# 4. Speciální relace

Už jsme zmínili jednu skupinu relací, které jsou tak svébytné, že se zkoumají zvlášť, jmenovitě zobrazení. Jsou ještě dvě zajímavé skupiny relací, které si zaslouží vlastní kapitolku: ekvivalence a uspořádání.

## 4a. Ekvivalence

! **Definice.**
Nechť $R$ je relace na nějaké množině $A$. Řekneme, že $R$ je **ekvivalence**, jestliže je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

A relation on a set is called an **equivalence relation** if it is reflexive, symmetric and transitive.

Čím je taková relace speciální? Jedna výhoda je vidět hned, dá se snadno znázornit grafem v případě konečné množiny. Protože víme, že je reflexivní, je zbytečné kreslit smyčky, jsou všude automaticky. Protože je symetrická, není třeba kreslit všude dvojité šipky sem a tam. Vyplývá z toho, že nám k zakreslení stačí neorientovaný graf bez smyček, který díky své jednoduchosti lépe ukáže, které prvky množiny jsou v relaci a které ne.

Zjednodušení situace se odráží i v terminologii: Jestliže $aRb$, pak říkáme, že $a$ a $b$ jsou ekvivalentní, přičemž v tomto vyjádření už díky symetrii na pořadí oněch prvků nezáleží. Díky reflexivitě víme, že každý prvek je ekvivalentní sám sobě. Někdy se pro ekvivalenci dvou prvků používá speciální značení $a \sim b$, ale nejde o univerzální konvenci, tak ji tady nebudeme používat.

**Příklad 4a.a:** Při pohledu na příklady a cvičení z kapitoly 3b zjistíme, že ekvivalencí jsme poznali docela dost: Rovnost čísel $x = y$ na libovolné množině čísel, vlastně libovolná rovnost nějakých objektů, relace na číslech daná vztahem $|x| = |y|$, relace na množinách daná shodou mohutností $|A| = |B|$.

V kapitole 3a jsme také hovořili o relaci dané mezi počítači definicí $aRb$ jestliže jsou $a$ a $b$ navzájem schopny komunikovat (třeba přes prostředníka), i to je ekvivalence.

Uvažujme relaci definovanou na zastávkách ve městech definicí $aRb$ jestliže se dá z $a$ do $b$ dojet hromadnou dopravou. Taková relace bude určitě reflexivní (nastoupím a hned vystoupím) a tranzitivní. Je to tedy ekvivalence? Rozhodne to symetrie. Jestliže umím dojet hromadnou z $a$ do $b$, může se stát, že bych z $b$ do $a$ dojet neuměl? To je dobrá otázka, člověk by to nečekal, ale dějí se u nás i podivnější věci. Takže tady nevíme, zda máme ekvivalenci. △

Mnohé z příkladů vycházejí z jedné základní myšlenky. Máme objekty z množiny $A$, u kterých zjišťujeme jistý pro nás důležitý parametr (velikost, IP číslo sítě, pohlaví, operační systém, výrobce, … ). Obecně se to dá vyjádřit tak, že existuje zobrazení $T\colon A \mapsto B$, kde množina $B$ říká, jaké hodnoty měřená vlastnost může mít. Pokud se rozhodneme objekty sdružovat podle toho, zda mají dotyčnou vlastnost stejnou, formálně $aRb$ právě tehdy, když $T(a) = T(b)$, tak už vždy vznikne ekvivalence, bez ohledu na volbu $T$ (viz cvičení 4a.7).

V situaci, kdy objekty porovnáváme podle určité vlastnosti, se pak jejich množina rozpadne na skupiny, každá zahrnuje se shodnou vlastností. V případě relace na knihách daná zobrazením kniha$\mapsto$autor tak vznikne skupina knih od autora $xy$, skupina knih od autora $cw$ atd.

Tento proces rozpadu množiny na skupiny prozkoