem, který nám není úplně jasný, vyplatí se najít si příklady dvojic, které v dotyčné relaci jsou, a také dvojice, které napak v relaci nejsou.

Formálně bychom napsali

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 7\}.$$

△

### Reprezentace relací.

Často si relace z  $A$  do  $B$  přibližujeme tak, že je znázorníme orientovaným grafem: Nakreslíme prvky množiny  $A$ , prvky množiny  $B$  a za každou dvojici  $(a, b) \in R$  uděláme orientovanou šipku z  $a$  do  $b$ .

Evidentně budeme mít problém, když je některá z množin nekonečná. Jsou nicméně případy, kdy alespoň konečný kus nekonečného grafu ledacos naznačí, reprezentace relací pomocí grafů totiž hovoří přímo k naší intuici.

Jde-li o relaci na  $A$ , tedy z  $A$  do  $A$ , tak je zvykem nakreslit množinu  $A$  jen jednou a do ní vpisovat šipky z  $a$  do  $b$  za dvojice  $(a, b)$  z relace. U příkladu s počítači bychom tak dostali pěkné znázornění propojenosti počítačů.

Relace (s konečnými množinami) se dá také reprezentovat **tabulkou**. Každý prvek z  $A$  má svůj řádek, sloupce jsou pro prvky z  $B$  a pokud relace  $aRb$  existuje, tak uděláme křížek.

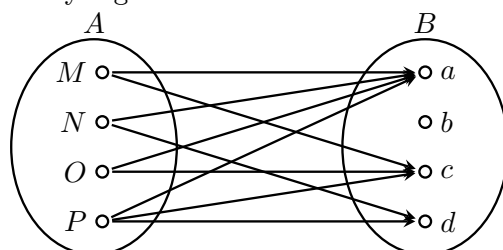
**! Příklad 3a.g:** Uvažujme malou školu se studenty **Mordred**, **Nazgûl**, **Othello** a **Pippin**, škola nabízí kurzy **algoritmizace**, **banalit**, **cyklistiky** a **diskrétní matematiky**. Mordred si zapsal algoritmizaci a cyklistiku, Othello totéž, Nazgûl zkusil algoritmizaci a diskretku a Pippin algoritmizaci, cyklistiku a diskretku.

Zapíšeme to jako relaci. Budeme mít množinu studentů  $A = \{M, N, O, P\}$  a množinu předmětů  $B = \{a, b, c, d\}$ , informace zachytíme v následující relaci  $R$  z  $A$  do  $B$ :

$$R = \{(M, a), (M, c), (N, a), (N, d), (O, a), (O, c), (P, a), (P, c), (P, d)\}.$$

Vyjádření tabulkou a orientovaným grafem:

	$a$	$b$	$c$	$d$
$M$	×		×	
$N$	×			×
$O$	×		×	
$P$	×		×	×



Mimočodem, tato relace není zobrazením, protože některé prvky z  $A$  (jmenovitě všechny) se vyskytují ve více dvojicích.

△

Jak tento příklad naznačuje, relace jsou jedním z možných matematických modelů pro reprezentace databází.

### ! 3a.1 Reprezentace relací v počítačích.

V tabulce výše se dají namísto křížků dělat 0 a 1, čímž vznikne něco jako matice. Matice jsou standardním matematickým objektem, se kterými se v počítačích běžně pracuje, čímž dostáváme jednu z populárních reprezentací relací v počítačích. Když si ale takovou matici představíme, tak si jistě všimneme, že v ní chybí informace o tom, které konkrétní prvky nějaká konkrétní jednička spojuje.

Nedílnou součástí maticového zápisu relace je tedy také domluva, kterému objektu odpovídá který řádek a sloupec matice. Matematicky řečeno, je třeba zvolit očíslování množin  $A$  a  $B$  a pak se ho držet. Když začneme s konkrétními objekty  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  a  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ , tak se stačí odvolávat na jejich indexy, takže vlastně pracujeme s relací z  $\{1, 2, \dots, m\}$  do  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

#### ! Definice.

Nechť  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  a  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  jsou množiny. Pro relaci  $R$  z  $A$  do  $B$  definujeme **matici relace**  $M_R = (m_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$  předpisem

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R; \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

Hned vidíme, že pro relace na množině bude tato matice čtvercová. Protože matice vznikající z relací jsou speciální a budeme se chtít omezit jen na ně, dáme jim také speciální jméno.

#### ! Definice.

Jako **01-matice** budeme označovat matice, které mají pouze prvky 0 či 1.

By a **zero-one matrix** we mean a matrix whose elements are only 0 or 1.

**Příklad 3a.h** (pokračování 3a.g): Vrátime se k naší malé třídě. Pokud zachováme přirozené pořadí studentů

$A = \{M, N, O, P\}$  a předmětů  $B = \{a, b, c, d\}$ , pak se diskutovaná relace zachytí maticí  $M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

△

**Příklad 3a.i:** Uvažujme relaci  $R$  z  $A = \{1, 3, 4\}$  do  $B = \{2, 3, 4, 5\}$  definovanou předpisem  $(a, b) \in R$  právě tehdy, když  $a > b$ . Rozmyslíme si, že pak dostáváme relaci  $R = \{(3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$ .

Jestliže si k ní chceme udělat matici, tak si musíme uvědomit, že při tom používáme pořadového čísla prvku v množině. To například znamená, že dvojice  $(3, 2)$  je vlastně druhý prvek z  $A$  spojený s prvním prvkem z  $B$ , takže se

to v matici objeví jako 1 na pozici  $(2, 1)$ . Podobně si rozmyslíme další dvojice a dostáváme  $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Je to vlastně lehké, je to jako bychom dělali tabulku, představíme si prvky z  $A$  napsané podél levé hrany matice a prvky z  $B$  podél horní hrany matice a pak už je to jasné.

△

Všimněte si, že jsme dostali matici, která je tzv. řídká, tedy má většinou nuly. Pamatovat si takovouto informaci jako matici je plýtváním a stojí za to zvážit jiný způsob uchování v počítači, například jako seznam uspořádaných dvojic, populární je také reprezentace spojovým seznamem. Tyto způsoby mají zase nevýhodu v tom, že maticový zápis si docela dobře rozumí s operacemi nad relacemi a s vlastnostmi relací, zatímco se seznamem dvojic se některé věci dělají hůře. Jako obvykle je to něco za něco, to je ale téma pro kurs o databázích.

**Příklad 3a.j:** Nechť  $A$  je množina všech lidí. Pro  $a, b \in A$  definujeme  $aRb$  jestliže je  $b$  rodič  $a$  (pro rýpaly: pro účely této definice tím míníme, že mu poskytl(a) genetickou informaci).

Zrovna toto je relace, která by měla velice řídkou matici. Pokud bychom tak chtěli zapsat relaci pro Prahu, šlo by o matici s cca milionem řádků i sloupců, tedy asi  $10^{12}$  dat k uložení, ale ve skutečnosti jsou v každém řádku pouze dvě jedničky (či ještě méně, pokud už rodič umřel či není z Prahy), takže ve skutečnosti je to nejvýše cca  $2 \cdot 10^6$  dat. Určitě to tedy bude chtít pro uložení i manipulaci vymyslet nějaký efektivní způsob.

△

### ! 3a.2 Operace

Interakce mezi reálnými objekty se při matematickém vyjádření projeví jako operace a relace nejsou výjimkou. Nechť  $R_1, R_2$  jsou relace z nějaké množiny  $A$  do nějaké množiny  $B$ . Protože  $R_1, R_2$  jsou podmnožiny stejného universa, jmenovitě  $A \times B$ , můžeme na ně aplikovat všechny běžné **množinové operace**. Interpretace bývá většinou jasná na první pohled (přinejhorším na druhý).

! **Příklad 3a.k:** Nechť je  $A$  množina všech měst (v České republice, aby jich nebylo tolik). Nechť  $R_1$  je relace definovaná tak, že  $aR_1b$  právě tehdy, jestli se dá z  $a$  do  $b$  dostat autobusem, a  $R_2$  je relace definovaná tak, že  $aR_2b$  právě tehdy, jestli se dá z  $a$  do  $b$  dostat vlakem.

Pak relace  $R_1 \cup R_2$  udává, zda se dá z  $a$  do  $b$  dostat autobusem či vlakem, relace  $R_1 \cap R_2$  udává, zda se dá z  $a$  do  $b$  dostat vlakem i autobusem, a relace  $R_1 - R_2$  udává, zda se dá z  $a$  do  $b$  dostat autobusem, ale ne vlakem. Relaci  $R_2 - R_1$  si rozmyslíte sami.

△

Co to znamená, že  $R_1 \subseteq R_2$ ? Podle definice to znamená, že platí implikace  $(a, b) \in R_1 \implies (a, b) \in R_2$ , tedy  $aR_1b \implies aR_2b$ . Slovy, jestliže jsou dva prvky v relaci vzhledem k  $R_1$ , pak už jsou nutně i v relaci vzhledem k  $R_2$ . Intuitivně řečeno, relace  $R_1$  je „silnější“ ve smyslu, že už vynucuje tu druhou. Takovéto hierarchie jsou občas zajímavé, třeba relace „býti synem/dcerou“ je podmnožinou relace „býti příbuzný“.

Ještě zbývá operace doplňku, na to je třeba říct, co je vlastně universum. Zde je kandidát jasný, maximální možná relace  $A \times B$ .

#### Definice.

Nechť  $R$  je relace z nějaké množiny  $A$  do nějaké množiny  $B$ . Definujeme její **doplňek** či **komplementární relaci** (**complementary relation**) jako relaci

$$\bar{R} = \{(a, b) \in A \times B; (a, b) \notin R\}.$$

Zjednodušeně řečeno, pokud vnímáme  $aRb$  jako „zná ho“, pak  $a\bar{R}b$  je „nezná ho“.

Je přirozené chtít také relace obracet.

### ! Definice.

Nechť  $R$  je relace z nějaké množiny  $A$  do nějaké množiny  $B$ . Definujeme **relaci inverzní k  $R$** , značeno  $R^{-1}$ , jako relaci z  $B$  do  $A$  danou

$$R^{-1} = \{(b, a); (a, b) \in R\}.$$

Let  $R$  be a relation from a set  $A$  to a set  $B$ . We define its **inverse relation**, denoted  $R^{-1}$ , as the relation from  $B$  to  $A$  defined by

$$R^{-1} = \{(b, a); (a, b) \in R\}.$$

Význam je jasný, podle definice  $bR^{-1}a$  právě tehdy, když  $aRb$ . Jde tedy o obrácení šipek v grafu, například pro relaci  $R$  s dvojicemi (dítě, rodič) bude inverzní relace  $R^{-1}$  obsahovat dvojice (rodič, dítě). Všimněte si, že na rozdíl od zobrazení zde nejsou žádné podmínky na výslednou množinu dvojic, takže obracet můžeme libovolné relace.

#### Příklad 3a.l:

Uvažujme množinu  $A = C^2(\mathbb{R})$  všech reálných funkcí, které mají na  $\mathbb{R}$  spojitě derivace alespoň druhého řádu. Definujme relaci  $R$  na  $A$  podmínkou  $fRg$  pokud  $f' = g$ . Je to tedy relace, která spojuje funkce a jejich derivace, například  $\sin(x)R\cos(x)$  nebo  $x^2R2x$ . Protože je derivace jednoznačně dána, jde také o zobrazení. Rozdíl bude podstatný ve chvíli, kdy zatoužíme tento vztah otočit. Protože více různých funkcí může mít stejnou derivaci, nejde o zobrazení prosté a tudíž k němu neexistuje inverzní zobrazení.

Pokud se ale na tento vztah podíváme jako na relaci, pak problém není a hravě najdeme inverzní relaci  $R^{-1}$ . Podle definice,

$$fR^{-1}g \iff gRf \iff g' = f \iff g \in \int f.$$

Inverzní relace k  $R$  tedy spojuje funkce s jejich primitivními funkcemi.

Relaci samozřejmě vůbec nevádí, že k jedné funkci může být přiřazeno více primitivních funkcí.

△

Zvídavého čtenáře napadne, že se může stát, že potřebujeme aplikovat operaci inverzní relace na nějaký komplikovanější výraz, třeba na relaci  $R \cup S$ . Platí pak nějaká pravidla, která by nám situaci ulehčila, v ideálním případě pomohla získat  $(R \cup S)^{-1}$  čistě na základě znalosti  $R^{-1}$  a  $S^{-1}$ ? Určitě ano, ale jak už jsme psali, není to něco, co bychom se měli učit nazpaměť, spíš je to příležitost si vyzkoušet, zda novým pojmům dobře rozumíme. Jinými slovy, zveme čtenáře k nahlédnutí do cvičení, jmenovitě 3a.5 a 3a.6.

I u relací má smysl je spojovat, pokud na sebe navazují.

### ! Definice.

Nechť  $R$  je relace z nějaké množiny  $A$  do nějaké množiny  $B$  a  $S$  je relace z  $B$  do nějaké množiny  $C$ . Definujeme jejich **složení**  $S \circ R$  jako relaci z  $A$  do  $C$  definovanou pro  $a \in A$ ,  $c \in C$  jako

$$(a, c) \in S \circ R \text{ právě tehdy, když existuje } b \in B: [(a, b) \in R \wedge (b, c) \in S].$$

If  $R$  is a relation from a set  $A$  to a set  $B$  and  $S$  is a relation from  $B$  to a set  $C$ , we define the **composite** of  $R$  and  $S$ , denoted  $S \circ R$ , as the relation consisting of ordered pairs  $(a, c)$  such that there exists  $b \in B$  so that  $(a, b) \in R$  and  $(b, c) \in S$ .

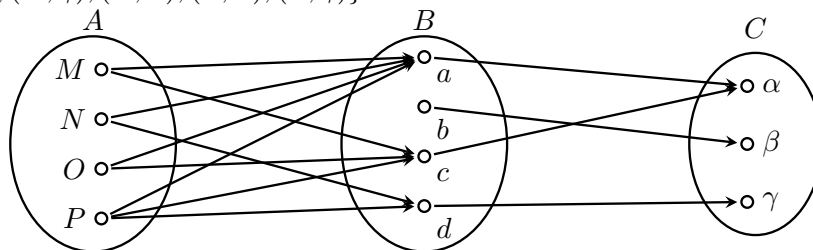
Smysl této operace je jednoduchý. Pokud na sebe dvě relace „navazují“  $A \xrightarrow{R} B \xrightarrow{S} C$ , pak složením vynecháme prostředníka. Zkráceným zápisem: V situaci  $aRb, bSc$  vložíme do složené relace  $S \circ R$  dvojici  $(a, c)$ . Všimněte si, že zase máme obrácené pořadí, při složení  $S \circ R$  se dělá nejdříve  $R$ . Už jsme o tom mluvili u zobrazení, kde pro to byl docela dobrý důvod. Tady ten důvod ovšem odpadá, jedinou omluvou je, že by bylo podivné, kdyby to pro relace bylo jinak než pro zobrazení, která jsou vlastně také relacemi. To je ale chabá výmluva, takže někteří autoři u relací používají „přirozené“ pořadí (tedy naopak než my zde), což je docela zmatek, některé obory computer science si pak raději zavádějí vlastní značení (které má pořadí rozumně), například toto:  $R;S$ . Protože ale žádné z těch značení není vnímáno jako všeobecně přijímané, budeme se (s nechutí) držet toho asi standardního  $S \circ R$ . Jednu věc si ale ulehčíme: Pro navazující kroky  $aRb$  a  $bSc$  budeme prostě psát  $aRbSc$ .

! **Příklad 3a.m** (pokračování 3a.g): Připomeňme, že  $A = \{M, N, O, P\}$  jsou studenti,  $B = \{a, b, c, d\}$  kursy a relace  $R = \{(M, a), (M, c), (N, a), (N, d), (O, a), (O, c), (P, a), (P, c), (P, d)\}$  říká, který student si zapsal jaký kurs.

Teď přidejme množinu učitelů  $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  a relaci  $S = \{(a, \alpha), (b, \beta), (c, \alpha), (d, \gamma)\}$ , která říká, který kurs je učen kterým učitelem.

Dvojice  $(x, z)$  patří do  $S \circ R$  právě tehdy, jestliže existuje kurs  $y$  takový, že si student  $x$  zapsal  $y$  a vyučující  $z$  ho učí. To znamená, že  $S \circ R$  je relace, která přiřazuje vyučující ke studentům. Řečeno jinak, pro zvolené  $x \in A$  nám množina  $\{z \in C; (x, z) \in S \circ R\}$  říká, kdo všechno bude studenta v tomto semestru učit.

Podle řetězky  $MRaSa, MRcSa, NRaSa, NRdS\gamma, ORaSa, ORcSa, PRaSa, PRcSa, PRdS\gamma$  dostáváme  $S \circ R = \{(M, \alpha), (N, \alpha), (N, \gamma), (O, \alpha), (P, \alpha), (P, \gamma)\}$ .



Definovali jsme také inverzní relaci, pro  $R$  dostáváme

$$R^{-1} = \{(a, M), (c, M), (a, N), (d, N), (a, O), (c, O), (a, P), (c, P), (d, P)\},$$

což nám pro určitý kurs říká, kdo na něj chodí.

△

Je zřejmé, že o komutativitě této operace nemůže být řeč už z principu: Základní podmínkou pro skládání je, aby cílová množina první relace byla stejná jako výchozí množina druhé relace, což se ovšem snadno pokazí, když zkusíme pořadí relací zaměnit:  $B \xrightarrow{S} C$ ,  $A \xrightarrow{R} B$ . Ale i v případě, že množiny navazují, ještě nemusí opačné pořadí při složení relací dát totéž. Komutativitu proto u skládání neřešíme.

Kdo přečetl kapitolu 2b, tak už ví, co přijde: Zavedeme skládání více navazujících relací, například tři v situaci  $A \xrightarrow{R} B \xrightarrow{S} C \xrightarrow{T} D$ . Jak už jsme viděli u zobrazení, základním předpokladem, aby to vůbec udělat šlo, je dokázat asociativitu.

**Fakt 3a.3.**

Nechť  $R$  je relace z nějaké množiny  $A$  do nějaké množiny  $B$ ,  $S$  je relace z  $B$  do nějaké množiny  $C$  a  $T$  je relace z  $C$  do nějaké množiny  $D$ . Pak  $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$ .

**Důkaz (rutinní):** 1) Dokážeme, že  $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$ .

Uvažujme  $(a, d) \in (T \circ S) \circ R$ . Podle definice to znamená, že  $\exists b \in B: aRb$  a  $(b, d) \in T \circ S$ . Z toho druhého faktu pak máme, že  $\exists c \in C: bSc$  a  $cTd$ . Z dvojice  $aRb$  a  $bSc$  vyplývá, že  $(a, c) \in S \circ R$ , spolu s  $cTd$  dostaneme  $(a, d) \in T \circ (S \circ R)$ .

2) Opačnou inkluzi dokážeme obdobně. □

Opakovaným použitím tohoto faktu dostaneme například to, že výrazy  $(U \circ T) \circ (S \circ R)$ ,  $((U \circ T) \circ S) \circ R$  či třeba  $U \circ ((T \circ S) \circ R)$  dávají totéž, takže podobně jako u násobení můžeme závorkování vynechat a prostě napsat  $U \circ T \circ S \circ R$ .

Souvislost mezi inverzní relací a skládáním je jako u zobrazení, srovnejte s Větou 2b.6.

**Věta 3a.4.**

Nechť  $R$  je relace z množiny  $A$  do množiny  $B$  a  $S$  je relace z  $B$  do množiny  $C$ . Pak  $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$ .

**Důkaz (rutinní):** Relace  $S \circ R$  jde z  $A$  do  $C$ , takže  $(S \circ R)^{-1}$  jde z  $C$  do  $A$ . To je stejný směr, kterým jde složená relace  $R^{-1} \circ S^{-1}$ , vznikla totiž z řetízku  $C \xrightarrow{S^{-1}} B \xrightarrow{R^{-1}} A$ . Množiny tedy souhlasí a víme, s jakými relacemi budeme pracovat.

Relace jsou množiny dvojic, takže jejich rovnost dokážeme argumentem, že mají stejné prvky (dvojice). Zkusíme to dokázat oběma směry najednou, tedy ekvivalentními kroky.

$(c, a) \in (S \circ R)^{-1}$  právě tehdy, když  $(a, c) \in S \circ R$ , což je právě tehdy, když  $\exists b \in B: aRb$  a  $bSc$ . Podle definice inverzních relací to je právě tehdy, když  $\exists b \in B: cS^{-1}b$  a  $bR^{-1}a$ , což je právě tehdy, když  $(c, a) \in R^{-1} \circ S^{-1}$ . □

**Poznámka o matematice:** Všimněte si, že důkaz poslední Věty byl v zásadě stejný jako důkaz obdobné věty pro zobrazení. Dělalí jsme tedy totéž dvakrát, což naznačuje, že to bylo zbytečné. My totiž víme, že zobrazení jsou speciálním případem relací. Pokud bychom tedy zařadili nejprve tuto kapitolu a kapitolu 2b až po ní, tak už by vzorec  $(S \circ R)^{-1}$  pro zobrazení automaticky vyplynul z toho pro relace.

Dokonce je možné zajít ještě dál. Čtenář možná zná z lineární algebry, že i u matic platí podobný vztah mezi inverzní maticí a násobením matic (prohození pořadí). To naznačuje, že tento jev ve skutečnosti neplyne z nějakého speciálního talentu relací či zobrazení, ale bude za tím nějaký hlubší důvod, obecný princip. Právě hledání skutečných důvodů, tedy prvotních principů, je jedním ze zajímavých úkolů matematiky.

V tomto případě je ono prohazování pořadí konkrétní inkarnací obecného principu, který dokážeme jako Větu 8a.9. Z čistě logického pohledu je tedy to, co zde děláme, mnohdy zbytečné. Správný postup by byl nejprve udělat binární operace (kapitola 8) a tam dokázat vlastnosti pro velice obecnou skupinu objektů, pak udělat kapitoly o relacích, kde některé věty prostě vyplynou přímo z té obecné kapitoly o operacích, a protože jsou relace přeci jen trochu speciální, dokázaly by se i nějaké věci navíc. Nakonec bychom udělali kapitolu o zobrazeních a tam by spousta vět hned zase vyplynula z vět o relacích. Bylo by to celé mnohem kratší, důkazy by byly přehlednější a navíc z matematického pohledu by byla situace jasnější, protože bychom hned viděli, že za některé věci nevděčíme přímo zobrazením (či relacím), ale mnohem obecnějším principům, které relace a zobrazení shodou okolností také sdílejí.

Takto se píší pokročilé knihy pro matematiky, ale začátečník by se ztratil hned v té první obecné kapitole, protože by se ještě neuměl v matematickém jazyce orientovat a hlavně by netušil, co a proč se dělá. Proto jsme i zde věrni zásadám Komenského (od speciálního k obecnému, od jednoduchého ke složitému, od známého k neznámému) čtenáře k onomu abstraktnímu světu spíš pomalu přibližujeme. Vrcholem tohoto snažení bude již zmíněná kapitola o binárních operacích, kde se opravdu vyřádníme ve zcela umělých světech.

△

Lze zapřemýšlet, jaká pravidla platí, když se spolu potkají množinové operace a skládání. Zase tak často se to ale při práci s relacemi nevyskytuje, a když už to člověk potřebuje, tak si (pokud věci rozumí) většinou velice rychle rozmyslí, co platí a co ne. Proto zde nebudeme text přetěžovat tvrzeními a odkážeme čtenáře na cvičení 3a.12. Přemýšlením nad tím, která pravidla platí, si člověk dobře procvičí mozek i kreslení obrázků a lépe pochopí relace a manipulace s nimi.

Docela zajímavé výsledky dostaneme, když zkusíme relaci skládat samu se sebou.

**Definice.**

Nechť  $R$  je relace na nějaké množině  $A$ . Pak definujeme její **mocninu** rekurzivně jako

$$(0) R^1 = R;$$

$$(1) R^{n+1} = R \circ R^n \text{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

Let  $R$  be a relation on some set  $A$ . We define **powers** of  $R$  recursively by  $R^1 = R$  and  $R^{n+1} = R \circ R^n$  for  $n \in \mathbb{N}$ .

Díky asociativitě víme, že je úplně jedno, jak dáme ve výrazu  $R \circ R \circ \dots \circ R$  závorky, takže je ani nebudeme psát.

**! Příklad 3a.n:** Vraťme se k relaci na množině  $A$  všech lidí danou jako  $aRb$  jestliže je  $b$  rodič  $a$ . Co je  $R^2$ ?

Aby  $(a, c) \in R^2$ , musí existovat člověk  $b \in A$  takový, že  $aRb$  a  $bRc$ , tedy  $b$  je rodič  $a$  a  $c$  je rodič  $b$ . Vidíme, že  $R^2$  je relace, která spojuje vnu(č)ky  $a$  s jejich dědy a babičkami  $c$ . Obdobně si rozmyslíme, že  $R^3$  spojuje pravnu(č)ky s prarodiči atd.

△

**Příklad 3a.o:** Uvažujme množinu  $A$  všech autobusových zastávek v Opavě a relace  $R$  nám říká, kam se dostaneme přímým spojením. Přesně,  $aRb$  jestliže existuje linka, která staví nejprve v  $a$  a někdy poté v  $b$ . Pak nám  $R^2$  říká, kam se dostaneme s přesně jedním přestupem,  $R^3$  nám říká, kam se dostaneme s přesně dvěma přestupy, a tak dále. Když to dáme všechno dohromady, tak vidíme, že  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$  je relace, která říká, odkud kam se nějakým způsobem dostaneme autobusem.

△

Naše pozorování o mocnině si teď zformulujeme obecně.

**Lemma 3a.5.** (o cestách)

Nechť  $R$  je relace na nějaké množině  $A$ . Uvažujme prvky  $a, b \in A$ . Pak  $(a, b) \in R^n$  právě tehdy, když existují prvky  $c_1, c_2, \dots, c_{n+1} \in A$  takové, že  $c_1 = a$ ,  $c_{n+1} = b$  a  $(c_i, c_{i+1}) \in R$  pro všechna  $i = 1, \dots, n$ .

Řetězci jako v Lemmatu budeme říkat „trasa délky  $n$  z  $a$  do  $b$ “, někdy jej budeme zapisovat  $aRc_2Rc_3R \dots Rc_nRb$ . Mimochodem, rádi bychom říkali cesta, ale problém je, že v teorii grafů je „cesta“ zavedený pojem, který nepovoluje opakování zastávek, ale zde potřebujeme svobodu volby. Raději jsme zvolili termín trasa, který v teorii grafů vůbec není.

**Důkaz:** Důkaz provedeme indukcí.

(0) Pro  $n = 1$  to platí, protože zvolíme  $c_1 = a$ ,  $c_2 = b$  a je to.

(1) Předpokládejme, že tvrzení o tom, že  $R^n$  je dáno právě trasami o délce  $n$ , platí pro jisté  $n \in \mathbb{N}$ . Chceme ukázat, že platí i pro  $n + 1$ .

1) Vezměme nějaké  $a, b \in A$ . Jestliže  $(a, b) \in R^{n+1}$ , pak podle definice mocniny  $(a, b) \in R \circ R^n$ , což podle definice skládání znamená, že existuje  $x \in A$  s vlastností  $(a, x) \in R^n$  a  $xRb$ . Teď aplikujeme indukční předpoklad na dvojici  $(a, x) \in R^n$  a dostaneme trasu délky  $n$  neboli prvky  $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{n+1} \in A$  takové, že  $\tilde{c}_1 = a$ ,  $\tilde{c}_{n+1} = x$  a  $\tilde{c}_i R c_{i+1}$  pro všechna  $i$ . Definujeme prvky  $c_i$  takto:  $c_i = \tilde{c}_i$  pro  $i = 1, \dots, n + 1$  a  $c_{n+2} = b$ . Pak zjevně  $c_i$  splňují nároky na ně kladené, tedy tvoří trasu délky  $n + 1$  z  $a$  do  $b$ . Takže prvky z  $R^{n+1}$  jsou opravdu dány trasami.

2) Předpokládejme naopak, že existují prvky  $c_1, \dots, c_{n+2} \in A$  takové, že  $c_1 = a$ ,  $c_{n+2} = b$  a  $c_i R c_{i+1}$  pro všechna  $i = 1, \dots, n + 1$ . Označme  $x = c_{n+1}$ . Pak řetězec  $c_1, \dots, c_{n+1}$  splňuje požadavky z tvrzení o trasách pro délku  $n$  z  $a$  do  $x$ , proto podle indukčního předpokladu  $(a, x) \in R^n$ . Víme také, že  $(x, b) = (c_{n+1}, c_{n+2}) \in R$ . Podle definice skládání tedy  $(a, b) \in R \circ R^n = R^{n+1}$ .

V částech 1) a 2) jsme dokázali, že existence trasy délky  $n + 1$  z  $a$  do  $b$  je ekvivalentní tomu, že  $(a, b) \in R^{n+1}$ , čímž je indukční krok hotov. □

Uděláme si teď formálně i to pozorování o relaci udávající všechna možná spojení. Je totiž důležitá a má své vlastní jméno.

**Definice.**

Nechť  $R$  je relace na nějaké množině  $A$ . Definujeme její **connectivity relation** jako  $R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ .

Dostali jsme se k ní u autobusů, ale je evidentní, že to má aplikace i v mnoha jiných oborech, například jestliže relace  $R$  udává, které počítače jsou navzájem přímo spojeny, pak  $R^*$  je relace udávající, které počítače se dokážou spolu domluvit, pokud uvažujeme i spojení přes prostředníky.

Dobrá otázka samozřejmě je, jak toto dělat v praxi, kde jsou nekonečna trochu problém. Dá se ukázat, že pokud má množina  $A$   $m$  prvků, pak se dá libovolná trasa (viz Lemma o cestách) zkrátit tak, aby nebyla delší než  $m$ .

To znamená, že dostaneme  $R^* = \bigcup_{n=1}^m R^n$ , což (pokud to děláme přes reprezentující matice a maticovou mocninu) vyžaduje hrůzných  $2m^3(m-1)$  operací. Existuje algoritmus, který to zvládne za  $2m^3$  operací, což je pořád ještě docela dost, ale o řád lepší než přímý útok. Tím už se ale dostáváme nebezpečně blízko k algoritmizaci, tak to vysvětlování necháme odborníkům.

Co se od takové mocniny  $R^n$  dá čekat? V zásadě cokoliv. Všimněte si například, že nikde není zaručeno, že v  $R \circ R$  zůstanou původní dvojice z  $R$ . Ze prvků  $(a, b) \in R$  se do  $R \circ R$  dostanou jen ty, u kterých lze trasu  $a \mapsto b$  udělat i přes prostředníka  $aRxB$ . Klidně se může stát, že začneme s relativně bohatou relací, ale po umocnění už zbyde velice málo.

Jednoduchý extrémní příklad: Uvažujme relaci  $R$  na množině  $A = \{1, 2, 3\}$  danou jako  $R = \{(1, 2), (3, 2)\}$ . Pak nelze vytvořit žádný navazující řetězec  $aRbRc$ , takže  $R^2 = \emptyset$ .

Je ovšem také možný jev přesně opačný: Začneme s relací, párkrát umocníme a dostaneme maximální možnou relaci  $A \times A$ , kdy je každý s každým v relaci. Někdy se stane, že se výsledek s každou mocninou změní, jindy zase po určité mocnině již k ničemu novému nedojdeme a všechny další mocniny vypadají stejně. Jsou dokonce relace, které se umocňováním vůbec nemění, viz například Věta 3b.6.

Velikost mocniny tedy v jistém smyslu říká, jak dobře na sebe dvojice v  $R$  navazují. Někdy hodně napoví už prvním skládáním.

### Fakt 3a.6.

Nechť  $R$  je relace na nějaké množině  $A$ . Jestliže  $R^2 \subseteq R$ , pak  $R^n \subseteq R$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ .

**Důkaz** (poučný): Předpokládejme, že platí  $R^2 \subseteq R$ . Důkaz inkluze  $\forall n \in \mathbb{N}: R^n \subseteq R$  provedeme indukcí.

(0) Pro  $n = 1$  máme zkoumat inkluzi  $R \subseteq R$ , ta evidentně platí.

(1) Uvažujme libovolné  $n \in \mathbb{N}$  a předpokládejme, že  $R^n \subseteq R$ . Chceme dokázat, že  $R^{n+1} \subseteq R$ .

Nechť  $(a, b) \in R^{n+1}$ . Protože  $R^{n+1} = R \circ R^n$ , musí existovat  $x \in A$  takové, že  $(a, x) \in R^n$  a  $(x, b) \in R$ . Podle indukčního předpokladu ovšem také  $(a, x) \in R$ , proto jak  $(a, x)$ , tak  $(x, b)$  leží v  $R$ . Proto  $(a, b) \in R^2$ , tedy podle předpokladu tvrzení také  $(a, b) \in R$ . □

Na závěr ještě jedna definice.

### ! Definice.

Nechť  $R$  je relace na množině  $A$ , nechť  $B \subseteq A$ . Definujeme restrikcí  $R$  na  $B$  jako relaci  $R \cap (B \times B)$ .

Je to velice jednoduché, z relace  $R$  prostě vyhodíme všechny dvojice, ve kterých se objevují prvky mimo  $B$ . Řečeno jinak, označíme-li tuto restrikcí  $S$ , pak pro prvky  $a, b \in B$  platí  $aSb$  přesně tehdy, platí-li pro ně  $aRb$ . Z toho důvodu se také nezavádí pro restrikcí nějaké speciální značení, je to prostě pořád  $R$ , jen ji používáme pouze na některé prvky. Čtenář to zná již dávno, například máme relaci  $x \leq y$  na  $\mathbb{R}$ , ale můžeme ji používat třeba jen pro celá čísla.

### ! 3a.7 Operace a reprezentace

Pro relaci  $R$  z konečné množiny  $A$  do konečné množiny  $B$  jsme zavedli její reprezentaci odpovídající 01-maticí  $M_R$ . Jak se operace, které jsme právě probrali, odrazí v řeči matic? Velice pěkně.

### ! Fakt 3a.8.

Uvažujme relaci  $R$  z množiny  $A$  do množiny  $B$  s reprezentující maticí  $M_R$ .

(i) Relace  $R^{-1}$  je reprezentovaná transponovanou maticí  $M_R^T$ .

(ii) Relace  $\bar{R}$  je reprezentovaná maticí danou  $m_{\bar{R},ij} = 1 - m_{R,ij}$ .

Zde je důležité si uvědomit, že matice  $M$  závisí silně na tom, jak si prvky množin  $A$  a  $B$  očíslováme. V tomto Faktu i následujících obdobných situacích tedy předpokládáme, že zachováváme jedno pevně zvolené číslování prvků  $A$  a  $B$ .



**Důkaz (rutinní):** (i): Předpokládejme, že  $|A| = m$  a  $|B| = n$ , takže  $M_R$  je matice  $m \times n$ . Relace  $R^{-1}$  jde z  $B$  do  $A$ , proto bude mít její matice rozměr  $n \times m$ , což  $M_{R^{-1}}$  má. Teď ukážeme shodnost prvků matic.

Protože matice  $M_{R^{-1}}$  a  $M_R$  obsahují pouze jedničky a nuly, tak stačí dokázat, že se shodují jedničky, a nuly už budou automaticky také souhlasit. Takže:

$$m_{R^{-1},ij} = 1 \iff (b_i, a_j) \in R^{-1} \iff (a_j, b_i) \in R \iff m_{R,ji} = 1.$$

Důkaz (ii) je snadný a necháme jej jako cvičení 3a.11. □

Teď se podíváme na operace, které spojují dvě relace. K nim budeme potřebovat operace spojující dvě matice, již při zběžném pohledu je ale zřejmé, že nemá smysl zkoušet ty běžné. My teď totiž pracujeme jen s 01-maticemi, ale například sčítání je schopné vyrobít ve výsledné matici i jiná čísla než 0 a 1. Ke správnému nápadu nás navede, když si uvědomíme, že ty 0 a 1 vlastně reprezentují logické hodnoty (pravda, nepravda), konkrétně  $m_{ij}$  označuje pravdivostní hodnotu výroku „ $(a_i, b_j) \in R$ “. Má tedy smysl používat operace založené na operacích logických (Booleanovských).

#### Definice.

Nechť  $A, B, C$  jsou 01-matice typu  $m \times n$ .

Řekneme, že  $C$  je **join** matic  $A$  a  $B$ , značeno  $C = A \vee B$ , jestliže  $c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$  pro všechna  $i, j$ .

Řekneme, že  $C$  je **meet** matic  $A$  a  $B$ , značeno  $C = A \wedge B$ , jestliže  $c_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}$  pro všechna  $i, j$ .

Není těžké ukázat, že tyto operace jsou komutativní a asociativní a spojuje je distributivní zákon:

- $A \vee B = B \vee A$ ,  $A \wedge B = B \wedge A$ ;
- $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ ,  $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ ;
- $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ ,  $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ .

Databázové systémy (třeba i SAP) mívají tyto operace implementovány.

#### Fakt 3a.9.

Nechť  $R_1, R_2$  jsou relace z  $A$  do  $B$  s maticemi  $M_1, M_2$ . Pak  $M_1 \wedge M_2$  je matice relace  $R_1 \cap R_2$  a  $M_1 \vee M_2$  je matice relace  $R_1 \cup R_2$ .

Potřebujeme ještě jednu operaci.

#### Definice.

Nechť  $A$  je 01-matice typu  $m \times k$  a  $B$  je 01-matice typu  $k \times n$ . Definujeme **Booleanovský součin (Boolean product)** těchto matic jako matici  $C = A \odot B$  typu  $m \times n$  danou

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \dots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj}).$$

Všimněte si, že je to vlastně stejné jako vzorec pro běžné maticové násobení, jen se místo násobení dala konjunkce a místo sčítání disjunkce.

#### Věta 3a.10.

Nechť  $A, B, C$  jsou konečné množiny,  $R$  je relace z  $A$  do  $B$  s maticí  $M_R$  a  $S$  je relace z  $B$  do  $C$  s maticí  $M_S$ . Pak  $M_{R \circ S} = M_R \odot M_S$  je matice relace  $S \circ R$ .

**Důkaz (z povinnosti):** Předpokládejme, že  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ ,  $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ ,  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ . Pak  $M_R$  je matice  $m \times k$  a  $M_S$  je matice  $k \times n$ , proto má smysl je násobit  $M_R \odot M_S$ . Dále máme  $m_{R,il} = 1$  jestliže  $a_i R b_l$  a  $m_{S,lj} = 1$  jestliže  $b_l S c_j$ .

Ukážeme, že  $M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$ . Protože jde o 01-matice, stačí ukázat, že obě matice mají 1 na stejných místech.

Vezměme prvek  $m_{ij}$  matice  $M_R \odot M_S$ . Tento prvek je 1 právě tehdy, jestliže je

$$(m_{R,i1} \wedge m_{S,1j}) \vee (m_{R,i2} \wedge m_{S,2j}) \vee \dots \vee (m_{R,ik} \wedge m_{S,kj}) = 1.$$

Jde o logickou disjunkci mnoha členů, ta je rovna jedné právě tehdy, když existuje  $l \in \{1, \dots, k\}$  takové, že  $m_{R,il} \wedge m_{S,lj} = 1$ , tedy  $\exists l \in \{1, \dots, k\}: (m_{R,il} = 1 \wedge m_{S,lj} = 1)$ . To je podle definice těchto matic právě tehdy, pokud  $\exists b_l \in B: (a_i R b_l \wedge b_l S c_j)$ . Toto zase nastane právě tehdy, pokud  $(a_i, c_j) \in S \circ R$ , což je právě tehdy, pokud

$m_{S \circ R, ij} = 1$ . Rovnost matic je dokázána. □

Booleanovský součin je tedy ta správná operace. Má všechny vlastnosti jako běžné maticové násobení:

- $(M \odot N) \odot P = M \odot (N \odot P)$ ;
- $M \odot (N \wedge P) = (M \odot N) \wedge (M \odot P)$  a  $M \odot (N \vee P) = (M \odot N) \vee (M \odot P)$ ;
- není obecně komutativní.

Dokonce má i jednotkový prvek, jmenovitě standardní jednotkovou  $n \times n$  matici  $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ .

Platí tedy následující:

- Jestliže je  $A$  nějaká 01-matice typu  $m \times n$ , pak  $A \odot E_n = E_m \odot A = A$ .

Když máme asociativitu, obvykle toho využijeme k definování mocniny.

#### Definice.

Nechť  $A$  je čtvercová 01-matice  $n \times n$ .

Definujeme její Booleanovské mocniny rekurzí jako  $A^{[0]} = E_n$  a  $A^{[n+1]} = A \odot A^{[n]}$  pro  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Z předchozí věty pak okamžitě máme následující tvrzení.

#### Důsledek 3a.11.

Nechť  $R$  je relace na množině  $A$  a  $M_R$  její matice. Pak pro  $n \in \mathbb{N}$  platí  $M_{R^n} = M_R^{[n]}$ .

U relací na konečných množinách se tedy dá hodně věcí udělat pomocí maticových operací. Nejde ale o nástroj univerzální. Matice jsou jednak drahé na paměť (o tom už jsme mluvili), ale hlavně náročné na výpočetní výkon, zejména násobení je opravdu výpočetně drahá operace. Pokud je tedy relace řídká, vyplatí se hledat efektivní algoritmy pro práce s nimi či někdy dokonce zvážit zcela jiné metody uložení relace. Mimochodem i v mnoha dalších oborech se musí pracovat s velkými maticemi a lidé si musí najít svůj způsob, jak si ekonomicky poradit s těmi řídkými.

## Cvičení

**Cvičení 3a.1** (rutinní): Uvažujme relace na množině  $A = \{0, 2, 4, 6\}$  definované pro  $a, b \in A$  takto:

- (i)  $aR_0b$  jestliže  $a < b$ ;                      (ii)  $aR_1b$  jestliže  $a + 10 < 3b$ ;                      (iii)  $aR_2b$  jestliže  $2a \leq b$ .

Pro každou z nich napište danou relaci (tedy jako množinu s výpisem prvků), nakreslete její graf a napište její reprezentující matici. Pak pro každou z nich najděte inverzní relaci. Na závěr najděte  $R_1 \cup R_2$ ,  $R_1 \cap R_2$ ,  $R_1 - R_2$  a  $R_2 - R_1$ .

**Cvičení 3a.2** (rutinní, poučné): Uvažujme relaci  $R$  z množiny  $A = \{1, 7, 8, 10, 20\}$  do množiny  $B = \{a, d, s, t\}$  definovanou pro  $a \in A$  a  $b \in B$  takto:  $(a, b) \in R$  jestliže se písmeno  $b$  objeví ve slovním vyjádření čísla  $a$ .

Napište danou relaci (tedy jako množinu s výpisem prvků) a nakreslete její graf, pak najděte její reprezentující matici a na závěr její inverzní relaci.

**Cvičení 3a.3** (rutinní): Uvažujme množinu  $A$  studentů a množinu  $B$  učitelů určitého ústavu (vzdělávacího). Pro  $a \in A$ ,  $b \in B$  definujme relaci  $R$  předpisem  $aRb$  jestliže  $a$  měl učitele  $b$  na přednášku a relaci  $S$  předpisem  $aSb$  jestliže měl  $a$  učitele  $b$  na cvičení. Interpretujte relace  $R \cup S$ ,  $R \cap S$ ,  $R - S$ ,  $\overline{R}$  a  $\overline{R \cup S}$ .

**Cvičení 3a.4** (rutinní): Uvažujme množinu  $A$  studentů a množinu  $B$  právě nabízených předmětů. Pro  $a \in A$ ,  $b \in B$  definujme relaci  $R_1$  předpisem  $aR_1b$  jestliže si student  $a$  v tomto semestru zapsal předmět  $b$  a relaci  $R_2$  předpisem  $aR_2b$  jestliže student  $a$  v tomto semestru dostal kredit za absolvování předmětu  $b$ . (Předpokládáme, že tuto relaci děláme na konci semestru, kdy již proběhly zkoušky.)

- a) Jak se tvrzení „platí  $R_2 \subseteq R_1$ “ řekne českou větou?  
b) Interpretujte relace  $R_1 \cap R_2$ ,  $R_1 \cup R_2$ ,  $R_1 - R_2$ ,  $R_2 - R_1$ ,  $R^{-1}$ .

**Cvičení 3a.5** (poučné, zkouškové): Nechť  $R$  je relace z množiny  $A$  na množinu  $B$ . Dokažte, že  $(R^{-1})^{-1} = R$ .

**Cvičení 3a.6** (rutinní, zkouškové): Nechť  $R, S$  jsou relace z množiny  $A$  do množiny  $B$ . Dokažte, že pak

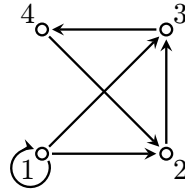
- (i)  $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$ ;                      (ii)  $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$ ;                      (iii)  $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$ .

**Cvičení 3a.7** (rutinní): Uvažujme dvě relace na množině  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , relaci  $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (3, 4)\}$  a relaci  $S = \{(1, 4), (1, 3), (4, 3), (3, 2)\}$ .

Najděte relace  $S \circ R$  a  $R \circ S$ .

**Cvičení 3a.8** (rutinní):

Uvažujte relaci danou následujícím grafem: Zapište ji seznamem prvků a najděte  $R^2$ .



**Cvičení 3a.9** (dobré): Nechť  $A$  je množina lidí. Definujme relaci  $R$  na  $A$  předpisem  $aRb$  jestliže je  $a$  rodič  $b$  a relaci  $S$  předpisem  $aRb$  jestliže je  $a$  sourozencem  $b$ . Co je  $S \circ R$  a  $R \circ S$ ?

Poznámka: Definujeme „sourozence“ jako ty lidi, kteří mají společné oba rodiče. To mimo jiné znamená, že každý je sám sobě sourozencem.

Pokud bychom sourozence definovali jinak, pak by se změnil i výsledek těch skládání. Zkuste prozkoumat jiné zajímavé definice.

**Cvičení 3a.10** (rutinní, poučné, \*dobré): Uvažujme následující relace na  $\mathbb{R}$ :  $R_1$  je relace  $>$ ,  $R_2$  je relace  $\geq$ ,  $R_3$  je relace  $=$ ,  $R_4$  je relace  $\neq$ ,  $R_5$  je relace  $<$ ,  $R_6$  je relace  $|x| = |y|$ .

Určete, čemu se rovnají složené relace

- |                         |                        |                           |
|-------------------------|------------------------|---------------------------|
| (i) $R_2 \circ R_1$ ;   | (iv) $R_1 \circ R_4$ ; | (vii)* $R_4 \circ R_4$ ;  |
| (ii) $R_1 \circ R_2$ ;  | (v) $R_1 \circ R_5$ ;  | (viii)* $R_1 \circ R_6$ ; |
| (iii) $R_1 \circ R_3$ ; | (vi) $R_2 \circ R_2$ ; | (ix)* $R_6 \circ R_1$ .   |

**Cvičení 3a.11** (rutinní): Uvažujme relaci  $R$  na množině  $A$  s reprezentující maticí  $M_R$ . Dokažte, že relace  $\bar{R}$  je reprezentovaná maticí danou  $m_{\bar{R},ij} = 1 - m_{R,ij}$ .

**Cvičení 3a.12** (poučné, zkouškové až drsné):

a) Nechť  $S$  je relace z množiny  $A$  do množiny  $B$ , necht'  $R_1, R_2$  jsou relace z  $B$  do množiny  $C$ . Dokažte, že pak

- $(R_1 \cup R_2) \circ S = (R_1 \circ S) \cup (R_2 \circ S)$ ;
- $(R_1 \cap R_2) \circ S \subseteq (R_1 \circ S) \cap (R_2 \circ S)$ ;
- $(R_1 \circ S) - (R_2 \circ S) \subseteq (R_1 - R_2) \circ S$ .

b) Nechť  $R_1, R_2$  jsou relace z množiny  $A$  do množiny  $B$ , necht'  $S$  je relace z  $B$  do množiny  $C$ . Dokažte, že pak

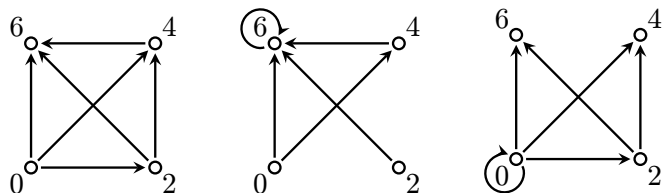
- $S \circ (R_1 \cup R_2) = (S \circ R_1) \cup (S \circ R_2)$ ;
- $S \circ (R_1 \cap R_2) \subseteq (S \circ R_1) \cap (S \circ R_2)$ ;
- $(S \circ R_1) - (S \circ R_2) \subseteq S \circ (R_1 - R_2)$ .

**Řešení:**

**3a.1:**  $R_0 = \{(0, 2), (0, 4), (0, 6), (2, 4), (2, 6), (4, 6)\}$ ,  $R_0^{-1} = \{(2, 0), (4, 0), (6, 0), (4, 2), (6, 2), (6, 4)\}$ ;

$R_1 = \{(0, 4), (0, 6), (2, 6), (4, 6), (6, 6)\}$ ,  $R_1^{-1} = \{(4, 0), (6, 0), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$ ;

$R_2 = \{(0, 0), (0, 2), (0, 4), (0, 6), (2, 4), (2, 6)\}$ ,  $R_2^{-1} = \{(0, 0), (2, 0), (4, 0), (6, 0), (4, 2), (6, 2)\}$ .



$$M_{R_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{R_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$R_1 \cup R_2 = \{(0, 0), (0, 2), (0, 4), (0, 6), (2, 4), (2, 6), (4, 6), (6, 6)\}$ ,  $R_1 \cap R_2 = \{(0, 4), (0, 6), (2, 6)\}$ ,

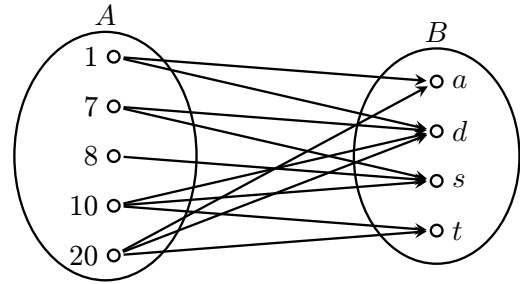
$R_1 - R_2 = \{(4, 6), (6, 6)\}$ ,  $R_2 - R_1 = \{(0, 0), (0, 2), (2, 4)\}$ .

**3a.2:**

$$R = \{(1, a), (1, d), (7, d), (7, s), (8, s), (10, d), (10, s), (10, t), \\ (20, a), (20, d), (20, t)\}$$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{-1} = \{(a, 1), (a, 20), (d, 1), (d, 7), (d, 10), (d, 20), \\ (s, 7), (s, 8), (s, 10), (t, 10), (t, 20)\}$$



**3a.3:**  $R \cup S$ :  $a$  potkal  $b$  coby vyučujícího,  $R \cap S$ :  $a$  měl  $b$  jako cvičícího i přednášejícího,  $R - S$ :  $a$  měl  $b$  jako přednášejícího, ale ne cvičícího,  $\bar{R}$ :  $a$  neměl  $b$  jako přednášejícího,  $\overline{R \cup S}$ :  $a$  vůbec oficiálně neměl  $b$ , takže může předstírat, že ho nezná, a nemusí ho zdravit.

**3a.4:** (i): Třeba: Kredit je možné získat jen pro zapsaný předmět.

**3a.5:** Necht'  $a \in A, b \in B$ .  $(a, b) \in (R^{-1})^{-1} \iff (b, a) \in R^{-1} \iff (a, b) \in R$ .

**3a.6:** (i): Necht'  $a \in A, b \in B$ .  $(b, a) \in (R \cup S)^{-1} \iff (a, b) \in R \cup S \iff [(a, b) \in R \vee (a, b) \in S] \iff [(b, a) \in R^{-1} \vee (b, a) \in S^{-1}] \iff (b, a) \in R^{-1} \cup S^{-1}$ ;

(ii): Necht'  $a \in A, b \in B$ .  $(b, a) \in (R \cap S)^{-1} \iff (a, b) \in R \cap S \iff [(a, b) \in R \wedge (a, b) \in S] \iff [(b, a) \in R^{-1} \wedge (b, a) \in S^{-1}] \iff (b, a) \in R^{-1} \cap S^{-1}$ ;

(iii): Necht'  $a \in A, b \in B$ .  $(b, a) \in (R - S)^{-1} \iff (a, b) \in R - S \iff [(a, b) \in R \wedge (a, b) \notin S] \iff [(b, a) \in R^{-1} \wedge (b, a) \notin S^{-1}] \iff (b, a) \in R^{-1} - S^{-1}$ .

**3a.7:** Najdeme řetězce  $1R1S3, 1R1S4, 1R4S3, 2R1S3, 2R1S4, 3R4S3$ , proto

$$S \circ R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3)\};$$

najdeme řetězce  $1S3R4, 3S2R1, 4S3R4$ , proto  $R \circ S = \{(1, 4), (3, 1), (4, 4)\}$ .

**3a.8:**  $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 2)\}$ ;  $R^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 2), (4, 3)\}$ .

**3a.9:**  $S \circ R$ :  $a$  je strýc/teta nebo rodič  $b$ . Pokud změňme definici  $S$  tak, aby  $S$  nebylo reflexivní (třeba přidáme podmínku  $a \neq b$ ), pak  $S \circ R$ :  $a$  je strýc/teta  $b$ .

$R \circ S$ :  $a$  je rodič sourozence  $b$ . Lépe to nejde, tento člověk nemusí být v žádném vztahu k  $b$  (rodinné komplikace).

**3a.10:** (i):  $(x, z) \in R_2 \circ R_1 \iff \exists y: xR_1y \wedge yR_2z \iff \exists y: x > y \wedge y \geq z \iff x > z$ , tedy  $R_2 \circ R_1 = R_1$ ; (ii):  $R_1$ ; (iii):  $R_1$ ; (iv):  $(x, z) \in R_1 \circ R_4 \iff \exists y: x \neq y \wedge y > z$ , to lze pro libovolnou dvojici  $(x, y)$ , proto  $R_1 \circ R_4 = \mathbb{R}^2$ ; (v):  $\mathbb{R}^2$ ; (vi):  $R_2$ ; (vii):  $\mathbb{R}^2$ ; (viii):  $\{(x, z); |x| < z \vee -|x| < z\}$ ; (ix):  $\{(x, z); x < |z|\}$ .

**3a.11:**  $m_{\bar{R},ij} = 1 \iff (a_i, a_j) \in \bar{R} \iff (a_i, a_j) \notin R \iff m_{R,ij} = 0$ , obdobně  $m_{\bar{R},ij} = 0 \iff m_{R,ij} = 1$ .

**3a.12:** Necht'  $a \in A, c \in C$ .

a)(i): 1)  $(R_1 \cup R_2) \circ S \subseteq (R_1 \circ S) \cup (R_2 \circ S)$ :  $(a, c) \in (R_1 \cup R_2) \circ S \implies \exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_1 \cup R_2] \implies \exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge ((b, c) \in R_1 \vee (b, c) \in R_2)]$

$\implies \exists b \in B: [((a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_1) \vee ((a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_2)] \implies (\exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_1]) \vee (\exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_2]) \implies [(a, c) \in R_1 \circ S \vee (a, c) \in R_2 \circ S] \implies (a, c) \in (R_1 \circ S) \cup (R_2 \circ S)$ ;

2)  $(R_1 \circ S) \cup (R_2 \circ S) \subseteq (R_1 \cup R_2) \circ S$ :  $(a, c) \in (R_1 \circ S) \cup (R_2 \circ S) \implies [(a, c) \in (R_1 \circ S) \vee (a, c) \in (R_2 \circ S)] \implies [\exists b_1 \in B: ((a, b_1) \in S \wedge (b_1, c) \in R_1) \vee \exists b_2 \in B: ((a, b_2) \in S \wedge (b_2, c) \in R_2)] \implies \exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_1 \cup R_2] \implies (a, c) \in (R_1 \cup R_2) \circ S$ .

a)(ii):  $(a, c) \in (R_1 \cap R_2) \circ S \implies \exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_1 \cap R_2] \implies \exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge ((b, c) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2)] \implies \exists b \in B: [((a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_1) \wedge ((a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_2)] \implies$

$(\exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_1]) \wedge (\exists b \in B: [(a, b) \in S \wedge (b, c) \in R_2]) \implies [(a, c) \in R_1 \circ S \wedge (a, c) \in R_2 \circ S] \implies (a, c) \in (R_1 \circ S) \cap (R_2 \circ S)$ ;

Poznámka: Rovnost nastat nemusí, třeba pro  $S = \{(a, b_1), (a, b_2)\}$ ,  $R_1 = \{(b_1, c)\}$ ,  $R_2 = \{(b_2, c)\}$ , kde  $b_1 \neq b_2$ , dostáváme  $(R_1 \cap R_2) \circ S = \emptyset \circ S = \emptyset$ , ale  $(R_1 \circ S) \cap (R_2 \circ S) = \{(a, c)\}$ .

a)(iii):  $(R_1 \circ S) - (R_2 \circ S) \subseteq (R_1 - R_2) \circ S$ :  $(a, c) \in (R_1 \circ S) - (R_2 \circ S)$

$\implies [(a, c) \in (R_1 \circ S) \wedge (a, c) \notin (R_2 \circ S)]$

$\implies [\exists b_1 \in B: ((a, b_1) \in S \wedge (b_1, c) \in R_1) \wedge \neg \exists b_2 \in B: ((a, b_2) \in S \wedge (b_2, c) \in R_2)]$

$\implies \exists b_1 \in B: [(a, b_1) \in S \wedge (b_1, c) \in R_1 \wedge (b_1, c) \notin R_2] \implies \exists b_1 \in B: [(a, b_1) \in S \wedge (b_1, c) \in R_1 - R_2]$

$\implies (a, c) \in (R_1 - R_2) \circ S$ .

Poznámka: Rovnost nastat nemusí, třeba pro  $S = \{(a, b_1), (a, b_2)\}$ ,  $R_1 = \{(b_1, c)\}$ ,  $R_2 = \{(b_2, c)\}$ , kde  $b_1 \neq b_2$ , dostáváme  $(R_1 - R_2) \circ S = \{(a, c)\}$ , ale  $(R_1 \circ S) \cap (R_2 \circ S) = \{(a, c)\} - \{(a, c)\} = \emptyset$ .

b) Důkazy jsou obdobné.

### 3b. Základní vlastnosti binárních relací

Zde se omezíme pouze na relace na množině  $A$ . Používají se často a lidé si brzy všimlí, že velice ocení, pokud se u zpracovávané relace mohou spolehnout na určité způsoby fungování, jinak řečeno, pokud dotyčná relace zachovává určitá pravidla. Dali jim jména a vznikly z toho populární vlastnosti relací. Je jich hodně, ale nejčastěji se zkoumají tyto čtyři:

#### ! Definice.

Nechť  $R$  je relace na množině  $A$ .

Řekneme, že  $R$  je **reflexivní**, jestliže pro všechna  $a \in A$  platí  $aRa$ .

Řekneme, že  $R$  je **symetrická**, jestliže pro všechna  $a, b \in A$  platí  $aRb \implies bRa$ .

Řekneme, že  $R$  je **antisymetrická**, jestliže pro všechna  $a, b \in A$  platí  $(aRb \wedge bRa) \implies a = b$ .

Řekneme, že  $R$  je **tranzitivní**, jestliže pro všechna  $a, b, c \in A$  platí  $(aRb \wedge bRc) \implies aRc$ .

V anglické verzi si procvičíme ten druhý zápis relací.

Consider a relation  $R$  on a set  $A$ .

It is called **reflexive** if  $(a, a) \in R$  for all  $a \in A$ .

It is called **symmetric** if for all  $a, b \in A$  we have  $(a, b) \in R \implies (b, a) \in R$ .

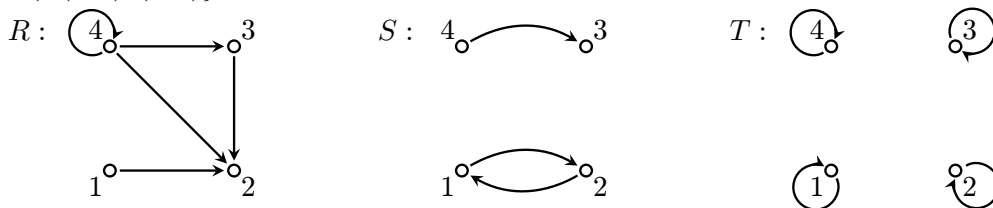
It is called **antisymmetric** if for all  $a, b \in A$  we have  $[(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R] \implies a = b$ .

It is called **transitive** if for all  $a, b, c \in A$  we have  $[(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R] \implies (a, c) \in R$ .

Poznamenejme, že někteří čeští autoři používají namísto „antisymetrie“ termínu „slabá antisymetrie“, pro silnou viz část 3c.8 Další vlastnosti.

! Významu těchto definic nejlépe porozumíme, když se podíváme na několik relací na konečných množinách, které si znázorníme grafy. Uvažujme proto následující tři relace na množině  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ :

- $R = \{(1, 2), (3, 2), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ ;
- $S = \{(1, 2), (2, 1), (4, 3)\}$ ;
- $T = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ .



**Reflexivita** je jasná, aby byla relace reflexivní, musí být každý prvek množiny  $A$  v relaci sám se sebou (reflexe = odraz třeba v zrcadle), což snadno ověříme ve výpisu dvojic výše, vyhovuje jen relace  $T$ . V grafu to znamená, že pro reflexivitu vyžadujeme smyčky u všech bodů, což opravdu splňuje právě  $T$ .

**Symetrie** znamená podívat se na všechny možné dvojice prvků z  $A$  a pro každou z nich ověřit platnost jisté vlastnosti, která má formu implikace. To znamená, že pokud není splněn její předpoklad, tedy pokud prvky  $a, b$  nejsou v spolu relaci, pak se implikace již nemůže pokazit a tudíž takoveto případy nerozhodují o platnosti symetrie, nemusíme je zkoumat. Kritické je, co se stane s dvojicemi, kdy  $(a, b) \in R$ . U těchto dvojic pak potřebujeme, aby v  $R$  byla i dvojice v opačném pořadí.

U relace  $R$  se tedy budeme ptát třeba na dvojici  $a = 1$  a  $b = 2$ , která splňuje předpoklad  $1R2$ , ale nesplňuje závěr  $2R1$ . Implikace proto pro tuto dvojici neplatí. Na symetrii ale potřebujeme platnost pro všechny dvojice (je tam použit obecný kvantifikátor), takže se tato konkrétní dvojice stává protipříkladem a relace  $R$  není symetrická.

Pohrajme si trochu s relací  $S$ . Dvojice  $a = 1, b = 2$  implikaci  $1S2 \implies 2S1$  splňuje, stejně jako dvojice  $a = 2, b = 1$  splňuje  $2S1 \implies 1S2$ . Rovněž s dvojicí  $a = 1, b = 4$  nejsou potíže, ta nesplňuje předpoklad implikace (neplatí  $1S4$ ) a tudíž to symetrii nemůže ohrozit. Čtenář ale asi od začátku vidí, že při probírání dvojic dříve či později dorazí k dvojici  $a = 4, b = 3$ , pro kterou příslušná implikace neplatí, a proto ani  $S$  není symetrická.

Měli bychom mimochodem zkusit i dvojice jako  $a = 1, a = 1$  (v definici symetrie se neříká nic o tom, že by  $a, b$  měly být různé), ale to se obvykle nedělá, protože je to jasné. Pokud  $aSa$  neplatí, pak to symetrii neohrozí, a pokud náhodou  $aSa$ , pak určitě i  $aSa$  (teď jsme je prohodili, smyčky jsou už z podstaty obousměrné). Smyčky tedy symetrii neovlivní, můžeme je při zkoumání symetrie ignorovat.

Teď už bychom měli symetrii rozumět, vyžaduje následující: Pokud je v grafu někde šipka, pak tam musí být i šipka v opačném směru. Pokud někde šipka není, tak to symetrii nezajímá.

Proto by také mělo být jasné, že relace  $T$  je symetrická, smyčky symetrii nerozhodí a jiné dvojice, které bychom měli kontrolovat, tam nejsou. Tento způsob symetrie není zrovna typický, pro hezčí graf symetrické relace se čtenář

může podívat na cvičení 3b.1 (ii). Všimněte si, že  $T$  by zůstala symetrickou, i kdybychom umazali i ty smyčky, čímž by vznikla relace prázdná, bez dvojic. Symetrii nezajímá, kolik spojníc se v relaci vyskytuje, podstatné je jen zdvojování těch, které (pokud vůbec) tam jsou.

**Antisymetrie** má také formu implikace, takže už víme, že nás budou zajímat jen takové dvojice  $a, b$ , které splňují  $aRb$  a  $bRa$ . V relaci  $R$  je jediná taková dvojice, jmenovitě  $a = 4$  a  $b = 4$ . Pro ni pak opravdu platí  $a = b$ , relace  $R$  je proto antisymetrická. Vidíme první věc, antisymetrii smyčky nevedí a nevedí jí také jednoduché ani žádné spojnice mezi body.

U relace  $S$  je jedna dvojice splňující předpoklad,  $a = 1$  a  $b = 2$ . Ta splňuje  $aSb$  a  $bSa$ , ale nespĺňuje závěr  $a = b$ , relace  $S$  proto není antisymetrická. Opět by už mělo být jasné, oč v této vlastnosti jde: Antisymetrie vylučuje možnost dvojitých šipek mezi *různými* prvky (smyčky jí nevedí). Z toho hned vyplývá, že relace  $T$  je antisymetrická. Tam kromě smyček žádné dvojice splňující  $aTb$  a  $bTa$  nejsou, tudíž se implikace z definice nemůže pokazit. Opět je to spíše netypický případ,  $R$  je obvyklejší antisymetrická relace.

Poznamenejme, že intuitivně antisymetrie zní jako popření symetrie, takže se nabízí také definice typu „pokud je šipka  $aRb$ , pak nesmí být šipka  $bRa$ “. Není to zas tak špatný nápad, viz asymetrie v části 3c.8, ale taková definice by vyloučila smyčky, což se příliš nehodí, proto se používá definice, kterou jsme tu uvedli a která smyčky připouští. Možná není napsaná nejjasněji a čtenář by dal přednost ekvivalentnímu vyjádření „pokud  $a \neq b$  a  $aRb$ , pak nesmí platit  $bRa$ “, ale to není tak vhodné z hlediska výrokové logiky a (kupodivu) to bývá i méně praktické, proto se to nepoužívá, stejně jako se nepoužívá obměna naší definice: Jestliže  $a \neq b$ , pak alespoň jedna z dvojic  $(a, b)$ ,  $(b, a)$  není v  $R$ .

Z předchozího odstavce vyplývá, že jsme vědomě zvolili pro antisymetrii jinou definici než opak symetrie. Nejde tedy o opačné vlastnosti, což vidíme i výše,  $T$  je zároveň symetrická i antisymetrická, naopak  $S$  není ani symetrická, ani antisymetrická. Posléze uvidíme, že aby byla relace zároveň symetrická i antisymetrická, tak už to musí být v zásadě  $T$ , takže jde o výjimku. Naopak porušení obou vlastností najednou je velice snadné, stačí zařadit jednu šipku dvojitou (obousměrnou) a jednu jednoduchou, čímž se pokazí antisymetrie i symetrie.

**Tranzitivita** také znamená, že ověřujeme platnost implikace, tedy zajímají nás jen situace, kdy nám tři body dávají navazující šipky  $aRb$  a  $bRc$ . Pak potřebujeme, aby existovala i zkratka  $aRc$ . Jak je na tom relace  $R$ ? To už dá (hlavně u větších množin) více práce, zde asi čtenář brzo odhalí navazující trojici  $4R3$  a  $3R2$ . Prvky  $a = 4, b = 3, c = 2$  tedy splňují předpoklad, je nutné ověřit, zda platí i závěr  $4R2$ , a on platí. Otázka na tělo: Je tam ještě jiná podobná trojice?

Ano, trojice  $a = b = 4, c = 3$ , protože v definici tranzitivity se možnost shodných bodů nevyklučovala. Měli bychom tedy také ověřit platnost implikace pro případ  $a = b = c = 4$ . Je nicméně jasné, že u dvojic tohoto typu je podmínka tranzitivity automaticky splněna, takže dvojice zahrnující smyčky nemohou tranzitivitu pokazit. Závěr:  $R$  je tranzitivní.

Je tranzitivní  $S$ ? Na první pohled by si mnohý čtenář mohl myslet, že je tranzitivní automaticky, protože tam nevidí dvojkroky, tudíž není nutné hledat zkratky. Jenže dvojkrok tam jeden je, jmenovitě  $a = 1, b = 2, c = 1$ . Opravdu  $1S2$  a  $2S1$ , tudíž tranzitivita vyžaduje také existenci jednokroku  $1S1$ , ale ten tam nemáme, podobně chybí  $2S2$ . Relace  $S$  proto není tranzitivní.

Smysl tranzitivity je tedy v tom, že kdykoliv se v grafu vyskytuje navazující dvoukrok, pak tam musí existovat také zkratka jedním krokem, přičemž musíme být opatrní, abychom něco nevynechali. Ani tranzitivita neřeší, co se děje, pokud dvoukroky nejsou, takže už je jasné, že relace  $T$  bude tranzitivní.

Teď už bychom měli intuitivně rozumět základním vlastnostem relací a vidět je v grafech na první pohled, s výjimkou tranzitivity, která se u houštinovitějších grafů dělá pohledem nesnadno. Právě u ní se ale ještě chvíli zdržíme. Pokud pravidlo o zkracování dvoukroků aplikujeme opakovaně na delší trasy, dostaneme následující: Jakmile se někam dostaneme vícero kroky, tak musí existovat i přímá cesta jednou šipkou. Potvrdíme si oficiálně, že tato na pohled silnější podmínka je ekvivalentní tranzitivitě.

### Fakt 3b.1.

Nechť  $R$  je relace na množině  $A$ . Je tranzitivní právě tehdy, když pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  a prvky  $a_1, \dots, a_n \in A$  takové, že  $a_i R a_{i+1}$  pro všechna  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , platí také  $a_1 R a_n$ .

**Důkaz** (rutinní): 1) Předpokládejme, že daná podmínka platí. Pak ji lze použít pro  $n = 2$ , což říká, že kdykoliv  $a_1 R a_2 R a_3$ , pak  $a_1 R a_3$ , což je přesně definice tranzitivity.

2) Předpokládejme, že  $R$  je tranzitivní. Platnost podmínky dokážeme indukcí na  $n$ .

(0) Pro  $n = 2$  podmínka platí, je to definice tranzitivity.

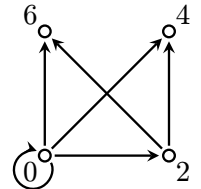
(1) Mějme  $n \in \mathbb{N}$  splňující  $n \geq 2$ . Předpokládejme, že když libovolné prvky  $a_1, \dots, a_n \in A$  splňují  $a_i R a_{i+1}$  pro všechna  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , pak  $a_1 R a_n$ . Platí to i pro  $n+1$  prvků?

Vezměme prvky  $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \in A$  takové že  $a_i R a_{i+1}$  pro všechna  $i = 1, 2, \dots, n$ . Aplikací indukčního předpokladu na prvních  $n$  zjistíme, že  $a_1 R a_n$ , spolu s  $a_n R a_{n+1}$  a tranzitivitou dostaneme  $a_1 R a_{n+1}$  a důkaz je hotov.  $\square$

! Klasickou úlohou v oboru relací je takzvané **vyšetřování vlastností**, což znamená, že rozhodneme, která z základních čtyř vlastností pro danou relaci platí a která ne, a své odpovědi také dokážeme. Budeme se přitom muset naučit jiné triky než v předchozím rozboru, protože nám málokterá relace přijde coby graf na malé množině. Typické relace jsou na velkých množinách, často nekonečných, a jsou dány nějakou logickou podmínkou. Postup vhodný pro tyto situace si ukážeme v následujícím příkladě.

! **Příklad 3b.a:** Připomeňme příklad ze cvičení 3a.1: Uvažujme relaci na množině  $A = \{0, 2, 4, 6\}$  definovanou pro  $a, b \in A$  takto:  $a R b$  jestliže  $2a \leq b$ . Cvičení nám dalo, že  $R = \{(0, 0), (0, 2), (0, 4), (0, 6), (2, 4), (2, 6)\}$ , a dostali jsme i obrázek.

Nejprve jako opakování vyhodnotíme vlastnosti z grafu. Protože existují prvky bez smyček,  $R$  není reflexivní. Existují dva prvky, které jsou spojeny, ale jen jedním směrem,  $R$  proto není symetrická. S výjimkou smyčky u 0 se nikdy nestane, že by šly šipky oběma směry, proto je  $R$  antisymetrická (antisymetrii smyčky nevadí). Na tranzitivitu musíme zkusit procházet grafem dvojkroky a hlídat, jestli vždy existuje zkratka. To je pravda, relace je tedy tranzitivní.



Teď se podíváme, jak bychom ke stejným závěrům došli bez znalosti obrázku. Úplně stejným předpisem  $2a \leq b$  bychom totiž mohli definovat relaci na množině se 100 prvky (pak je procházení grafu kvůli tranzitivitě práce na dlouhé zimní večery) nebo dokonce na  $\mathbb{N}$  či  $\mathbb{R}$  nebo jiné nekonečné množině, pak už graf ani nemáme. Zkusíme tedy vlastnosti vyšetřit znovu, tentokrát čistě z definice pomocí matematiky a logiky.

Reflexivita: Platí pro každé  $a \in A$ , že  $a R a$ ? To by znamenalo  $2a \leq a$ . Víme, že takováto nerovnost je pravdivá jen pro reálná čísla  $a \leq 0$ , takže v naší množině  $A$  jsou určitě čísla, pro která to neplatí. Třeba neplatí  $2 \cdot 6 \leq 6$ , proto neplatí  $6 R 6$ . Tímto protipříkladem jsme ukázali, že relace  $R$  není reflexivní.

Symetrie: Ptáme se, zda pro všechna  $a, b \in A$  platí  $(a R b \implies b R a)$ . Přeložíme to: Platí pro všechna  $a, b \in A$  implikace  $2a \leq b \implies 2b \leq a$ ? Intuice se na to dívá podezřívavě, první nerovnost totiž nutí  $a$  být malé ve srovnání s  $b$  a pak to chceme naopak. Zkusíme na tomto pocitu založit protipříklad. Třeba  $2 \cdot 3 \leq 6$  platí, tedy  $3 R 6$ , ale  $2 \cdot 6 \leq 3$  neplatí, proto nemáme  $6 R 3$  a tudíž tato relace není symetrická.

Pokud odpověď neuhádneme intuicí, pak bývá dobrý nápad zkusit symetrii dokázat a pokud se někde zadrhneme, většinou to naznačí, kde hledat protipříklad. V tomto případě chceme z nerovnice  $2a \leq b$  odvodit  $2b \leq a$ . Zkusíme to:

$$2a \leq b \implies 4a \leq 2b \implies 2b \geq 4a.$$

Předpoklad nám dal  $2b \geq 4a$ , ale my potřebujeme  $2b \leq a$ . Tyto nerovnosti jdou opačnými směry, takže je vysoce nepravděpodobné, že by se povedl přechod  $2b \geq 4a \implies 2b \leq a$ . To je silná indikace, že symetrie neplatí.

Antisymetrie: Ptáme se, zda pro všechna  $a, b \in A$  platí, že když  $a R b$  a  $b R a$ , pak  $a = b$ . Zase si doplníme z definice, co ty relace znamenají: Platí, že pro libovolná čísla  $a, b \in A$  z předpokladů  $2a \leq b$  a  $2b \leq a$  již odvodíme, že  $a = b$ ? Pokud obě nerovnosti platí, tak můžeme eliminovat jednu proměnnou, třeba dosadit  $b$  z první nerovnosti do druhé, dostaneme  $4a \leq a$ . To platí jen pro čísla  $a \leq 0$ , což vzhledem k našemu  $A$  znamená  $a = 0$ . Symetricky dostaneme i  $4b \leq b$ , takže máme  $a = 0$  a  $b = 0$ , tedy opravdu  $a = b$ .

Shrnutí: Ukázali jsme algebraicky, že pro libovolná  $a, b \in A$  z nerovností  $2a \leq b$  a  $2b \leq a$  vyplývá  $a = b$ , čímž je antisymetrie  $R$  dokázána.

Alternativní důkaz: Všechny prvky z  $A$  splňují  $a \leq 2a$ . Podmínka  $2a \leq b$  tedy znamená i  $a \leq b$ , obdobně  $2b \leq a$  znamená  $b \leq a$ . Z obou podmínek tedy máme  $a \leq b$  a  $b \leq a$ , proto  $a = b$ .

Tranzitivita: Ptáme se, zda pro všechny  $a, b, c \in A$  platí, že jestliže  $a R b$  a  $b R c$ , pak také  $a R c$ . Opět přepíšeme podle definice  $R$ : Ptáme se, zda pro  $a, b, c \in A$  platí, že když  $2a \leq b$  a  $2b \leq c$ , pak také  $2a \leq c$ . Zvolíme podobný postup, zkusíme algebraicky eliminovat z předpokládaných nerovnic  $b$  tak, že jej z první dosadíme do druhé. Dostaneme  $4a \leq c$ . Protože ale pro prvky z  $A$  platí  $2a \leq 4a$ , tak máme nerovnice  $2a \leq 4a \leq c$ , tedy  $2a \leq c$ , přesně jak jsme potřebovali. Tranzitivita dokázána.  $\triangle$

## S 3b.2 Jak zkoumat vlastnosti

Při vyšetřování konkrétních relací daných vzorcem (což byl příklad předchozí i většina dalších) doporučujeme následovat postup předvedený výše: U každé vlastnosti si nejprve přepsat její obecnou definici do aktuálního znění, tedy místo obecných výrazů typu  $a R b$  psát konkrétní podmínky z definice  $R$ . Když se pak člověk na takový konkrétní přepis podívá, většinou je hned jasné, zda je schopen dokázat jeho pravdivost či naopak ukázat protipříkladem, že někdy selhává. U vlastností, které platí, je dobré na konci úvah zkontrolovat, že opravdu vznikl

správný důkaz, občas stojí za to jej znovu napsat načisto a pořádně. Správný důkaz musí začínat specifikací, že něco dokazujeme pro *libovolnou* volbu prvků (jednoho pro reflexivitu, dvou pro (anti)symetrii a tří pro tranzitivitu), čímž vyhovíme obecnému kvantifikátoru. Argument samotný pak musí probíhat ve správném směru, tedy začít předpokladem a skončit závěrem. Zkušený relační vyšetřovač dokáže u snadnějších relací dopředu odhadnout, jak se důkaz bude vyvíjet, a rovnou jej píše ve finálním tvaru.

Hned na začátku je ale často velice užitečné udělat ještě něco jiného. Než se člověk pustí do vlastností, měl by si udělat jasno v tom, jak relace vlastně funguje. Jinými slovy, je třeba se podívat, s jakými objekty relace pracuje, a pak si zkusit vymyslet několik dvojic těchto objektů, které v relaci jsou, a naopak několik dvojic, které v relaci nejsou. Možná to zní triviálně, ale zkušenost ukazuje, že se to vyplatí, zejména u relací, které pracují s trochu komplikovanějšími objekty. My si teď testování relací vyzkoušíme. Začneme relacemi snažšími (na číslech), ale až čtenář začne mít pocit, že je mu to jasné, tak by se měl podívat i na relace zajímavější, viz cvičení 3b.7.

**! Příklad 3b.b:** Vyšetříme základní čtyři vlastnosti pro relaci  $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2; a \leq b\}$ .

Jinými slovy, zkoumáme běžnou nerovnost pro celá čísla. Zkusíme si zápis relace pomocí dvojic, ať si jej protrénujeme.

Reflexivita: Vezměme libovolné  $a \in \mathbb{Z}$ . Platí  $(a, a) \in R$ ? Podle definice  $R$  to znamená  $a \leq a$ , což je splněno. Takže  $R$  je reflexivní. Do „oficiálního“ důkazu bychom samozřejmě ty úvahy nepsali, vypadal by třeba takto:

Nechť  $a \in \mathbb{Z}$  je libovolné. Pak  $a \leq a$ , proto  $(a, a) \in R$ .

Symetrie: Nechť  $a, b \in \mathbb{Z}$  jsou takové, že  $(a, b) \in R$ , platí pak  $(b, a) \in R$ ? Podle definice  $R$  tedy chceme, aby z  $a \leq b$  vyplývalo  $b \leq a$ , ale toto nevypadá nadějně, máme podezření, že by to nemuselo platit. Zkusíme tedy dokázat, že  $R$  není symetrická, pomocí protipříkladu. Určitě  $(13, 23) \in R$ , neboť  $13 \leq 23$ , ale neplatí  $23 \leq 13$  a tudíž  $(23, 13) \notin R$ .

Antisymetrie: Nechť  $a, b \in \mathbb{Z}$  splňují  $(a, b) \in R$  a  $(b, a) \in R$ . Platí pak  $a = b$ ? Podle definice  $R$  předpoklad znamená, že  $a \leq b$  a  $b \leq a$ , z čehož už hned plyne, že opravdu  $a = b$ . Antisymetrie dokázána.

Tranzitivita: Vezměme libovolné  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Chceme ukázat, že jestliže  $(a, b) \in R$  a  $(b, c) \in R$ , pak  $(a, c) \in R$ . Nechť tedy  $(a, b) \in R$  a  $(b, c) \in R$ . Podle definice  $R$  náš předpoklad znamená, že  $a \leq b$  a  $b \leq c$ , z čehož hned dostaneme  $a \leq c$  a tedy  $(a, c) \in R$ . Tranzitivita dokázána.

△

Do důkazů jsme v příkladě vkládali naše úvahy, aby čtenář viděl, jak k problému přistupujeme. Do finální verze bychom je samozřejmě nepsali. Protože i u dalších relací přemýšlíme stejně, budeme už důkazy psát stručněji, mimo jiné budeme upřednostňovat zápis  $aRb$ .

**S 3b.3 Poznámka:** Čtenář si jistě všiml, že jsme v důkazech určité části podtrhávali. Když si vytáhne například z důkazu, že je  $R$  antisymetrická, jen ty podtržené části, dostane přímo definici antisymetrie. Tak se u přímého důkazu (který obvykle u vlastností používáme) pozná, že je správně strukturálně postaven, u ostatních vlastností to platí samozřejmě také. Čtenář si to může hlídat i v následujících důkazech.

Dodržování správné struktury je velice užitečné v situaci, kdy se čtenář snaží sám nějaký důkaz vlastnosti napsat. Například každý (přímý) důkaz tranzitivity by měl vypadat nějak takto: Nechť  $a, b, c \in A$  jsou libovolné, předpokládejme, že  $aRb$  a  $aRc$ . Pak  $\dots$ , a proto  $aRc$ . Pokud se důkaz tváří, že přímo tranzitivitu dokazuje, ale tuto strukturu nemá, pak je nejspíš chybně. Pokud ji má, tak také ještě nemusí být správně, chyba může být někde v těch spojovacích textech (argumentech), ale alespoň má šanci. Je dobré si vždy před vymýšlením důkazu rozmyslet, jakou by měl mít strukturu, protože to často napoví, jak jej udělat. Rozhodně pak doporučujeme u již hotového důkazu platnosti nějaké vlastnosti zkusit podtrháním částí získat její definici.

△

**! Příklad 3b.c:** Vyšetříme základní čtyři vlastnosti pro relaci  $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2; a < b\}$ .

Zkoumáme tedy běžnou ostrou nerovnost, tentokrát zvolíme zápis  $aRb$ .

R: Nechť  $a \in \mathbb{Z}$ . Pak neplatí  $a < a$ , proto neplatí  $aRa$ . Tedy  $R$  není reflexivní.

Pro úplnost protipříklad: neplatí  $3 < 3$ , proto neplatí  $3R3$ .

S: Nechť  $a, b \in \mathbb{Z}$  splňují  $aRb$ . Pak  $a < b$ , tedy neplatí  $b < a$  a tedy neplatí  $bRa$ . Proto  $R$  není symetrická.

Pro úplnost protipříklad:  $1R3$  neboť  $1 < 3$ , ale neplatí  $3R1$ .

A: Nechť  $a, b \in \mathbb{Z}$  splňují  $aRb$  a  $bRa$ . Pak  $a < b$  a  $b < a$ , což ale nemůže nastat nikdy. Předpoklad zkoumané implikace  $(aRb \wedge bRa) \implies a = b$  tedy není nikdy splněn, proto celá implikace vždy automaticky platí. Tato relace je antisymetrická.

T: Nechť  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  splňují  $aRb$  a  $bRc$ . Pak  $a < b$  a  $b < c$ , proto  $a < c$  a tedy  $aRc$ . Tato relace je tranzitivní.

△



! **Příklad 3b.d:** Vyšetříme základní čtyři vlastnosti pro relaci  $R = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a = b\}$ .

Takže zkoumáme relaci rovnosti. Zde tyto známé relace definujeme formálně korektně, aby bylo lépe vidět myšlenky v důkazech, ale běžně bychom prostě řekli „uvažujme relaci  $=$  na  $\mathbb{R}$ “.

R: Nechť  $a \in \mathbb{R}$ . Pak platí  $a = a$ , proto  $aRa$ . Tedy  $R$  je reflexivní.

S: Nechť  $a, b \in \mathbb{R}$  splňují  $aRb$ . Pak  $a = b$ , tedy také  $b = a$  neboli  $bRa$ . Proto je  $R$  symetrická.

A: Nechť  $a, b \in \mathbb{R}$  splňují  $aRb$  a  $bRa$ . Pak  $a = b$  a  $b = a$ , prostě  $a = b$ . Tato relace je antisymetrická.

T: Nechť  $a, b, c \in \mathbb{R}$  splňují  $aRb$  a  $bRc$ . Pak  $a = b$  a  $b = c$ , proto  $a = c$  a tedy  $aRc$ . Tato relace je tranzitivní.

△

**Poznámka:** V příkladě 3b.d jsme měli relaci rovnosti mezi celými čísly a ukázali jsme její vlastnosti. Není těžké si rozmyslet (je to vlastně stejné), že relace rovnosti je vždy reflexivní, symetrická, antisymetrická a tranzitivní, ať už porovnáváme jakékoliv objekty, třeba rovnost množin, rovnost lidí, rovnost lineárních prostorů, cokoliv chcete. Je to v zásadě jediný typ relace, který je zároveň symetrický i antisymetrický, viz cvičení 3b.11.

△

! **Příklad 3b.e:** Vyšetříme základní čtyři vlastnosti pro relaci  $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2; a + b \leq 13\}$ .

R: Nechť  $a \in \mathbb{Z}$ . Pak  $a + a \leq 13$  někdy platí, ale někdy ne, například  $a = 7$  je protipříklad proti reflexivitě  $R$ .

S: Nechť  $a, b \in \mathbb{Z}$  splňují  $aRb$ . Pak  $a + b \leq 13$ , tedy také  $b + a \leq 13$  a proto  $bRa$ . Tato relace je symetrická.

A: Nechť  $a, b \in \mathbb{Z}$  splňují  $aRb$  a  $bRa$ . Pak  $a + b \leq 13$  a  $b + a \leq 13$ , toho  $a = b$  nedostaneme. Například dvojice  $a = 3, b = 7$  splňuje  $3R7$  a  $7R3$ , ale nespĺňuje  $3 = 7$ , je proto protipříkladem proti antisymetrii  $R$ .

T: Nechť  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  splňují  $aRb$  a  $bRc$ . Pak  $a + b \leq 13$  a  $b + c \leq 13$ . Potřebujeme ukázat, že  $a + c \leq 13$ , abychom tím dostali  $aRc$ . To ale není nijak jasné, chybí nám vhodné nástroje (rádi bychom z oněch dvou předpokladů vyloučili  $b$ , aby zůstal jen vztah s  $a, c$ , ale u nerovnic například nefunguje rozumně eliminace). Zkusíme se proto zamyslet. Potřebujeme  $a + c \leq 13$ , tedy čísla by neměla být moc velká. Podmínka  $a + b \leq 13$  může znamenat, že jedno číslo je dost velké a druhé malé, nemáme zde žádnou kontrolu, takže zkusíme vymyslet protipříklad:  $11 + 2 \leq 13$ , tedy  $11R2$ , také  $2 + 7 \leq 13$ , tedy  $2R7$ , ale neplatí  $11 + 7 \leq 13$ , proto neplatí  $11R7$ . Takže z řetízku  $11R2R7$  nelze udělat  $11R7$  a relace proto není tranzitivní.

Tady by byl možná čitelnější zápis přes dvojice, máme  $(11, 2) \in R$  a  $(2, 7) \in R$ , ale neplatí  $(11, 7) \in R$ .

△

! **Příklad 3b.f:** Uvažujme nějaký soubor množin  $\mathcal{M}$  a na něm relaci býti podmnožinou. Podle Faktu 2a.1 (i) je reflexivní, podle Faktu 2a.2 je tranzitivní. Fakt 2a.3 ukazuje antisymetrii. Zbývá vyšetřit symetrii. Platí vždy, že  $A \subseteq B$  implikuje  $B \subseteq A$ ? Obecně ne, třeba  $\{13\} \subseteq \{13, 23\}$ , ale neplatí  $\{13, 23\} \subseteq \{13\}$ , relace  $\subseteq$  tedy obecně není symetrická.

Mohla by být symetrická pro nějaké speciální  $\mathcal{M}$ ? K vytvoření protipříkladu nám stačí mít dvě množiny tak, aby  $A \subseteq B$  a zároveň  $A \neq B$ . Pokud soubor množin  $\mathcal{M}$  takovéto množiny neobsahuje, pak by relace  $\subseteq$  byla symetrická. Takovýchto situací existuje mnoho. Nejjednodušší je vzít jako  $\mathcal{M}$  soubor jen s jednou množinou. Například  $\mathcal{M} = \{\{13\}\}$  obsahuje jedinou množinu,  $\{13\}$ . Relace  $\subseteq$  pak splňuje všechny čtyři vlastnosti.

Aby to nebyla taková nuda, i na souboru  $\mathcal{M} = \{\{13\}, \{23\}\}$  je inkluze symetrickou relací, protože v tomto souboru nenajdeme dvě různé množiny, pro které by byl splněn předpoklad  $A \subseteq B$ . Rozmyslete si, že relace  $\subseteq$  je symetrická i na nekonečném souboru množin

$$\mathcal{M} = \{\{n, n+1\}; n \in \mathbb{N}\} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \dots\}.$$

Nejtypičtější případ  $\mathcal{M}$  ale je, když máme nějaké neprázdné universum  $U$  a pracujeme se všemi jeho podmnožinami, tedy  $\mathcal{M} = P(U)$ . Pak relace  $\subseteq$  určitě není symetrická.

△

! **Příklad 3b.g:** Připomeňme porovnávání množin podle mohutnosti, budeme porovnávat množiny z nějakého souboru  $\mathcal{M}$ .

1) Relace  $|A| \leq |B|$  je podle Faktu 2c.2 (i) reflexivní, podle Faktu 2c.3 (i) také tranzitivní. Není ale obecně symetrická, například  $|\{13\}| \leq |\{13, 23\}|$ , ale neplatí  $|\{13, 23\}| \leq |\{13\}|$ . Z toho je vidět, že zkoumaná relace je symetrická pouze v případě, že všechny množiny z  $\mathcal{M}$  mají stejnou mohutnost. V typickém případě  $\mathcal{M} = P(U)$  tedy symetrii nemáme.

Není obecně ani antisymetrická, neboť  $|\{13, 23\}| \leq |\{13, 14\}|$  a  $|\{13, 14\}| \leq |\{13, 23\}|$ , ale neplatí  $\{13, 14\} = \{13, 23\}$ . Teď vidíme, že aby byla zkoumaná relace antisymetrická, musela by  $\mathcal{M}$  mít pro každou mohutnost jen jednu množinu. To neplatí v tradičním případě  $\mathcal{M} = P(U)$ , proto zde tato relace není antisymetrická.

Pro dostatečně bohatý soubor množin, například  $\mathcal{M} = P(U)$ , tedy tato relace není ani symetrická, ani antisymetrická.

2) Relace  $|A| = |B|$  je podle Faktu 2c.2 (i) reflexivní, podle 2c.2 (iii) symetrická a podle Faktu 2c.3 (iii) také tranzitivní. Není ale obecně antisymetrická, například máme  $|\{13, 23\}| = |\{13, 14\}|$  a  $|\{13, 14\}| = |\{13, 23\}|$ , ale neplatí  $\{13, 14\} = \{13, 23\}$ . Zkuste si zase udělat rozbor, pro jaké soubory množin  $\mathcal{M}$  bychom zde antisymetrii dostali.

Mimořádně, před chvílí jsme říkali, že rovnost objektů je vždy symetrická i antisymetrická. Tento příklad tomu neprotiřečí, protože zde neporovnáváme přímo objekty, ale nějaké jejich vlastnosti (mohutnost). Jde tedy o něco jiného.

△

**Příklad 3b.h:** Nechť  $A$  je množina všech lidí. Definujeme relaci  $aRb$  jestliže  $a$  a  $b$  mají stejného otce či stejnou matku.

Protože každý má stejného otce či matku sám se sebou, je tato relace reflexivní. Evidentně je také symetrická, protože ve výroku „ $a$  a  $b$  mají stejnou matku/otce“ je role  $a$  a  $b$  symetrická. Ani náhodou nebude antisymetrická: Jestliže mají  $a$  a  $b$  stejnou matku/otce a také  $b$  a  $a$  mají stejnou matku/otce, pak rozhodně nemusí jít o stejnou osobu, tedy neplatí  $a = b$ .

Tranzitivita: Nechť  $aRb$  a  $bRc$ . Pak mají  $a$  a  $b$  stejného rodiče a také  $b$  a  $c$  mají stejného rodiče. Znamená to, že pak i  $a$  a  $c$  sdílejí rodiče? Neznamená. Představme si následující situaci. Paní  $M_1$  má s panem  $O_1$  dítě  $a$ . Poté si pan  $O_1$  udělá dítě  $b$  s paní  $M_2$  a stává se tak spojovacím můstkem, díky kterému  $aRb$  (mají shodného otce  $O_1$ ). Paní  $M_2$  už má z předchozího manželství s panem  $O_2$  dítě  $c$ , takže mají  $b$  a  $c$  společnou matku  $M_2$  a tudíž  $bRc$ . Jenže  $a$  a  $c$  nemají ani společnou matku, ani společného otce a tudíž neplatí  $aRc$ , tato relace tedy není tranzitivní.

Poznámka: I zde lze vlastnosti ovlivnit tím, že měníme množinu, na které tu relaci děláme. Pokud si například vezmeme množinu lidí, kde jsou všichni jedináčci, tak se naše relace náhle stane antisymetrickou. Možná zajímavější je, že pokud v naší množině  $A$  má každý otce/matku ve stálém svazku bez „bokovek“.

△

V příkladech jsme se setkali s tím, že množina, na které relaci máme, může ovlivnit vlastnosti. S tím souvisí pojem restrikce, kdy máme relaci na množině  $A$ , ale aplikujeme ji na nějakou podmnožinu  $B$ . Pak máme následující.

!

**Fakt 3b.4.**

Nechť  $R$  je relace na množině  $A$ , nechť  $S$  je restrikce  $R$  na nějakou  $B \subseteq A$ . Jestliže má  $R$  některou z výše definovaných čtyř vlastností, tak ji má  $S$  také.

**Důkaz** (rutinní): Předpokládejme, že  $R$  je tranzitivní. Nechť  $a, b, c \in B$  jsou takové, že  $(a, b) \in S$  a  $(b, c) \in S$ . Protože  $S \subseteq R$ , pak  $(a, b) \in R$  a  $(b, c) \in R$  a z tranzitivity  $R$  plyne  $(a, c) \in R$ . Ale také  $(a, c) \in B \times B$ , proto  $(a, c) \in S$ . Tedy i  $S$  je tranzitivní.

Ostatní vlastnosti viz cvičení 3b.13.

□

Zjednodušeně řečeno, přechodem k podmnožině se vlastnosti nepokazí, ale mohou zlepšit. Když jsme tedy dokázali, že rovnost = je reflexivní, symetrická a tranzitivní jako relace na  $\mathbb{R}$ , pak má tyto vlastnosti i tehdy, když ji uvažujeme na  $\mathbb{N}$  nebo třeba na množině všech prvočísel.

Zde je třeba jisté opatrnosti, mluvíme o podmnožině základní množiny  $A$ , na které relace  $R$  „žije“. Ona je totiž i samotná relace  $R$  množinou (dvojic), tudíž můžeme uvažovat její podmnožiny. Když přejdeme k restrikci, dostáváme skutečně podmnožinu relace  $R$ , jmenovitě množinu těch dvojic z  $R$ , které nepoužívají prvky mimo  $B$ . Restrikce tedy vytváří podmnožiny relace, ale ne podmnožiny ledažaké, jsou vybírané speciálním způsobem. Proto se zachovávají vlastnosti relace. Jakmile začneme vytvářet podmnožiny  $R$  jinak, tak už zachování vlastností garantovat nelze.

Příklad:  $A = \{1, 2, 3\}$ , uvažujme relaci  $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$ , která je symetrická. Když se omezíme na množinu  $B = \{1, 2\}$ , tak z relace zbyde její restrikce  $S = \{(1, 2), (2, 1)\}$ . I ta je symetrická, to souhlasí.

Pokud ale začneme mluvit o podmnožinách relace obecně, pak si z relace  $R$  můžeme vybrat třeba podmnožinu  $T = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$  a máme relaci, která už není symetrická.

Podobný příklad jsme již viděli, relace „být příbuzný“ je symetrická, ta má jako podmnožinu relaci „být rodičem“ a ta už symetrická není.

Poslední poznámka: Reflexivita, symetrie i tranzitivita vyžadují přítomnost určitých šipek, to se snadno pokazí odebráním nevhodně vybraných dvojic z relace. Naopak antisymetrie chce, aby určité šipky nebyly, což je požadavek v opačném směru. Nepřekvapí proto, že když máme antisymetrickou relaci a přejdeme k její podmnožině, tak zase dostaneme antisymetrickou relaci (viz důkaz (iii) Faktu 3c.2).

Zkoumání, jak si vlastnosti poradí s operacemi, necháme na další kapitole, teď se podíváme, jak poznat platnost či neplatnost vlastností nepřímo, pomocí jiných pojmů. U některých vlastností se nám bude hodit jedna speciální relace.

! **Definice.**

Nechť  $A$  je množina. Definujeme její **diagonální relaci (diagonal relation)** jako relaci

$$\Delta(A) = \{(a, a) \in A \times A; a \in A\}.$$

Je to tedy relace ze všech „smyček“ a odpovídá relaci rovnosti na množině  $A$ , je totiž dána pro prvky  $x, y \in A$  předpisem  $(x, y) \in \Delta(A) \iff x = y$ . Její reprezentace maticí je jednotková matice  $E_n$ .

! **Věta 3b.5.**

Nechť  $R$  je relace na nějaké množině  $A$ .

- (i)  $R$  je reflexivní právě tehdy, když  $\Delta(A) \subseteq R$ .
- (ii)  $R$  je symetrická právě tehdy, když  $R = R^{-1}$ .
- (iii)  $R$  je antisymetrická právě tehdy, když  $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta(A)$
- (iv)  $R$  je tranzitivní právě tehdy, když  $R^2 \subseteq R$ .

Tato věta by se v typickém matematickém textu dokázala větou „Důkaz je zřejmý“. A taky je, proto jsme jej nechali jako cvičení 3b.15.

Spojením (iv) a Faktu 3a.6 dostaneme, že pro tranzitivní relace platí  $R^n \subseteq R$ . To se dá zajímavě vylepšit, protože reflexivita zase dává inkluzi opačnou (viz cvičení 3b.16). Dostáváme tak následující tvrzení.

**Věta 3b.6.**

Nechť  $R$  je relace na množině  $A$ . Jestliže je  $R$  reflexivní a tranzitivní, tak  $R^n = R$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ .

Věta 3b.5 spojuje vlastnosti relací s množinovými operacemi. Ty jsou zase díky Faktům 3a.8 a 3a.9 a Důsledku 3a.11 svázány s operacemi. Závěr se nabízí, jen ještě potřebujeme zjistit, jak se pomocí matic pozná inkluze relací.

**Definice.**

Nechť  $M, N$  jsou dvě matice  $m \times n$ . Píšeme  $M \leq N$ , jestliže  $m_{ij} \leq n_{ij}$  pro všechna  $i = 1, \dots, m$  a  $j = 1, \dots, n$ .

Zde je třeba upozornit, že nejde o standardní nerovnost mezi maticemi, taková neexistuje. Přesněji, neexistuje pojem nerovnosti mezi maticemi, který by byl univerzálně užitečný a tudíž univerzálně přijímaný. Některé obory matice nerovností neporovnávají vůbec, některé pak mají svou vlastní definici, která jim vyhovuje. Nám vyhovuje ta, kterou jsme zavedli.

**Fakt 3b.7.**

Nechť jsou  $R_1$  a  $R_2$  relace na stejné množině  $A$  s maticemi  $M_1$  a  $M_2$ . Pak  $R_1 \subseteq R_2$  právě tehdy, když  $M_1 \leq M_2$ .

Důkaz necháváme jako cvičení 3b.17. Je založen na tom, že každý prvek  $a$  nějaké 01-matice má povoleny pouze hodnoty 0 a 1, takže nerovnost  $1 \leq a$  již nutně značí  $a = 1$ , naopak  $a \leq 0$  značí  $a = 0$ .

Kombinací výše citovaných vět okamžitě dostáváme následující:

**Věta 3b.8.**

Nechť je  $R$  relace na nějaké  $n$ -prvkové množině  $A$  a nechť je  $M$  její reprezentující matice.

- (i)  $R$  je reflexivní právě tehdy, když  $E_n \leq M$ .
- (ii)  $R$  je symetrická právě tehdy, je-li  $M$  symetrická.
- (iii)  $R$  je antisymetrická právě tehdy, když  $M \wedge M^T \leq E$ .
- (iv)  $R$  je tranzitivní právě tehdy, když  $M^{[2]} \leq M$ .

Důkaz je opět snadný a necháme jej z větší části jako cvičení 3b.18, jen podotkneme jako nápoředu, že v části (i) ta nerovnost nutí  $M$  mít na diagonále jedničky.

### 3b.9 Kartézský součin.

Před chvílí jsme se naučili „porovnávat“ matice podle toho, co dělají jejich prvky. Obecně jsme někdy v situaci, kdy pracujeme s komplikovanými objekty, které jsou poskládané ze složek. My už nějaké relace mezi složkami máme a rádi bychom z toho odvodili relaci o celých objektech.

Takto obecně odpověď existuje, protože ony složky se mohou na chování celého objektu podílet mnoha různými způsoby, což přirozeně ovlivní, jakým způsobem se vlastnosti složek přenáší na celek. Uděláme tedy obvyklou věc, zaměříme se jen na určitý typ struktury. Velice oblíbený objekt se složkami je vektor. Položíme si tedy otázku, zda bychom uměli vytvořit relaci mezi vektory (tedy prvky kartézského součinu) za předpokladu, že už máme relace pracující s jejich složkami. Kupodivu ani s vektory to není tak jednoduché. Představíme si zde jednu populární a jednoduchou myšlenku, která se v zásadě nabízí sama. Vzápětí ukážeme, že tento přirozený nápad má jisté nedostatky, které mohou (a nemusí) mrzet.

#### Definice.

Nechť  $n \in \mathbb{N}$ , pro  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  nechť  $R_i$  je relace z nějaké množiny  $A_i$  do množiny  $B_i$ . Označme  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  a  $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$ . Definujeme relaci  $R$  z  $A$  do  $B$  zvanou **součinnové uspořádání** (**product order**) následovně: Pro  $(a_1, \dots, a_n) \in A$ ,  $(b_1, \dots, b_n) \in B$  platí  $(a_1, \dots, a_n)R(b_1, \dots, b_n)$  právě tehdy, když  $a_i R_i b_i$  pro všechna  $i = 1, \dots, n$ .

Takže chceme-li vědět, zda jsou dva vektory v relaci, tak se podíváme, zda to platí pro všechny složky. Nejčastěji se pracuje se situací, kdy  $A_i = B_i$ , jinými slovy, máme relace  $R_i$  na množinách  $A_i$  a chceme porovnávat vektory z  $A_1 \times \dots \times A_n$ .

**Příklad 3b.i:** Uvažujme jako  $R_1$  relaci  $<$  na  $A_1 = \mathbb{R}$  a jako  $R_2$  relaci dělitelnosti na  $A_2 = \mathbb{N}$ ,  $aR_2b$  v případě, že  $a$  dělí  $b$  neboli  $b$  je násobek  $a$  (viz kapitola 6). Pracujeme pak na množině  $A = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ , kde vzniká součinnová relace  $R$ . Máme například  $(-1, 4)R(\pi, 12)$  nebo  $(2, 13)R(e, 26)$ , ale už neplatí  $(1, 6)R(2, 8)$ , protože 6 nedělí 8. Neplatí také  $(1, 9)R(0, 18)$ , kde selhává relace  $<$  u první složky, a už vůbec ne  $(13, 13)R(11, 23)$ .

Nějaké závěry z téhle relace dělat nebudeme, byl to jen takový příklad, ať se ujistíme, že tomu opravdu dobře rozumíme.

△

Asi nejčastěji jsou všechny množiny  $A_i, B_i$  stejné.

**Příklad 3b.j:** Uvažujme relaci  $=$  na  $\mathbb{R}$ . Pokud zvolíme  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = B_1 = \dots = B_n = \mathbb{R}$ , pak  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \mathbb{R}^n = B$ , vznikne tedy relace na klasickém prostoru reálných vektorů. Podle definice jsou dva vektory  $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$  spolu v součinnové relaci  $R$  právě tehdy, pokud pro všechna  $i$  máme  $x_i = y_i$ .

Jinými slovy, v tomto příkladě nám vzniká běžná rovnost vektorů.

△

Součinnovou relaci nejčastěji používáme právě takto, když jsou všechny relace  $R_i$  vlastně stejné. Pro výslednou relaci  $R$  se pak dokonce často používá stejná značka jako pro původní  $R_i$ , což je zrovna případ rovnosti vektorů.

Je snadné ukázat, že pokud mají všechny relace  $R_i$  nějakou z vyšetřovaných vlastností, tak ji má příslušná součinnová relace také.

#### Fakt 3b.10.

Nechť  $n \in \mathbb{N}$ , pro  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  nechť  $R_i$  je relace na nějaké množině  $A_i$ . Uvažujme odpovídající součinnovou relaci  $R$  na  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ . Pak platí:

- (i) Jestliže jsou pro všechna  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  relace  $R_i$  reflexivní, pak je i relace  $R$  reflexivní.
- (ii) Jestliže jsou pro všechna  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  relace  $R_i$  symetrická, pak je i relace  $R$  symetrická.
- (iii) Jestliže jsou pro všechna  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  relace  $R_i$  antisymetrická, pak je i relace  $R$  antisymetrická.
- (iv) Jestliže jsou pro všechna  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  relace  $R_i$  tranzitivní, pak je i relace  $R$  tranzitivní.

**Důkaz** (rutinní):  $R$ : Nechť  $(a_i) = (a_1, \dots, a_n) \in A$ . Protože jsou všechna  $R_i$  reflexivní, tak  $a_i R_i a_i$  pro všechna  $i$ , tedy dle definice součinnové relace i  $(a_i)R(a_i)$ .

Ostatní tři vlastnosti s důvěrou přenecháme čtenáři, viz cvičení 3b.19

□

**Příklad 3b.k:** Uvažujme relaci  $<$  na  $\mathbb{R}$ . Součinná relace s volbou  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = \mathbb{R}$  nám dá jakési porovnávání vektorů z  $\mathbb{R}^n$ , které zase můžeme značit  $<$ .

Například při volbě  $n = 2$  můžeme psát  $(-1, 4) < (0, 13)$ , protože platí  $-1 < 0$  a také  $4 < 13$ .

$\triangle$

Zatímco příklad s rovností ukázal, že pojem součinné relace má své využití, tento příklad naopak ukazuje, že v některých případech součinná relace rozhodně není to pravé. Kde je problém?

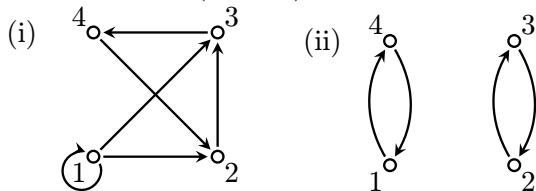
Pokud vektory používáme v geometrii, tak to dává špatné výsledky. Například v součinné nerovnosti platí  $(-4, -3) < (1, 0)$ , jenže to je zcela proti intuici. U vektorů je totiž důležitá hlavně magnituda a zde máme  $\|(-4, -3)\| = 5$  a  $\|(1, 0)\| = 1$ , takže ten první vektor cítíme jako větší. Proto se v analýze vektory podle složek zásadně neporovnávají, podobný problém je s porovnáváním matic podle „velikosti“.

Zde ovšem nejsme v analýze ale v diskrétní matematice, máme i my se součinnou nerovností problém? Ano, a rovněž podstatný. Součinným uspořádáním totiž vzniká jen velice málo srovnání, protože aby se shodly všechny složky, musíme mít velké štěstí. Třeba vektory  $(1, 2)$  a  $(2, 1)$  touto relací nedokážeme porovnat. To může být smrtící. Typickým příkladem je řazení lidí podle abecedy. Budeme-li slova považovat za vektory písmen, přičemž pro jednotlivá písmena máme srovnání dle abecedy, pak součinná relace není schopna porovnat například jména uk a Gek. V první složce přijde nejdřív to druhé slovo ( $<G$ ), ve druhé složce je to naopak ( $u > e$ ) a tento rozpor součinná relace nerozchodí.

Jenže my potřebujeme umět řadit slova nějak za sebe, bude tedy třeba vymyslet jiný způsob, jak z informace o složkách vyrábět relaci na celých vektorech. Na to si ale počkáme do kapitoly o částečném uspořádání, viz 4b.17.

## Cvičení

**Cvičení 3b.1** (rutinní): Uvažujte relace dané následujícími diagramy.



Vyšetřete pro ně čtyři základní vlastnosti.

Poznámka: Vyšetřit znamená zjistit, zda určitá vlastnost platí, a tuto odpověď dokázat.

**Cvičení 3b.2** (rutinní): Uvažujme následující relace na množině  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ :

(i)  $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (3, 4)\}$ ;

(ii)  $R = \{(1, 4), (1, 3), (4, 3), (2, 2)\}$ .

a) Vyšetřete pro ně čtyři základní vlastnosti.

b) Nakreslete jejich grafy, ověřte si na nich výsledky z a).

**Cvičení 3b.3** (rutinní): Pro relace zadané následujícími maticemi vyšetřete čtyři základní vlastnosti.

(i)  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; (ii)  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; (iii)  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Cvičení 3b.4** (rutinní): Uvažujte relaci  $R$  na množině lidí  $A$  danou  $aRb$  jestliže  $a$  a  $b$  sdílí křestní jméno.

Vyšetřete, kterou ze základních čtyř vlastností má.

**Cvičení 3b.5** (rutinní, zkouškové, \* dobré): Pro následující relace na  $\mathbb{Z}$  vyšetřete čtyři základní vlastnosti.

(i)  $aRb$  jestliže  $|a| = |b|$ ;

(v)  $aRb$  jestliže  $a = b + 1$ ;

(ii)  $aRb$  jestliže  $a \geq b$ ;

(vi)\*  $aRb$  jestliže  $a \geq b^2$  (viz následující cvičení);

(iii)  $aRb$  jestliže  $a \neq b$ ;

(vii)  $aRb$  jestliže  $a$  a  $b$  mají nějakého společného dělitele různého od 1.

(iv)  $aRb$  jestliže  $a - b = 2k$  pro nějaké  $k \in \mathbb{Z}$ ;

**Cvičení 3b.6** (rutinní, zkouškové, \* dobré): Pro následující relace na  $\mathbb{R}$  vyšetřete čtyři základní vlastnosti.

(i)  $xRy$  jestliže  $y - x \in \mathbb{Z}$ ;

(v)  $xRy$  jestliže  $x = y^2$ ;

(ii)  $xRy$  jestliže  $x - y \in \mathbb{Q}$ ;

(vi)\*  $xRy$  jestliže  $x \geq y^2$  (viz předchozí cvičení);

(iii)  $xRy$  jestliže  $xy \geq 0$ ;

(vii)  $xRy$  jestliže  $|x| \leq |y|$ .

(iv)  $xRy$  jestliže  $xy \geq 1$ ;

**Cvičení 3b.7** (rutinní, zkouškové, dobré): Vyšetřete čtyři základní vlastnosti pro následující relace:

(i) Relace  $R$  na množině  $\mathbb{R}^2$  definovaná takto:  $(u, v)R(x, y)$  jestliže  $u^2 - y = x^2 - v$ ,

tedy formálně  $R = \{((u, v), (x, y)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; u^2 - y = x^2 - v\}$ .

- (ii) Relace  $R$  na množině  $\mathbb{R}^2$  definovaná takto:  $(u, v)R(x, y)$  jestliže  $u^2 - y = v^2 - x$ , tedy formálně  $R = \{((u, v), (x, y)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; u^2 - y = v^2 - x\}$ .
- (iii) Relace  $R$  na množině  $\mathbb{R}^2$  definovaná takto: Uvažujme množinu  $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 13\}$  (mimořadně, kružnice okolo počátku s poloměrem  $\sqrt{13}$ ). Definujme  $R = \{((u, v), (x, y)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; (u, v) - (x, y) \in N\}$ .
- (iv) Relace  $R$  na množině  $\mathbb{R}^2$  definovaná takto: Uvažujme množinu  $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$  (mimořadně, vedlejší diagonála). Definujme  $R = \{((u, v), (x, y)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; (u, v) - (x, y) \in N\}$ .
- (v) Relace  $\mathcal{R}$  na množině  $F$  všech zobrazení  $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$  definovaná jako  $T\mathcal{R}S$  jestliže  $T(0)S(0) = 2$ .
- (vi) Relace  $\mathcal{R}$  na množině  $F$  všech zobrazení  $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$  definovaná jako  $T\mathcal{R}S$  jestliže  $T(1) = S(2)$ .
- (vii) Relace  $\mathcal{R}$  na množině  $F$  všech funkcí  $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  definovaná jako  $f\mathcal{R}g$  jestliže  $f(x) \geq g(y)$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ .
- (viii) Relace  $\mathcal{R}$  na množině  $M_{2 \times 2}$  všech  $2 \times 2$  reálných matic definovaná jako  $A\mathcal{R}B$  jestliže  $|A| = |B|$  (stejný determinant).
- (ix) Relace  $\mathcal{R}$  na množině  $M_{2 \times 2}$  všech  $2 \times 2$  reálných matic definovaná jako  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mathcal{R} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  jestliže  $a_{11} = b_{22}$ .
- (x) Relace  $R$  na množině  $P$  všech reálných polynomů definovaná jako  $p(x)Rq(x)$  jestliže mají  $p$  a  $q$  stejný stupeň.
- (xi) Relace  $R$  na množině  $P$  všech reálných polynomů definovaná jako  $p(x)Rq(x)$  jestliže mají  $p$  a  $q$  stejné reálné kořeny včetně násobnosti.
- (xii) Relace  $R$  na množině  $P$  všech reálných polynomů definovaná jako  $p(x)Rq(x)$  jestliže mají  $p$  a  $q$  stejné komplexní kořeny včetně násobnosti.
- Viz též cvičení 4a.5 a 4a.6.

**Cvičení 3b.8** (rutinní): Nechť  $A$  je množina řetězců z 26 malých anglických písmen. Určete vlastnosti relací daných na  $A$  následujícími podmínkami:

- $\alpha R \beta$  jestliže řetězce  $\alpha$  a  $\beta$  nemají žádná společná písmena;
- $\alpha R \beta$  jestliže řetězce  $\alpha$  a  $\beta$  sdílejí nějaká písmena;
- $\alpha R \beta$  jestliže řetězce  $\alpha$  a  $\beta$  nemají stejnou délku;
- $\alpha R \beta$  jestliže je řetězec  $\alpha$  delší než  $\beta$ .

**Cvičení 3b.9** (poučné, dobré): Uvažujme množinu  $A = \{a, b, c\}$ . Máme čtyři vlastnosti (reflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita), každá může a nemusí být splněna, což dává celkem  $2^4 = 16$  možností. Pro každou možnost vytvořte nějaký příklad relace na  $A$ .

**Cvičení 3b.10** (poučné): Dokažte, že pro libovolnou množinu  $A$  je  $\Delta(A)$  reflexivní, symetrická, antisymetrická a tranzitivní.

**Cvičení 3b.11** (poučné): Dokažte, že pro libovolnou množinu  $A$  a relaci  $R$  platí, že jestliže je  $R$  symetrická i antisymetrická, pak  $R \subseteq \Delta(A)$ .

**Cvičení 3b.12** (poučné, zkuškové): (i) Dokažte, že pro každou relaci  $R$  na libovolné množině  $A$  jsou  $R^{-1} \circ R$  a  $R \circ R^{-1}$  symetrické relace.

(ii) Jestliže pro každé  $a \in A$  existuje nějaké  $b \in A$  takové, že  $(a, b) \in R$ , pak jsou  $R^{-1} \circ R$  i  $R \circ R^{-1}$  reflexivní relace.

**Cvičení 3b.13** (rutinní): Nechť  $R$  je relace na množině  $A$ , nechť  $S$  je restrikce  $R$  na nějakou  $B \subseteq A$ . Dokažte následující (viz Fakt 3b.4):

- Jestliže  $R$  je reflexivní, pak  $S$  je reflexivní.
- Jestliže  $R$  je symetrická, pak  $S$  je symetrická.
- Jestliže  $R$  je antisymetrická, pak  $S$  je antisymetrická.

**Cvičení 3b.14** (dobré, zkuškové): Nechť  $R$  je relace na množině  $A$ , která je reflexivní a tranzitivní. Definujme relaci  $S$  na  $A$  předpisem  $aSb$  právě tehdy, jestliže  $aRb$  a  $bRa$  (rozmyslete si, že  $S = R \cap R^{-1}$ ).

Dokažte, že pak relace  $S$  je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Poznámka: Tímto způsobem lze z relace  $\leq$  vytvořit relaci  $=$  na číslech.

**Cvičení 3b.15** (rutinní, zkuškové): Nechť  $R$  je relace na nějaké množině  $A$ . Dokažte následující (viz Věta 3b.5):

- $R$  je reflexivní právě tehdy, když  $\Delta(A) \subseteq R$ .
- $R$  je symetrická právě tehdy, když  $R = R^{-1}$ .
- $R$  je antisymetrická právě tehdy, když  $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta(A)$
- $R$  je tranzitivní právě tehdy, když  $R^2 \subseteq R$ .

**Cvičení 3b.16** (rutinní, poučné, zkuškové): Dokažte následující tvrzení pro relaci  $R$  na množině  $A$ . Jestliže je  $R$  reflexivní, pak  $R \subseteq R^n$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ .

**Cvičení 3b.17** (rutinní, poučné, zkuškové): Necht' jsou  $R_1$  a  $R_2$  relace na stejné množině  $A$  s maticemi  $M_1$  a  $M_2$ . Dokažte, že  $R_1 \subseteq R_2$  právě tehdy, když  $M_1 \leq M_2$  (viz Fakt 3b.7).

**Cvičení 3b.18** (rutinní, poučné, zkuškové): Necht' je  $R$  relace na nějaké  $n$ -prvkové množině  $A$  a necht' je  $M$  její reprezentující matice. Dokažte následující (viz Věta 3b.8):

- (i)  $R$  je reflexivní právě tehdy, když  $E_n \leq M$ .
- (ii)  $R$  je symetrická právě tehdy, je-li  $M$  symetrická.
- (iii)  $R$  je tranzitivní právě tehdy, když  $M^{[2]} \leq M$ .

**Cvičení 3b.19** (rutinní): Necht' pro  $i = 1, \dots, n$  je  $R_i$  relace na množině  $A_i$ . Necht'  $R$  je odpovídající součinnová relace na  $A = A_1 \times \dots \times A_n$ . Dokažte následující:

- (i) Jestliže jsou všechny  $R_i$  symetrické, pak je i  $R$  symetrická.
- (ii) Jestliže jsou všechny  $R_i$  antisymetrické, pak je i  $R$  antisymetrická.
- (iii) Jestliže jsou všechny  $R_i$  tranzitivní, pak je i  $R$  tranzitivní.

Viz Fakt 3b.10

**Cvičení 3b.20** (poučné, dobré): Najděte chybu v následujícím „důkazu“, že jestliže je nějaká relace  $R$  na  $A$  symetrická a tranzitivní, pak už musí být i reflexivní:

Necht'  $a \in A$ . Vezměme  $b \in A$  takové, aby  $aRb$ . Podle symetrie pak  $bRa$ , máme řetězec  $aRbRa$ , tedy podle tranzitivity  $aRa$ .

### Řešení:

**3b.1:** (i): R: ne, chybí smyčka třeba u 2; S: ne, protože třeba  $1R2$ , ale neplatí  $2R1$ ; A: ano, jediný případ s  $aRb$  a  $bRa$  je  $a = b = 1$ , což je v pořádku (alternativa: pro  $a \neq b$  nikdy nevedou šipky oběma směry); T: ne, je  $1R3$  a  $3R4$ , ale není  $1R4$ .

(ii): R: ne, chybí smyčka třeba u 1; S: ano, pro každou šipku je i zpět; A: ne, jsou dvojité šipky mezi dvěma různými prvky; T: ne, je  $1R4$  a  $4R1$ , ale není  $1R1$ .

**3b.2:** a) (i): R: ne, chybí třeba  $(2, 2)$ ; S: ne, protože třeba  $(1, 4) \in R$ , ale  $(4, 1) \notin R$ ; A: ano, jediný případ s  $(a, b) \in R$  a  $(b, a) \in R$  je  $a = b = 1$ , což je v pořádku; T: ne,  $(2, 1) \in R$  a  $(1, 4) \in R$ , ale  $(2, 4) \notin R$ .

a) (ii): R: ne, chybí třeba  $(1, 1)$ ; S: ne, protože třeba  $(1, 4) \in R$ , ale  $(4, 1) \notin R$ ; A: ano, jediný případ s  $(a, b) \in R$  a  $(b, a) \in R$  je  $a = b = 2$ , což je v pořádku; T: ano, jediný navazující případ je  $(1, 4) \in R$  a  $(4, 3) \in R$ , opravdu  $(1, 3) \in R$ .

**3b.3:** Testy: Reflexivita znamená, že matice musí mít 1 všude na diagonále. Symetrie: matice musí být symetrická. Antisymetrie: porovnáváme dvojice čísel symetrické podle diagonály, nesmí být obě zároveň 1. Tranzitivita: Jedna možnost je použít Booleanovský součin. Druhá možnost je vypsát si z matice všechny nediagonální jedničky jako dvojice v relaci a zkoumat tranzitivitu na nich.

(i): R, neplatí T protože  $4R3$  a  $3R2$ ; (ii): S; (iii): R, A, T.

**3b.4:** R, S, T.

**3b.5:** (i): R: Pro každé  $a \in \mathbb{Z}$  platí  $|a| = |a|$ , proto  $aRa$ . Reflexivní.

S: Libovolné  $a, b \in \mathbb{Z}$  splňující  $aRb$ , to dává  $|a| = |b|$ , proto  $|b| = |a|$  a tedy  $bRa$ . Symetrická.

A: Libovolné  $a, b \in \mathbb{Z}$  splňující  $aRb$  a  $bRa$ , to dává  $|a| = |b|$  a  $|b| = |a|$ , z toho asi  $a = b$  nedostaneme. Protipříklad:  $|-13| = |13|$ , proto  $13R(-13)$  a  $(-13)R13$ , ale neplatí  $-13 = 13$ , tedy  $R$  není antisymetrická.

T: Libovolné  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  splňující  $aRb$  a  $bRc$ , to dává  $|a| = |b|$  a  $|b| = |c|$ , z toho hned máme  $|a| = |c|$  a tedy  $aRc$ .  $R$  je tranzitivní.

(ii): R: ano, pro  $a \in A$  je  $a \geq a$ , tedy  $aRa$ ; S: ne,  $2R1$  neboť  $2 \geq 1$ , ale neplatí  $1 \geq 2$  tedy neplatí  $1R2$ ;

A: ano,  $aRb \wedge bRa \implies a \geq b \wedge b \geq a \implies a = b$ ; T: ano,  $aRb \wedge bRc \implies a \geq b \wedge b \geq c \implies a \geq c \implies aRc$ .

(iii): R: ne, třeba neplatí  $1 \neq 1$  proto neplatí  $1R1$ ; S: ano,  $aRb \implies a \neq b \implies b \neq a \implies bRa$ ;

A: ne, třeba  $1R2 \wedge 2R1$ , ale neplatí  $1 = 2$ ; T: ne, třeba  $1R2$  a  $2R1$ , ale neplatí  $1R1$ .

(iv): R: ano,  $a - a = 2 \cdot 0 \implies aRa$  pro každé  $a$ ; S: ano,  $aRb \implies a - b = 2k \implies b - a = 2(-k) \implies bRa$ ;

A: ne, třeba  $1R3$  a  $3R1$ , přesto neplatí  $1 = 3$ ;

T: ano,  $aRb \wedge bRc \implies a - b = 2k \wedge b - c = 2l \implies a - c = 2(k + l) \implies aRc$ .

(v): R: ne, neplatí  $13 = 13 + 1$  a proto neplatí  $13R13$ ; S: ne,  $2R1$  ale neplatí  $1R2$ ;

A: ano,  $aRb \wedge bRa \implies a = b + 1 \wedge b = a + 1 \implies b = b + 2 \implies 0 = 2$  spor, předpoklad nikdy nenastane, proto implikace vždy platí; T: ne, třeba  $3R2$  a  $2R1$ , ale neplatí  $3R1$ .

(vi): Není R viz  $a = 2$ ; není S viz  $4R2$ ; A:  $aRb \wedge bRa \implies a \geq b^2 \wedge b \geq a^2$ . Pokud  $a = 0$ , tak to dává  $0 \geq b^2 \implies b = 0 = a$ . Pokud  $a \neq 0$ , pak  $|a| \geq 1$ , také  $a \geq b^2 \geq 0$  a proto  $a \geq 1$ , podobně  $b \geq 1$ . Počítáme:  $a \geq b^2 \wedge b \geq a^2 \implies a \geq b^2 \geq a^4 \implies a \geq a^4 \implies 1 \geq a^3$ , spolu s  $a \geq 1$  to dává  $a = 1$ . Pak  $1 \geq b^2 \geq 1 \implies b = 1$  a zase  $a = b$ . Relace je antisymetrická.

T: Pro  $b \in \mathbb{Z}$  platí  $b^2 \geq b$  (viz A), proto  $aRb \wedge bRc \implies a \geq b^2 \wedge b \geq c^2 \implies a \geq b \geq c^2 \implies a \geq c^2 \implies aRc$ .  
Je tranzitivní.

(vii): R: Má každé  $a \in \mathbb{Z}$  nějakého společného dělitele samo se sebou jiného než 1? Skoro ano, neplatí to pro  $a = 1$ .  
Takže R není reflexivní.

S: Necht'  $a, b \in \mathbb{Z}$  splňují  $aRb$ . Pak existuje  $c > 1$ , které dělí  $a$  i  $b$ , to pak dělí i  $b$  a  $a$ , tedy  $bRa$ . R je symetrická.

A:  $aRb \wedge bRa$  dává společného dělitele, není šance vynutit  $a = b$ . Protipříklad:  $2R4$  a  $4R2$  (společný dělitel 2),  
proto není antisymetrická.

T:  $a, b$  mají společného dělitele  $> 1$ ,  $b, c$  mají společného dělitele  $> 1$ , z toho nic společného pro  $a, c$  neplyne.  
Protipříklad:  $2R6$  a  $6R3$ , ale neplatí  $2R3$ . Není tranzitivní.

**3b.6:** (i): R, S, T, viz příklad 4a.e;

(ii): R ano  $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$ , S ano  $y - x \in \mathbb{Q} \implies x - y = -(y - x) \in \mathbb{Q}$ , T ano  $y - x \in \mathbb{Q} \wedge (z - y) \in \mathbb{Q} \implies (z - x) = (y - x) + (z - y) \in \mathbb{Q}$ ; není A viz 1R2 a 2R1;

(iii): R ano  $xx = x^2 \geq 0$ , S ano  $xy \geq 0 \implies yx \geq 0$ ; není A viz 1R2 a 2R1; není T viz  $(-1)R0$  a  $0R1$ ;

(iv): Není R viz  $x = 0$ , S ano  $xy \geq 1 \implies yx \geq 1$ ; není A viz 2R1 a 1R2; není T viz  $\frac{1}{2}R4$  a  $4R1$ ;

(v): Není R viz  $x = 2$ ; není S viz 4R2; A ano  $x = y^2 \wedge y = x^2 \implies x, y \geq 0 \wedge x = x^4 \wedge y = y^4 \implies x = y = 1 \vee x = y = 0$ ; není T viz 16R4 a 4R2;

(vi): Není R viz  $x = 2$ ; není S viz 4R2; není A viz  $x = 0.1, y = 0.2$  neboť  $0.1 \geq (0.2)^2$  a  $0.2 \geq (0.1)^2$  ale neplatí  $0.1 = 2$ ; není T viz  $(0.5)R(0.7)$  neboť  $0.5 \geq (0.7)^2 = 0.49$ ,  $(0.7)R(0.8)$  neboť  $0.7 \geq 0.64$ , ale není  $0.5 \geq 0.64$  (tohle asi bylo drobet zákeřné).

(vii): R ano  $|x| \leq |x|$ , T ano  $|x| \leq |y| \wedge |y| \leq |z| \implies |x| \leq |z|$ ; není S viz 1R2, není A viz  $1R(-1)$  a  $(-1)R2$ .

**3b.7:** (i): R: ano  $u^2 - v = u^2 - v \implies (u, v)R(u, v)$ ; S:  $(u, v)R(x, y) \implies u^2 - y = x^2 - v$

$\implies x^2 - v = u^2 - y \implies (x, y)R(u, v)$  ano; A: ne viz třeba  $(1, 4)R(2, 1)$  a  $(2, 1)R(1, 4)$ ;

T: ano;  $(s, t)R(u, v) \ \& \ (u, v)R(x, y) \implies s^2 - v = u^2 - t \wedge u^2 - y = x^2 - v$  sečíst  $s^2 - v + u^2 - y = u^2 - t + x^2 - v \implies s^2 - y = x^2 - t \implies (s, t)R(x, y)$ .

(ii): R: ne viz třeba  $(2, 3)$ , neplatí  $2^2 - 3 = 3^2 - 2$ ; S: ne viz třeba  $(2, 1)R(1, 4)$  ale neplatí  $(1, 4)R(2, 1)$ ; A: ne viz třeba  $(1, 0)R(0, 1)$  a  $(0, 1)R(1, 0)$ ; T: ne viz třeba  $(1, 4)R(2, 1)$  a  $(2, 1)R(1, 4)$  ale neplatí  $(1, 4)R(1, 4)$ .

(iii): přepis:  $(u, v)R(x, y) \iff (u - x)^2 + (v - y)^2 = 13$ ; R: ne  $(u - u)^2 + (v - v)^2 = 0 \neq 13$ ;

S: ano  $(u, v)R(x, y) \implies (u - x)^2 + (v - y)^2 = 13 \implies (x - u)^2 + (y - v)^2 = 13 \implies (x, y)R(u, v)$ ; A: ne třeba  $(4, 3)R(1, 1)$  a  $(1, 1)R(4, 3)$ ; T: ne třeba  $(4, 3)R(1, 1)$  a  $(1, 1)R(4, 3)$  ale neplatí  $(4, 3)R(4, 3)$ .

(iv): přepis:  $(u, v)R(x, y) \iff (u - x) + (v - y) = 0$ ; R: ano  $(u - u) + (v - v) = 0$ ;

S: ano  $(u, v)R(x, y) \implies (u - x) + (v - y) = 0 \implies (x - u) + (y - v) = 0 \implies (x, y)R(u, v)$ ; A: ne třeba  $(1, 3)R(2, 2)$  a  $(2, 2)R(1, 3)$ ; T: ano  $(s, t)R(u, v) \wedge (u, v)R(x, y) \implies (s - u) + (t - v) = 0 \wedge (u - x) + (v - y) = 0$  sečíst rovnice:  $(s - x) + (t - y) = 0 \implies (s, t)R(x, y)$ .

(v): R: ne, to by muselo každé zobrazení splňovat  $T(0)T(0) = 2$ , ale například zobrazení  $T(n) = n + 1$  má  $T(0)T(0) = 1 \cdot 1 = 1$ ;

S: ano  $T \mathcal{R} S \implies T(0)S(0) = 2 \implies S(0)T(0) = 2 \implies S \mathcal{R} T$ ; A: ne třeba  $T(n) = n + 1, S(n) = 3n + 2$ , pak  $T(0)S(0) = 1 \cdot 2 = 2 = S(0)T(0)$ , tedy  $T \mathcal{R} S$  a  $S \mathcal{R} T$ , ale není  $T = S$ ; T: ne třeba  $T(n) = n + 1, S(n) = 3n + 2, U(n) = (n + 1)^2$ , pak  $T \mathcal{R} S$  a  $S \mathcal{R} U$ , ale neplatí  $T \mathcal{R} U$ , protože  $T(0)U(0) = 1$ .

(vi): R: ne, to by muselo každé zobrazení splňovat  $T(1) = T(2)$ , ale například zobrazení  $T(n) = n$  má  $T(1) = 1$  a  $T(2) = 2$ ;

S: ne, třeba  $T(n) = n + 1$  a  $S(n) = n$ , pak  $T(1) = 1 = S(2)$ , proto  $T \mathcal{R} S$ , ale neplatí  $S(1) = T(2)$ ; A: ne třeba  $T(n) = (2n - 3)^2, S(n) = 1$  (konstantní zobrazení), pak  $T(1) = 1 = S(2)$  a  $S(1) = 1 = T(2)$ , tedy  $T \mathcal{R} S$  a  $S \mathcal{R} T$ , ale není  $T = S$ ; T: ne třeba  $T(n) = n + 1, S(n) = n, U(n) = n - 1$ , pak  $T \mathcal{R} S$  a  $S \mathcal{R} U$ , ale neplatí  $T \mathcal{R} U$ , protože  $T(1) = 2$  a  $U(2) = 1$ .

(vii): R: ano, libovolná funkce  $f$  splňuje pro každé  $x \in \mathbb{R}$  nerovnost  $f(x) \geq f(x)$ ; S: ne, třeba  $f(x) = x + 13, g(x) = x$  splňují  $f \mathcal{R} g$  ale ne  $g \mathcal{R} f$ ; A: ano,  $f \mathcal{R} g$  a  $g \mathcal{R} f$  znamená  $f(x) \geq g(x)$  a  $g(x) \geq f(x)$  pro všechna  $x$  neboli  $f(x) = g(x)$  pro všechna  $x$  neboli  $f = g$ ; T: ano,  $f \mathcal{R} g$  a  $g \mathcal{R} h$  dává pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ :  $f(x) \geq g(x)$  a  $g(x) \geq h(x)$  neboli  $f(x) \geq h(x)$ , takže  $f \mathcal{R} h$ .

(viii): R: ano  $|A| = |A|$ ; S: ano  $A \mathcal{R} B \implies |A| = |B| \implies |B| = |A| \implies B \mathcal{R} A$ ; A: ne třeba matice ze samých nul a nenulová matice s opakujícími se řádky mají obě nulový determinant;

T: ano  $A \mathcal{R} B \wedge B \mathcal{R} C \implies |A| = |B| \wedge |B| = |C| \implies |A| = |C| \implies A \mathcal{R} C$ .

(ix): R: ne, třeba u matice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  se nerovnejí levý horní a pravý dolní roh, proto neplatí  $A \mathcal{R} A$ ;

S: ne, třeba pro  $A = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$  a  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$  platí  $A \mathcal{R} B$ , ale ne  $B \mathcal{R} A$ ;

A: ne, třeba  $A = \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ -1 & 23 \end{pmatrix}$  a  $B = \begin{pmatrix} 23 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$  splňují  $A \mathcal{R} B$  a  $B \mathcal{R} A$ , ale nesplňují  $A = B$ ;



T: ne, třeba  $A = \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ -1 & 23 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 23 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$  a  $C = \begin{pmatrix} 14 & -3 \\ 5 & 23 \end{pmatrix}$  splňují  $ARB$  a  $BRC$ , ale nesplňují  $ARC$ .

(x): R: ano  $\text{st}(p) = \text{st}(p)$ ; S: ano  $pRq \implies \text{st}(p) = \text{st}(q) \implies \text{st}(q) = \text{st}(p) \implies qRp$ ; A: ne třeba  $p = x$  a  $q = 2x + 1$ ; T: ano  $pRq \wedge qRr \implies \text{st}(p) = \text{st}(q) \wedge \text{st}(q) = \text{st}(r) \implies \text{st}(p) = \text{st}(r) \implies pRr$ ;

(xi): R: ano; S: ano; A: ne třeba  $p = x - 1$  a  $q = 2x - 2$ ; T: ano;

(xii): R: ano; S: ano; A: ne třeba  $p = x - 1$  a  $q = 2x - 2$ ; T: ano;

**3b.8:** (i): S; (ii): R,S; (iii): S; (iv): A,T.

**3b.9:** Nic nemá  $R = \{(a, b), (b, a), (b, c)\}$ : Chybí  $(a, a)$  proto není R, k  $bRc$  chybí  $cRb$  proto není S, je tam  $aRb$  a  $bRa$  pro  $a \neq b$  proto není A, je tam  $aRbRc$  ale ne  $aRc$  proto není T.

Dále jen zkratky, třeba  $R_{R,A}$  bude relace, která je reflexivní a antisymetrická, ale není nic jiného (to se také musí zajistit a ověřit).

$R_T = \{(a, b), (b, a), (b, c), (a, a), (b, b), (a, c)\}$ ,  $R_A = \{(a, b), (b, c)\}$ ,  $R_{A,T} = \{(a, b)\}$ ,  $R_S = \{(a, b), (b, a)\}$ ,

$R_{S,T} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ ,  $R_{S,A,T} = \{(a, a)\}$ ,  $R_R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c)\}$ ,

$R_{R,T} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (a, c)\}$ ,  $R_{R,A} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c)\}$ ,

$R_{R,A,T} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$ ,  $R_{R,S} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$ ,

$R_{R,S,T} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$ ,  $R_{R,S,A,T} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ .

Relaci, která je symetrická a antisymetrická, ale není tranzitivní, nelze vytvořit, viz cvičení 3b.11.

**3b.10:** R: přímo z definice  $(a, a) \in \Delta(A)$ ; S: Jestliže  $(a, b) \in \Delta(A)$ , pak  $b = a$ , proto  $(b, a) = (a, a) = (a, b)$  a tedy  $(b, a) \in \Delta(A)$ ; A: Nechť  $(a, b) \in \Delta(A) \wedge (b, a) \in \Delta(A)$ , už z toho prvního je  $a = b$ ;

T: Nechť  $(a, b) \in \Delta(A) \wedge (b, c) \in \Delta(A)$ , pak  $a = b = c$  a tedy  $(a, c) = (a, a) \in \Delta(A)$ .

**3b.11:** Nechť  $(a, b) \in R$ . Ze symetrie také  $(b, a) \in R$ , tedy z antisymetrie  $a = b$  a proto  $(a, b) = (a, a) \in \Delta(A)$ .

**3b.12:** (i) Pro  $R^{-1} \circ R$ : Nechť  $(a, b) \in R^{-1} \circ R$ . Pak  $\exists x \in A$  aby  $(a, x) \in R$  a  $(x, b) \in R^{-1}$ . Odtud podle definice inverzní relace  $(x, a) \in R^{-1} \wedge (b, x) \in R \implies (b, x) \in R$  a  $(x, a) \in R^{-1}$ , tedy  $(b, a) \in R^{-1} \circ R$ .

Důkaz pro  $R \circ R^{-1}$  je obdobný.

(ii): Nechť  $a \in A$ . Pak  $\exists b \in A$ :  $(a, b) \in R$ . Pak  $(b, a) \in R^{-1}$ , máme  $aRbR^{-1}a$ , tedy  $(a, a) \in R^{-1} \circ R$ .

**3b.13:** (i): Nechť  $a \in B$ . Pak  $a \in A$ , proto  $(a, a) \in R$ , a jelikož také  $(a, a) \in B \times B$ , tak  $(a, a) \in S$ .

(ii): Nechť  $a, b \in B$  jsou takové, že  $(a, b) \in S$ . Protože  $S \subseteq R$ , pak  $(a, b) \in R$  a ze symetrie  $R$  dostaneme  $(b, a) \in R$ . Ale také  $(b, a) \in B \times B$ , proto  $(b, a) \in S$ .

(iii): Nechť  $a, b \in B$  jsou takové, že  $(a, b) \in S$  a  $(b, a) \in S$ . Protože  $S \subseteq R$ , pak  $(a, b) \in R$  a  $(b, a) \in R$ , z antisymetrie  $R$  pak hned dostaneme  $a = b$ .

**3b.14:** R: Pro  $a \in A$  je díky reflexivitě  $S$  jak  $aSa$ , tak  $aSa$  (opačné pořadí), proto  $aRa$ .

S: Nechť  $aRb$ . Pak podle definice  $aSb$  a  $bSa$ , proto také  $bSa$  a  $aSb$  a tedy  $bRa$ .

T: Nechť  $aRb$  a  $bRc$ . Pak podle definice  $aSb$  a  $bSa$  a také  $bSc$  a  $cSa$ . Jinými slovy, platí  $aSb$  a  $bSc$ , ptoto z tranzitivity  $S$  máme  $aSc$ , podobně i  $cSa$  a tedy  $aRc$ .

**3b.15:** (i): 1) Je-li  $R$  reflexivní, pak  $\forall a \in A$ :  $(a, a) \in R$ , tedy  $\Delta(A) \subseteq R$ .

2): Jestliže naopak  $\Delta(A) \subseteq R$ , pak  $\forall a \in A$ :  $(a, a) \in \Delta(A) \subseteq R$ , tedy  $(a, a) \in R$  a  $R$  je reflexivní.

(ii): 1) Nechť je  $R$  je symetrická. Chceme ukázat  $R = R^{-1}$ .

Nechť  $a, b \in A$  splňují  $(a, b) \in R$ . Pak podle symetrie také  $(b, a) \in R$  a proto dle definice inverzní relace  $(a, b) \in R^{-1}$ . Takže  $R \subseteq R^{-1}$ .

Naopak nechť  $(a, b) \in R^{-1}$ . Pak  $(b, a) \in R$  a podle symetrie  $(a, b) \in R$ . Takže také  $R^{-1} \subseteq R$ .

2) Teď předpokládejme, že  $R = R^{-1}$ , potřebujeme ukázat, že  $R$  je symetrická.

Jestliže  $a, b \in A$  jsou takové, že  $(a, b) \in R$ , pak podle  $R^{-1} \subseteq R$  nutně musí být  $(a, b) \in R^{-1}$  a tedy podle definice inverzní relace  $(b, a) \in R$ .  $R$  je tedy opravdu symetrická.

(iii): 1) Nechť je  $R$  je antisymetrická. Potřebujeme ukázat, že  $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta(A)$ .

Vezměme libovolné  $(a, b) \in R \cap R^{-1}$ . Pak  $(a, b) \in R$  a také  $(a, b) \in R^{-1}$ , tedy podle definice  $(b, a) \in R$ . Protože  $(a, b)$  i  $(b, a)$  jsou v  $R$ , podle antisymetrie nutně  $a = b$  a proto  $(a, b) \in \Delta(A)$ .

2) Teď předpokládejme  $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta(A)$ , potřebujeme ukázat, že  $R$  je antisymetrická. Nechť tedy  $a, b \in A$  jsou takové, že  $(a, b) \in R$  a  $(b, a) \in R$ . Z toho druhého máme  $(a, b) \in R^{-1}$ , takže  $(a, b) \in R \cap R^{-1}$ . To je ale podmnožina  $\Delta(A)$ , takže  $(a, b) \in \Delta(A)$ . To je ovšem možné jen tehdy, když  $a = b$ .

(iv): 1) Nejprve předpokládejme, že  $R$  je tranzitivní, potřebujeme ukázat, že  $R^2 \subseteq R$ .

Vezměme tedy libovolné  $(a, b) \in R^2 = R \circ R$ . Pak podle definice skládání musí existovat  $x \in A$  takové, že  $(a, x) \in R$  a  $(x, b) \in R$ . Podle tranzitivity potom také  $(a, b) \in R$ .

2) Předpokládejme naopak, že  $R^2 \subseteq R$ , chceme z toho vyvodit tranzitivitu.

Vezměme teď libovolné  $a, b, c \in A$  takové, že  $(a, b) \in R$  a  $(b, c) \in R$ . Pak podle definice skládání  $(a, c) \in R \circ R = R^2$ . Předpoklad pak dává  $(a, c) \in R$ .

**3b.16:** Indukcí: (0)  $n = 1$ :  $R \subseteq R = R^1$ .

(1) Předpoklad:  $R \subseteq R^n$ .

Nechť  $(a, b) \in R$ . Pak  $(a, b) \in R^n$ , podle reflexivity  $(b, b) \in R$  a proto  $(a, b) \in R \circ R^n = R^{n+1}$ . Proto  $R \subseteq R^{n+1}$ .

**3b.17:** 1) Předpoklad  $R_1 \subseteq R_2$ . Kdyby  $m_{1,ij} = 0$ , pak  $m_{1,ij} \leq m_{2,ij}$ , neboť jde o 01-matice. Kdyby  $m_{1,ij} = 1$ , pak  $(a_i, a_j) \in R_1$ , proto  $(a_i, a_j) \in R_2$  a  $m_{2,ij} = 1$ , tedy každopádně  $m_{1,ij} \leq m_{2,ij}$ .

2) Předpoklad  $M_1 \leq M_2$ . Když  $(a_i, a_j) \in R_1$ , tak  $m_{1,ij} = 1$ , z  $m_{1,ij} \leq m_{2,ij}$  také  $m_{2,ij} = 1$  (je to 01-matice), proto  $(a_i, a_j) \in R_2$ . Dokázáno  $R_1 \subseteq R_2$ .

**3b.18:** (i): Předpoklad  $R$  je reflexivní. Pro  $i \neq j$  je  $e_{ij} = 0$ , proto  $e_{ij} \leq m_{ij}$ . Pro  $i = j$  je  $(a_i, a_i) \in R$ , proto  $m_{ij} = 1$  a  $e_{ij} \leq m_{ij}$ .

Předpoklad  $E_n \leq M$ . Pro každé  $i$  je  $m_{ii} \geq e_{ii} = 1$ , tedy  $m_{ii} = 1$  a  $(a_i, a_i) \in R$ .

(ii): Předpoklad  $R$  symetrická. Když  $m_{ij} = 1$ , pak  $(a_i, a_j) \in R$ , proto  $(a_j, a_i) \in R$  a  $m_{ji} = 1$ , tedy  $m_{ij} = m_{ji}$ . Když  $m_{ij} = 0$ , pak  $(a_i, a_j) \notin R$ , proto  $(a_j, a_i) \notin R$  a  $m_{ji} = 0$ , tedy každopádně  $m_{ij} = m_{ji}$ .

Předpoklad  $M$  symetrická. Když  $(a_i, a_j) \in R$ , tak  $m_{ij} = 1$ , pak  $m_{ji} = 1$  a  $(a_j, a_i) \in R$ .

(iii): Dle Věty 3b.5 je  $R$  tranzitivní právě tehdy, když  $R^2 \subseteq R$ , což je dle (i) právě tehdy, když  $M_{R^2} \leq M$ , což je dle Věty 3a.10 právě tehdy, když  $M^{[2]} \leq M$ .

**3b.19:** S:  $(a_i)S(b_i) \implies a_i R_i b_i$  pro všechna  $i$ . Protože jsou všechny  $R_i$  symetrické, máme  $b_i R_i a_i$  pro všechna  $i$ , tedy  $(b_i)R(a_i)$ .

A:  $(a_i)R(b_i)$  a  $(b_i)R(a_i) \implies \forall i: a_i R_i b_i$  a  $b_i R_i a_i$ . Protože jsou všechny  $R_i$  antisymetrické, máme  $a_i = b_i$  pro všechna  $i$ , tedy  $(a_i) = (b_i)$ .

T:  $(a_i)R(b_i)$  a  $(b_i)R(c_i) \implies a_i R_i b_i$  a  $b_i R_i c_i$  pro všechna  $i$ , z tranzitivit  $R_i$  tedy  $a_i R_i c_i$  pro všechna  $i$ , proto  $(a_i)R(c_i)$ .

**3b.20:** Jak víme, že k danému  $a$  existuje  $b$ , které je s ním v relaci?

### 3c. Další vlastnosti relací

V této sekci se blíže podíváme na operace a vlastnosti. Je to kapitola spíše doplňková, nicméně pro čtenáře, kteří se budou relacemi zabývat hlouběji, stále velice užitečná. Většina tvrzení nebude obtížná a není ani třeba se je učit nazpaměť, opět je cílem zamyslet se nad fungováním relací, ujistit se, že jim rozumíme, a potrénovat si vytváření důkazů.

Připomeňme definici diagonální relace:  $\Delta(A) = \{(a, a) \in A \times A; a \in A\}$ . Jakožto podmnožina  $A \times A$  splňuje podmínku na zobrazení, takže je to i zobrazení, jmenovitě identita  $i_A$  na množině. V teorii relací hraje obdobnou roli jako u zobrazení.

#### Fakt 3c.1.

Nechť  $R$  je relace z množiny  $A$  do množiny  $B$ . Pak  $R \circ \Delta(A) = R$  a  $\Delta(B) \circ R = R$ .

Platí také, že  $[\Delta(A)]^n = \Delta(A)$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ , důkazy jsou snadné a necháváme je jako cvičení 3c.1 a 3c.2.

Připomeňme, že je-li  $T: A \mapsto A$  zobrazení, které je invertibilní, tak nám složení  $T^{-1} \circ T$  i  $T \circ T^{-1}$  dalo vždy identitu na  $A$ . Jak to vypadá u relací? Protože inverzní relace existuje vždycky, máme méně omezení a tudíž se dá čekat, že také máme větší rozsah výsledků. A je tomu tak, u relací se o  $R^{-1} \circ R$  či  $R \circ R^{-1}$  dá říct jediné to, tyto nová relace nejsou prázdné, pokud  $R \neq \emptyset$ . Jinak je možné cokoliv, rozhodně nemůžeme čekat, že by vyšla diagonální relace.

#### Příklad 3c.a:

Uvažujme množinu  $A = \{1, 3, 5, 7, 11, 13\}$  a definujme relaci  $R$  na  $A$  předpisem  $aRb$  jestliže  $a$  dělí  $b$  (viz kapitola 6a). Máme

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (1, 11), (1, 13)\}, \quad R^{-1} = \{(1, 1), (3, 1), (5, 1), (7, 1), (11, 1), (13, 1)\}.$$

Pak jediné navazující dvojice, které jsme schopni z  $R$  a  $R^{-1}$  vytvořit, jsou typu  $1RaR^{-1}1$ , proto  $R^{-1} \circ R = \{(1, 1)\}$ .

V opačném pořadí je výsledná relace naopak bohatší, protože pro libovolná  $a, b \in A$  máme  $aR^{-1}1Rb$ . Máme proto  $R \circ R^{-1} = A \times A$ .

Tento příklad ukázal, že není těžké získat přímo extrémní výsledky, minimální možný (nejmenší neprázdná množina) a maximální možný (relace s úplně všemi dvojicemi).

△

Pro relace jsme zavedli různé operace (množinové, inverze, skládání). Jak se chovají vůči základním čtyřem vlastnostem? Doporučujeme, aby si čtenář nejprve na rozličných konkrétních případech zkusil rozmyslet, jak to funguje a proč asi následující tvrzení platí.

**Fakt 3c.2.**

Nechť  $R_1$  a  $R_2$  jsou relace na množině  $A$ .

- (i) Jestliže jsou  $R_1$  a  $R_2$  reflexivní, tak jsou  $R_1 \cup R_2$  a  $R_1 \cap R_2$  reflexivní a  $R_1 - R_2$  nikdy není reflexivní.
- (ii) Jestliže jsou  $R_1$  a  $R_2$  symetrické, tak jsou  $R_1 \cup R_2$ ,  $R_1 \cap R_2$  a  $R_1 - R_2$  symetrické.
- (iii) Jestliže jsou  $R_1$  a  $R_2$  antisymetrické, tak jsou  $R_1 \cap R_2$  a  $R_1 - R_2$  antisymetrické.
- (iv) Jestliže jsou  $R_1$  a  $R_2$  tranzitivní, tak je  $R_1 \cap R_2$  tranzitivní.

Důkaz necháme zčásti jako cvičení 3c.3, ukážeme jen pár zajímavějších momentů. Protože zde používáme množinové operace, bude rozumnější pracovat s relacemi jako s množinami (což je konec konců jejich definice), tedy psát správně  $(a, b) \in R$  namísto pohodlné zkratky  $aRb$ .

**Důkaz (rutinní):** (i):  $R_1 - R_2$  není reflexivní: Nechť  $a \in A$ . Protože je  $R_1$  reflexivní, je  $(a, a) \in R_1$ . Podobně ale také  $(a, a) \in R_2$ , proto  $(a, a)$  neleží v  $R_1 - R_2$ .

(ii):  $R_1 \cap R_2$  symetrická: Nechť  $a, b \in A$  splňují  $(a, b) \in R_1 \cap R_2$ . To znamená, že  $(a, b) \in R_1$  a  $(a, b) \in R_2$ . Obě relace jsou symetrické, proto  $(b, a) \in R_1$  a  $(b, a) \in R_2$ , tedy  $(b, a) \in R_1 \cap R_2$ .

$R_1 - R_2$  symetrická: Nechť  $a, b \in A$  splňují  $(a, b) \in R_1 - R_2$ . Pak  $(a, b) \in R_1$  a ta je symetrická, proto i  $(b, a) \in R_1$ . Potřebujeme ukázat, že je také v  $R_1 - R_2$ . Mohlo by se stát, že  $(b, a) \in R_2$ ? Nemohlo. Kdyby totiž  $(b, a) \in R_2$ , tak z její symetrie je i  $(a, b) \in R_2$ , což je ve sporu s  $(a, b) \in R_1 - R_2$ . Takže  $(b, a) \notin R_2$  a máme  $(b, a) \in R_1 - R_2$ .

(iii)  $R_1 - R_2$  antisymetrická: Nechť  $(a, b) \in R_1 - R_2$  a  $(b, a) \in R_1 - R_2$ . Pak  $(a, b) \in R_1$  a  $(b, a) \in R_1$ , ta je antisymetrická a proto  $a = b$ . □

Proč chybí v (iii) sjednocení? Zkusíme si takové tvrzení dokázat, ať vidíme, kde je zádrhel. Nechť  $a, b \in A$  jsou takové, že  $(a, b) \in R_1 \cup R_2$  a  $(b, a) \in R_1 \cup R_2$ . To znamená, že  $(a, b) \in R_1$  nebo  $(a, b) \in R_2$ , také  $(b, a) \in R_1$  nebo  $(b, a) \in R_2$ . Obě relace jsou antisymetrické, jenže my neumíme zajistit, aby  $(a, b)$  i  $(b, a)$  byly obě v jedné relaci, kde bychom pak mohli tu antisymetrii použít. Klidně mohly každá přijít z jiné relace, takže to vypadá, že antisymetrii dokázat neumíme. Zkusíme na tomto problému založit protipříklad, stačí k tomu  $A = \{1, 2\}$ .

$R_1 = \{(1, 2)\}$  je antisymetrická,  $R_2 = \{(2, 1)\}$  také, ale  $R_1 \cup R_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$  už není. Takže je dobře, že jsme v tvrzení (iii) vynechali sjednocení. Neplatí ale, že se to vždy zaručeně pokazí, protože se může stát, že se ty dvě relace dobře sejdou a sjednocení antisymetrické bude (konec konců, stačí vzít  $R_1 = R_2$ ).

Podobně si rozmyslete, kde se zarazí důkaz tranzitivity pro sjednocení a rozdíl (cvičení 3c.4), a ověřte, že protipříkladem pro sjednocení jsou třeba relace  $R_1 = \{(1, 2)\}$  a  $R_2 = \{(2, 3)\}$  na  $A = \{1, 2, 3\}$ , protipříkladem pro rozdíl třeba  $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$  a  $R_2 = \{(1, 3)\}$ .

**Fakt 3c.3.**

Nechť  $R$  je relace na množině  $A$ . Jestliže má některou ze čtyř základních vlastností, tak ji má  $R^{-1}$  také.

**Důkaz (rutinní):** Nechť je  $R$  tranzitivní. Vezměme  $a, b, c \in A$  takové, že  $(a, b) \in R^{-1}$  a  $(b, c) \in R^{-1}$ . Pak ale  $(c, b) \in R$  a  $(b, a) \in R$ , tudíž podle tranzitivity  $R$  platí  $(c, a) \in R$  čili  $(a, c) \in R^{-1}$ . Takže  $R^{-1}$  je tranzitivní.

Ostatní vlastnosti jsou snad ještě lehčí a necháme to jako cvičení 3c.5. □

Zbývá poslední operace.

**Fakt 3c.4.**

Nechť  $R$  a  $S$  jsou relace na množině  $A$ .

Jestliže jsou  $R$  a  $S$  reflexivní, pak je i  $S \circ R$  reflexivní.

**Důkaz (rutinní):** Nechť  $a \in A$ . Protože jsou  $R$  i  $S$  reflexivní, dostáváme  $aRa$  a  $aSa$ , takže podle definice  $(a, a) \in S \circ R$ . □

Určitě jste si všimli, že ve Faktu chybí symetrie, antisymetrie a tranzitivita. Kde je problém? Zkusme začít důkaz pro symetrii. Nechť  $a, b \in A$  splňují  $(a, b) \in S \circ R$ . Pak existuje  $x \in A$  takové, že  $aRx$  a  $xSb$ . Obě relace jsou symetrické, máme tedy  $bSx$  a  $xRa$ , tedy  $(b, a) \in R \circ S$ . Skoro, ale vedle, máme opačné pořadí v tom skládání; potřebovali bychom  $(b, a) \in S \circ R$ . Zkusme na tomto průšvihy založit protipříklad.

Relace  $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$  a  $S = \{(2, 3), (3, 2)\}$  jsou symetrické, ale  $S \circ R = \{(1, 3)\}$  není. Takže se symetrie při skládání opravdu obecně nezachová.

Mimochodem, pokud by bylo  $R = S$ , tak už náš problém odpadá, takže pro mocninu by náš pokus o důkaz prošel, viz níže.

Tedy ta antisymetrie. Zkusme si vzít  $a, b \in A$  takové, že  $(a, b) \in S \circ R$  a  $(b, a) \in S \circ R$ . Z toho prvního podle definice skládání dostaneme  $\exists x \in A: aRx$  a  $xSc$ . Z toho druhého zase dostaneme  $\exists y \in A: bRy$  a  $ySa$ . Máme tedy  $aRx$  a  $bRy$ , ale nemůžeme čekat, že by platilo  $a = b$  a  $x = y$ , abychom mohli použít antisymetrii relace  $R$ . Je to tedy podezřelé a další bádání ukáže, že oprávněně. Uvažujme relaci  $R = \{(1, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 1)\}$ . Tato relace je antisymetrická. Snadno se ale nahlédne, že  $R \circ R = R^2 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$ , což není ani náhodou relace antisymetrická (shodou okolností je ale symetrická).

Mimochodem jsme tím ukázali, že antisymetrie se nezachová ani umocňováním.

Pro tranzitivitu si důkaz zkusíte sami, abyste viděli, kde se zadrhne. Tradiční protipříklad, abyste věřili, že to nefunguje:  $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$  a  $S = \{(2, 3), (4, 5)\}$  jsou relace tranzitivní (žádné navazující dvojice ani jedna z nich nemá, tudíž tranzitivita platí triviálně), složením ale dostaneme  $Z = S \circ R = \{(1, 3), (3, 5)\}$ , kde lze vytvořit řetízek  $1Z3Z5$ , který na jeden krok nezvládneme, dvojice  $(1, 5)$  v té složenině není.

Skládání se tedy obecně k vlastnostem moc pěkně nechová, ale našťastí často skládáme jednu relaci se sebou a pak je to veselejší.

### Věta 3c.5.

Nechť  $R$  je relace na množině  $A$ .

- (i) Jestliže je  $R$  reflexivní, pak je  $R^n$  reflexivní pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ .
- (ii) Jestliže je  $R$  symetrická, pak je  $R^n$  symetrická pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ .
- (iii) Jestliže je  $R$  tranzitivní, pak je  $R^n$  tranzitivní pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ .

**Důkaz** (drsný, poučný): (i): Plyne okamžitě indukcí pomocí předchozího Faktu, viz Cvičení 3c.6.

Zbývající důkazy budou silně založeny na Lemmatu 3a.5 o cestách.

(ii): Nechť  $a, b \in A$  splňují  $(a, b) \in R^n$ . Pak existuje trasa délky  $n$  z  $a$  do  $b$ , řekněme  $aRc_2Rc_3R \cdots Rc_nRb$ . Protože je  $R$  symetrická, lze všechny dvojice  $c_iRc_{i+1}$  obrátit na  $c_{i+1}Rc_i$  a dostaneme trasu  $bRc_nRc_{n-1}R \cdots Rc_2Ra$  délky  $n$  z  $b$  do  $a$ , proto  $(b, a) \in R^n$ .

(iii): Nechť  $a, b, c \in A$  splňují  $(a, b) \in R^n$  a  $(b, c) \in R^n$ . Pak existuje trasa délky  $n$  z  $a$  do  $b$ , řekněme  $aR\hat{c}_2R \cdots R\hat{c}_nRb$ , a trasa délky  $n$  z  $b$  do  $c$ , řekněme  $bR\tilde{c}_2R \cdots R\tilde{c}_nRc$ . Protože  $\hat{c}_{n+1} = b = \tilde{c}_1$ , lze tyto trasy navázat a dostaneme trasu délky  $2n$ ,  $aR\hat{c}_2R \cdots R\hat{c}_nR\tilde{c}_1R\tilde{c}_2R \cdots R\tilde{c}_nRc$ .

Tato trasa obsahuje celkem  $2n$  relací, proto ji lze rozdělit na dvojice  $\hat{c}_1R\hat{c}_2R\hat{c}_3$ ,  $\hat{c}_3R\hat{c}_4R\hat{c}_5$ ,  $\dots$ ,  $\tilde{c}_{n-1}R\tilde{c}_nRc$ . Na každou z nich aplikujeme tranzitivitu a dostaneme dvojice  $\hat{c}_1R\hat{c}_3$ ,  $\hat{c}_3R\hat{c}_5$ ,  $\dots$ ,  $\tilde{c}_{n-1}Rc$ . Ty tvoří trasu z  $a$  do  $c$ , proto  $(a, c) \in R^n$  a je to hotovo.

Poznámka: Doporučujeme čtenáři, aby si rozmyslel, jak to zkracování probíhá v místě, kde se napojují původní dvě trasy, je třeba rozlišit případy  $n$  sudé a  $n$  liché. □

Připomeňme, že antisymetrie se mocninou zachovat nemusí.

## 3c.6 Uzávěry relace

Tato sekce je spíše doplňková, ale na druhou stranu občas docela zábavná.

Představte si, že máme relaci, která nemá určitou vlastnost, která nás zajímá. Naskýtá se nápad tu relaci doplnit přidáním některých dvojic tak, aby už tuto vlastnost měla. Například pokud relace není reflexivní, tak jí chybí některá z dvojic  $(a, a)$ , dodáním to napravíme. Protože ale neradi plýtváme, chceme to udělat přidáním co nejmenšího počtu prvků do relace. Zformulujeme to přesně.

### Definice.

Uvažujme nějakou relaci  $R$  na nějaké množině  $A$ . Je-li  $P$  některá z vlastností relace, pak definujeme  $P$ -uzávěr relace  $R$  jako relaci  $S$ , která má vlastnost  $P$ , obsahuje  $R$  (tj.  $R \subseteq S$ ) a  $S$  je nejmenší taková relace (přesně, je-li  $T$  relace s vlastností  $P$  splňující  $R \subseteq T$ , pak nutně  $S \subseteq T$ ).

U některých vlastností je vcelku jasné, co udělat, u tranzitivity to dá trochu práce.

**Věta 3c.7.**

Nechť  $R$  je relace na množině  $A$ .

- (i) Její **reflexivní uzávěr** (**reflexive closure**) je dán jako  $R \cup \Delta(A)$ .
- (ii) Její **symetrický uzávěr** (**symmetric closure**) je dán jako  $R \cup R^{-1}$ .
- (iii) Její **tranzitivní uzávěr** (**transitive closure**) je dán jako  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ .

Důkaz takového tvrzení se skládá ze dvou kroků, jednak musíme dokázat, že uvedená relace má opravdu požadovanou vlastnost, a pak musíme také dokázat, že to nejde s menší relací, tedy že jakmile máme nějakou „nadrelaci“ dané  $R$  s vlastností  $P$ , tak už je ta naše v ní také. Tyto důkazy provedeme, ale nebude z nich patrné, jak jsme vlastně k těm relacím došli, což je nepříjemné po toho, kdo se chce naučit takové věci vymýšlet. Proto se na problém nejprve podíváme neformálně, a to u tranzitivity, protože ty první dvě vlastnosti jsou relativně snadné.

Abychom z dané relace  $R$  vytvořili relaci tranzitivní, tak tam určitě musíme přidat všechny dvojice  $(a, c)$  takové, že existuje dvojkrok  $aRbRc$  pro nějaké  $b \in A$ , to jsou ale přesně dvojice z  $R^2$ . Přidáváme tedy k  $R$  relaci  $R^2$ . Označme  $S = R \cup R^2$ . Může to být hledaný uzávěr?

Jedna podmínka splněna je,  $R \subseteq S$ . Platí i následující: Jestliže je  $T$  nějaká relace, která je tranzitivní a  $R \subseteq T$ , pak podle našich úvah musí být i  $R^2 \subseteq T$ , tedy  $S \subseteq T$ . To znamená, že  $S$  splňuje podmínku minimality z definice. Je ale tranzitivní?

Obecně to bohužel neplatí. Potřebujeme zkontrolovat všechny dvojkroky  $aSbSc$  neboli dvojice  $(a, b) \in S$  a  $(b, c) \in S$ . Pro dvojice z  $S$  máme dva zdroje. Pokud by obě byly z  $R$ , tak už jsme je dříve uvažovali a máme zajištěno, že  $(a, c) \in S$ . Problém ale je, když přichází alespoň jedna z  $R^2$ . Taková dvojice vůbec nemusela být v  $R$ , tudíž nelze obecně zaručit, že jsme do  $S$  doplnili i výsledek dvojkroku.

Například u relace  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$  chybí zkratky  $(1, 3)$  a  $(2, 4)$ , ale když je doplníme, vznikne relace, ve které lze uvažovat dvojkrok  $(1, 3)$  a  $(3, 4)$ , jehož zkratka  $(1, 4)$  v doplněné relaci zase chybí.

V dalším kole bychom se tedy měli podívat na tyto nově vzniklé páry a doplnit příslušné zkratky. Navazující původní a nový pár se najde jako prvek  $R^3$ , dva navazující nové páry se najdou jako prvky  $R^2 \circ R^2 = R^4$ , takže i tyto musíme přidat. Tím ale mohly vzniknout nové páry atd. až do zblbnutí. Výsledný vzorec je nasnadě. Pokud vám něco připomíná, podívejte se na connectivity relation po Lemmatu 3a.5.

**Důkaz** (poučný, drsný): (ii): Nejprve je třeba ukázat, že  $R \cup R^{-1}$  je symetrická relace, to necháme jako cvičení 3c.8. Teď dokážeme tu minimalitu.

Nechť  $T$  je nějaká symetrická relace, která obsahuje  $R$ . Potřebujeme dokázat, že  $R \cup R^{-1} \subseteq T$ . Inkluzi  $R \subseteq T$  už máme od začátku, zbývá dokázat, že  $R^{-1} \subseteq T$ .

Nechť  $(a, b) \in R^{-1}$ . Pak  $(b, a) \in R$ , proto i  $(b, a) \in T$ . Ale  $T$  je symetrická, proto i  $(a, b) \in T$ . Důkaz hotov.

(iii): Označme  $R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ . Už podle definice je jasné, že  $R \subseteq R^*$ .

Je  $R^*$  tranzitivní? Předpokládejme, že  $(a, b) \in R^*$  a  $(b, c) \in R^*$ . Pak existují  $m, n \in \mathbb{N}$  takové, že  $(a, b) \in R^m$  a  $(b, c) \in R^n$ . Podle Lemmatu 3a.5 o cestách proto existuje trasa délky  $m$  z  $a$  do  $b$ , nazvěme její prvky  $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{m+1}$ , a existuje trasa délky  $n$  z  $b$  do  $c$ , nazvěme její prvky  $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{n+1}$ . Všimněte si, že  $\tilde{c}_{m+1} = b = \hat{c}_1$ . Teď tyto trasy napojíme: Definujeme  $c_i = \tilde{c}_i$  pro  $i = 1, \dots, m+1$  a  $c_i = \hat{c}_{i-m}$  pro  $i = m+2, \dots, m+n+1$ . Je snadné ověřit, že pak  $c_1, \dots, c_{m+n+1}$  tvoří trasu délky  $m+n$  z  $a$  do  $c$  a proto  $(a, c) \in R^{m+n} \subseteq R^*$ .  $R^*$  tedy je tranzitivní.

Je  $R^*$  minimální relace s touto vlastností? Nechť  $T$  je relace taková, že  $R \subseteq T$  a  $T$  je tranzitivní. Dokážeme indukcí, že  $R^n \subseteq T$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ .

(0)  $n = 1$ : Evidentně  $R \subseteq T$ , je to jedna z vlastností  $T$ .

(1) Nechť  $n \in \mathbb{N}$  je libovolné, předpokládejme, že  $R^n \subseteq T$ . Chceme dokázat, že  $R^{n+1} \subseteq T$ .

Nechť  $(a, b)$  je libovolný prvek z  $R^{n+1} = R \circ R^n$ . Pak existuje  $x \in A$  takové, že  $(a, x) \in R$  a  $(x, b) \in R^n$ . Podle indukčního předpokladu pak  $(a, x) \in T$  a podle (0) také  $(x, b) \in T$ . A protože je  $T$  tranzitivní, nutně  $(a, b) \in T$ . Tím je důkaz hotov. □

Ne všechny vlastnosti se dají získat přes uzávěr, například pro vytvoření antisymetrické relace z nějaké  $R$  bychom spíš potřebovali z  $R$  prvky odebírat než přidávat. Antisymetrický uzávěr bychom tedy sice definovat mohli, ale pak bychom museli konstatovat, že obecně neexistuje.

Další fakta o uzávěrech najdete ve cvičeních od 3c.8. Jednoduché příklady jsou ve cvičení 3c.7, pro jeden užitečný uzávěr se můžete podívat na cvičení 4a.17.

**3c.8 Další vlastnosti**

Zkoumané vlastnosti vycházejí z praktického použití relací, kdy člověk zjistí, že by se mu velice hodilo, kdyby se relace chovaly určitým způsobem. Pokud stejnou věc potká vícekrát, vyplatí se jí dát jméno. Tak jsme přišli

k těm čtyřem základním vlastnostem, které se zkoumají nejčastěji. Nejsou ale jediné, při různých aplikacích se vyskytnou i další. Uvedeme si pár populárnějších.

**Definice.**

Nechť  $R$  je relace na množině  $A$ .

Řekneme, že  $R$  je **antireflexivní** či **ireflexivní** (**irreflexive**), jestliže pro všechna  $a \in A$  platí  $(a, a) \notin R$ .

Řekneme, že  $R$  je **asymetrická** (**asymmetric**), jestliže pro všechna  $a, b \in A$  platí  $(aRb \implies \neg(bRa))$ .

Řekneme, že  $R$  je **dichotomická** (**dichotomic**), jestliže pro všechna  $a, b \in A$  platí  $(aRb \vee bRa)$ .

Řekneme, že  $R$  je **trichotomická** (**trichotomic**), jestliže pro všechna  $a, b \in A$  platí právě jedna z možností  $aRb$ ,  $bRa$ ,  $a = b$ .

Antireflexivní relace nejsou opakem reflexivních, jsou opakem zahnaným do extrému. Na to, aby relace nebyla reflexivní, stačí jediná chybějící dvojice  $(a, a)$ . Antireflexivita to bere od podlahy a rovnou zakáže všechny takovéto dvojice. Typickým příkladem je relace  $<$  na číslech. Náhodně vytvořená relace bude mít s vysokou pravděpodobností jen některé z dvojic  $(a, a)$ , takže nebude ani reflexivní, ani antireflexivní.

Pro nás nejzajímavější bude asymetrie (které někteří autoři říkají silná antisymetrie). Protože zakazuje obousměrné šipky, tak již implikuje antisymetrii (takže asymetrie je silnější vlastnost než antisymetrie). Dále se všimněte, že pokud by existovalo  $(a, a) \in R$ , tak to už poruší podmínku asymetrie. Tato vlastnost tedy zakazuje smyčky. Dostáváme tak jeden směr v následujícím faktu.

**Fakt 3c.9.**

Nechť  $R$  je relace na množině  $A$ . Je asymetrická právě tehdy, pokud je antisymetrická a antireflexivní.

Druhý směr vyplyne stejně snadno a zkuste si jej rozmyslet. Pokud vám všechny tyto úvahy přijdou snadné (a ony jsou), tak to je dobré znamení, že relacím rozumíte.

Mezi antisymetrií a asymetrií je zajímavá souvislost, kterou vyjádříme v tvrzení, které se nám bude trošku hodit později. Zkuste si při jeho čtení představovat nerovnosti  $\leq$  a  $<$ .

**Fakt 3c.10.**

Uvažujme množinu  $A$ .

(i) Nechť  $R$  je antisymetrická relace na  $A$ . Definujme relaci  $S$  tímto předpisem:  $aSb$  jestliže  $aRb$  ale  $a \neq b$ .

Pak je  $S$  asymetrická.

(ii) Nechť  $S$  je asymetrická relace na  $A$ . Definujme relaci  $R$  tímto předpisem:  $aRb$  jestliže  $aSb$  nebo  $a = b$ .

Pak je  $R$  antisymetrická a reflexivní.

Formálně řečeno, v (i) je  $S = R - \Delta(A)$ , ve (ii) je  $R = S \cup \Delta(A)$ . Pokud to vidíte, skvělé. Pro další detaily viz kapitola 4b.

Někdy potřebujeme relaci přinutit, aby vytvářela hodně spojení. Není úplně jasné, jak to udělat nejlépe, poslední dvě vlastnosti z definice výše ukazují dva možné přístupy.

Dichotomie je vlastnost, která zaručí vzájemnou propojenost všech prvků množiny, ale neřeší, jakým způsobem, hlavně aby tam něco bylo. Všimněte si, že lze zvolit i  $a = b$ , takže dichotomie už vynutí reflexivitu. Dobrým příkladem je relace  $\leq$  na číslech.

I trichotomie vynucuje propojení prvků, ale zároveň je zvědavá, jak se to dělá. Všimněte si, že dvojice  $a, b = a$  již splňuje  $a = b$ , proto z té trojice nesmí platit nic dalšího neboli neplatí  $aRa$ ; trichotomické relace jsou tedy antireflexivní. Také zakážeme oboustranné šipky mezi různými prvky, jde tedy o relaci asymetrickou, proto i antisymetrickou. Typickým příkladem je relace  $<$  na číslech.

Pro příklad relace, která není dichotomická ani trichotomická, stačí vzít relaci  $R$  na  $\mathbb{Z}^2$  definovanou  $(u, v)R(x, y)$  jestliže  $u < x \wedge v < y$ . Pak dvojice  $a = (1, 2)$ ,  $b = (2, 1)$  není porovnatelná.

Někteří autoři mají jinou definici trichotomie, používají v definici obyčejnou disjunkci, takže připouštějí, že z těch tří možností platí i více najednou. Snadno se rozmyslí, že takováto alternativní definice je ekvivalentní podmínce, aby pro všechna  $a \neq b$  platilo  $aRb \vee bRa$ . Jinak řečeno, tato definice se neplete do (anti)reflexivity, což mnoho autorů shledává sympatickým. Je také vidět, že každá dichotomická relace by byla i trichotomická dle této jiné definice. Některé podrobnosti pak následně fungují jinak, ale protože zde nebudeme s trichotomií pracovat, nemusí nás to trápit.

K problematice vynucování spojení se vrátíme v kapitole .

Existuje samozřejmě mnohem více roztodivných vlastností, ale to už jsou specializované věci. Uvedme jednu na ukázkou: Relace  $R$  se nazývá hustá, jestliže pro libovolné  $x, y$  splňující  $xRy$  existuje nějaké  $z$  takové, že  $xRzRy$ . Třeba relace  $<$  je hustá na  $\mathbb{Q}$  či  $\mathbb{R}$ , ale na  $\mathbb{Z}$  už hustá není, protože  $13 < 14$  a mezi nimi už další prvek není. Pro další zajímavou vlastnost se podívejte na cvičení 4a.18.

### Cvičení

**Cvičení 3c.1** (poučné, zkouškové): Nechť  $R$  je relace z množiny  $A$  do množiny  $B$ . Dokažte, že pak  $R \circ \Delta(A) = R$  a  $\Delta(B) \circ R = R$ .

**Cvičení 3c.2** (poučné, zkouškové): Dokažte, že pro každou množinu  $A$  a  $n \in \mathbb{N}$  platí  $[\Delta(A)]^n = \Delta(A)$ .

**Cvičení 3c.3** (rutinní, poučné, zkouškové): Nechť  $R_1, R_2$  jsou relace na  $A$ . Dokažte následující (viz Fakt 3c.2):

- (i) Jestliže jsou  $R_1, R_2$  reflexivní, pak je i  $R_1 \cap R_2$  reflexivní.
- (ii) Jestliže jsou  $R_1, R_2$  reflexivní, pak je i  $R_1 \cup R_2$  reflexivní.
- (iii) Jestliže jsou  $R_1, R_2$  symetrické, pak je i  $R_1 \cup R_2$  symetrická.
- (iv) Jestliže jsou  $R_1, R_2$  antisymetrické, pak je i  $R_1 \cap R_2$  antisymetrická.
- (v) Jestliže jsou  $R_1, R_2$  tranzitivní, pak je i  $R_1 \cap R_2$  tranzitivní.

**Cvičení 3c.4** (poučné): Nechť  $R_1, R_2$  jsou relace na  $A$ .

- (i) Kde se zadrhne důkaz tvrzení „Jestliže jsou  $R_1, R_2$  tranzitivní, pak je i  $R_1 \cup R_2$  tranzitivní“?
- (ii) Kde se zadrhne důkaz tvrzení „Jestliže jsou  $R_1, R_2$  tranzitivní, pak je i  $R_1 - R_2$  tranzitivní“?

**Cvičení 3c.5** (rutinní, zkouškové): Nechť  $R$  je relace na  $A$ . Dokažte následující (viz Fakt 3c.3):

- (i)  $R$  je reflexivní právě tehdy, když je i  $R^{-1}$  reflexivní.
- (ii)  $R$  je symetrická právě tehdy, když je i  $R^{-1}$  symetrická.
- (iii)  $R$  je antisymetrická právě tehdy, když je i  $R^{-1}$  antisymetrická.

**Cvičení 3c.6** (poučné): Nechť  $R$  je relace na  $A$ . Dokažte, že jestliže je reflexivní, tak také  $R^n$  je reflexivní pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ .

**Cvičení 3c.7** (rutinní): Uvažujme následující relace na množině  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ :

- (i)  $R_1 = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (3, 4)\}$ ;
- (ii)  $R_2 = \{(1, 4), (1, 3), (4, 3), (2, 2)\}$ .

a) Doplněte co nejúspěšněji relaci  $R_1$  tak, aby byla tranzitivní (jinými slovy, přidejte k ní nějaké další dvojice tak, aby výsledná relace byla tranzitivní, a přitom se přidal nejmenší možný počet dvojic, kterým lze tranzitivitu dosáhnout, viz 3c.6) uzávěr relace.

b) Doplněte co nejúspěšněji relaci  $R_2$  tak, aby byla symetrická a tranzitivní.

**Cvičení 3c.8** (poučné, zkouškové): Nechť  $R$  je nějaká relace na množině  $A$ . Dokažte, že  $R \cup R^{-1}$  je symetrická relace.

**Cvičení 3c.9** (poučné, dobré): Dokažte, že symetrický uzávěr reflexivního uzávěru relace  $R$  je roven reflexivnímu uzávěru symetrického uzávěru  $R$ .

**Cvičení 3c.10** (poučné, dobré): Dokažte, že tranzitivní uzávěr symetrického uzávěru relace  $R$  obsahuje symetrický uzávěr tranzitivního uzávěru  $R$ , ale nemusí se rovnat.

**Cvičení 3c.11** (poučné, dobré): Nechť  $R, S$  jsou relace na stejné množině  $A$ . Předpokládejme, že pro obě existují uzávěry vzhledem k jisté vlastnosti  $V$ , označme je  $\widehat{R}$  a  $\widehat{S}$ . Dokažte, že jestliže  $R \subseteq S$ , pak  $\widehat{R} \subseteq \widehat{S}$ .

**Cvičení 3c.12** (poučné, dobré): Nechť  $R$  je relace na množině  $A$ . Dokažte, že jestliže je  $R$  antireflexivní a tranzitivní, tak už je asymetrická (a proto i antisymetrická).

Nápověda: Důkaz sporem jde docela pěkně.

### Řešení:

**3c.1:** Nechť  $a \in A, b \in B$ .

1)  $R \circ \Delta(A) \subseteq R$ :  $(a, b) \in R \circ \Delta(A) \implies \exists x \in A: [(a, x) \in \Delta(A) \wedge (x, b) \in R]$ . Ale  $(a, x) \in \Delta(A)$  znamená  $a = x$ , proto  $(a, b) \in R$ .

2)  $R \subseteq R \circ \Delta(A)$ : Nechť  $(a, b) \in R$ . Protože  $(a, a) \in \Delta(A)$ , máme  $a\Delta(A)aRb$  a tedy  $(a, b) \in R \circ \Delta(A)$ .

3) Důkaz  $\Delta(B) \circ R = R$  je obdobný.

**3c.2:** Důkaz indukci:

(0)  $n = 1$ :  $[\Delta(A)]^1 = \Delta(A)$  platí.

(1) Předpoklad:  $[\Delta(A)]^n = \Delta(A)$ . Pak  $[\Delta(A)]^{n+1} = [\Delta(A)]^n \circ \Delta(A) = \Delta(A) \circ \Delta(A) = \Delta(A)$  podle cvičení 3c.1.

**3c.3:** (i): Nechť  $a \in A$ .  $R_1$  reflex tedy  $(a, a) \in R_1$ ,  $R_2$  reflex tedy  $(a, a) \in R_2$ , proto  $(a, a) \in R_1 \cap R_2$ .

(ii): Nechť  $a \in A$ .  $R_1$  reflex tedy  $(a, a) \in R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$ .

(iii): Nechť  $(a, b) \in R_1 \cup R_2$ . Pak  $(a, b) \in R_1 \vee (a, b) \in R_2$ . Kdyby  $(a, b) \in R_1$ , pak ze symetrie  $R_1$  bude  $(b, a) \in R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$ . Kdyby  $(a, b) \in R_2$ , pak ze symetrie  $R_2$  bude  $(b, a) \in R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$ . Každopádně  $(b, a) \in R_1 \cup R_2$ .

(iv): Nechť  $(a, b) \in R_1 \cap R_2$  a  $(b, a) \in R_1 \cap R_2$ . Pak  $(a, b) \in R_1 \wedge (b, a) \in R_1$ , z antisymetrie  $R_1$  tedy  $a = b$ .

Poznámka: Důkaz ukazuje, že stačí, aby jedna z  $R_1, R_2$  byla antisymetrická, a už je takový i průnik.

(v): Nechť  $(a, b) \in R_1 \cap R_2$  a  $(b, c) \in R_1 \cap R_2$ . Pak  $(a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_1$ , z tranzitivity  $R_1$  tedy  $(a, c) \in R_1$ .

Podobně  $(a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_2$ , z tranzitivity  $R_2$  tedy  $(a, c) \in R_2$ . Proto  $(a, c) \in R_1 \cap R_2$ .

**3c.4:** (i): Nechť  $a, b, c \in A$  splňují  $(a, b) \in R_1 \cup R_2 \wedge (b, c) \in R_1 \cup R_2$ . Pak  $(a, b) \in R_1$  nebo  $(a, b) \in R_2$ , a  $(b, c) \in R_1$  nebo  $(b, c) \in R_2$ . Abychom mohli použít tranzitivitu  $R_1$ , museli bychom nějak zajistit, aby  $(a, b), (b, c)$  byly oba v  $R_1$  nebo oba v  $R_2$ . To ale nedokážeme, nemáme nic, čím bychom je mohli přinutit vybrat si zrovna jednu z relací. Tím je také inspirován protipříklad.

(ii): Nechť  $a, b, c \in A$  splňují  $(a, b) \in R_1 - R_2 \wedge (b, c) \in R_1 - R_2$ . Pak  $(a, b) \in R_1$  a  $(b, c) \in R_1$ , proto dle tranzitivity  $R_1$  i  $(a, c) \in R_1$ . Ještě potřebujeme  $(a, c) \notin R_2$ , ale to neumíme zajistit. Víme jen, že  $(a, b) \notin R_2$  a  $(b, c) \notin R_2$ , to ale nikterak nebrání  $(a, c)$  v tom, aby v  $R_2$  bylo. Zase je tímto inspirován protipříklad v diskusi po Faktu 3c.2.

**3c.5:** (i): Nechť  $R$  reflexivní. Pro  $a \in A$  pak  $(a, a) \in R$ , proto po prohození prvků  $(a, a) \in R^{-1}$ ,  $R^{-1}$  je reflexivní. Nechť naopak  $R^{-1}$  reflexivní. Pro  $a \in A$  pak  $(a, a) \in R^{-1}$ , tedy po prohození  $(a, a) \in R$ .

(ii): Nechť  $R$  je symetrická. Jestliže  $(a, b) \in R^{-1}$ , pak  $(b, a) \in R$ , ze symetrie  $(a, b) \in R$  a tedy  $(b, a) \in R^{-1}$ .  $R^{-1}$  je symetrická.

Nechť  $R^{-1}$  je symetrická. Jestliže  $(a, b) \in R$ , pak  $(b, a) \in R^{-1}$ , ze symetrie  $(a, b) \in R^{-1}$  a tedy  $(b, a) \in R$ .  $R$  je symetrická.

(iii): Nechť  $R$  je antisymetrická. Jestliže  $(a, b) \in R^{-1}$  a  $(b, a) \in R^{-1}$ , pak  $(b, a) \in R$  a  $(a, b) \in R$ , z antisymetrie  $a = b$ .  $R^{-1}$  je symetrická.

Nechť  $R^{-1}$  je antisymetrická. Jestliže  $(a, b) \in R$  a  $(b, a) \in R$ , pak  $(b, a) \in R^{-1}$  a  $(a, b) \in R^{-1}$ , z antisymetrie  $a = b$ .  $R$  je symetrická.

**3c.6:** Indukcí. (0):  $n = 1$ : jestliže je  $R$  reflexivní, tak  $R^1 = R$  je reflexivní.

(1): Předpoklad  $R^n$  reflexivní. Podle Věty 3c.4 je i  $R^n \circ R = R^{n+1}$  reflexivní.

**3c.7:** a)  $R_1 \cup \{(2, 4)\}$ .

b) Nejprve doplníme na symetrickou relaci:  $R_2 \cup \{(4, 1), (3, 1), (3, 4)\}$ . Teď zjistíme, co chybí pro platnost tranzitivity (pořadí nejprve symetrie, pak tranzitivita je výhodné, protože pokud teď případně další spojnice budeme rovnou dávat v obou směrech, tak již symetrii nepokazíme). Odpověď:

$R_2 \cup \{(4, 1), (3, 1), (3, 4), (1, 1), (3, 3), (4, 4)\}$ .

**3c.8:** Nechť  $(a, b) \in R \cup R^{-1}$ . Pak  $(a, b) \in R \vee (a, b) \in R^{-1}$ . Když  $(a, b) \in R$ , tak  $(b, a) \in R^{-1} \subseteq R \cup R^{-1}$ . Když  $(a, b) \in R^{-1}$ , tak  $(b, a) \in R \subseteq R \cup R^{-1}$ . Proto každopádně  $(b, a) \in R \cup R^{-1}$ .

**3c.9:**  $(\Delta \cup R)^{-1} = \Delta^{-1} \cup R^{-1} = \Delta \cup R^{-1}$ , využilo se cvičení 3a.6.

**3c.10:**  $(a, b)$  je v symetrickém tranzitivního, pak  $(a, b)$  v tranzitivním nebo  $(b, a)$  v tranzitivním. Proto trasa nějaké délky z  $a$  do  $b$  v  $R$ , ta je pak i v symetrickém uzávěru  $R$ , nebo trasa z  $b$  do  $a$  v  $R$ , pak otočením trasa z  $a$  do  $b$  v  $R^{-1}$ , tedy i v symetrickém uzávěru, každopádně trasa z  $a$  do  $b$  v symetrickém uzávěru a proto  $(a, b)$  v tranzitivním uzávěru symetrického.

$R = \{(a, b), (a, c)\}$ , tranzitivní symetrického je  $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$ , symetrický tranzitivního je  $\{(a, b), (a, c), (c, a), (c, a)\}$ .

**3c.11:**  $\hat{R}$  je nejmenší relace s vlastností  $P$  obsahující  $R$ . Ale  $\hat{S}$  má také  $P$  a obsahuje  $R$ , proto z minimality  $\hat{R}$  máme  $\hat{R} \subseteq \hat{S}$ .

**3c.12:** Předpoklad:  $R$  je antisymetrická, tranzitivní a není asymetrická. Proto  $\exists a, b \in A$  tak, že  $aRb$  a  $bRa$ . Tranzitivita pak dává  $aRa$ , což je ve sporu s antireflexivitou.

### 3d. $n$ -ární relace

Toto je jen rychlý pohled, aby čtenář věděl, že není třeba končit u binárního.

#### Definice.

Nechť  $A_1, \dots, A_n$  jsou množiny. Libovolná podmnožina  $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$  se nazývá  **$n$ -ární relace** na těchto množinách.

Číslu  $n$  říkáme **stupeň** této relace.

Consider sets  $A_1, \dots, A_n$ . By an  **$n$ -ary relation** on these sets we mean any subset of  $A_1 \times \dots \times A_n$ . The number  $n$  is called the **degree** of this relation.



Takovéto relace nám umožňují reprezentovat vztahy mezi více objekty.

**Příklad 3d.a:** Nechť  $A$  je množna všech studentů zapsaných na fakultě,  $B = \{\text{Bc, MSc, Ph.D.}\}$ ,  $C = \{\text{EaI, STM, OI, KaR, KME, EEM}\}$  a  $D = \{1, 2, 3, 4\}$ . Pak lze studentskou populaci popsat relací  $R$  arity 4 definovanou jako  $(a, b, c, d) \in R$  právě tehdy, jestliže student  $a$  studuje na  $b$  v programu  $c$  a je v ročníku  $d$ .

△

Jak příklad jemně naznačuje, tyto relace se používají při práci s databázemi. Volba vhodného modelu silně ovlivní, jak rychle databáze reaguje na možné požadavky (a které je vůbec schopna splnit). Jedním z používaných modelů je právě relační model.

Toto použití pak inspiruje operace, které definujeme. Určitě budeme chtít operaci, která umožní vybírat dle parametru, čímž vznikne podrelace (například z relace studentů chceme podrelaci, která zahrnuje jen studenty programu OI). Je možno dělat tzv. projekce, což v zásadě znamená, že z relace vynecháme některou složku (například můžeme vytvořit relaci, která nezahrnuje obor, jen titul a ročník), relace se dají spojovat a podobně. To už je ale dosti specializované téma pro kurs databází.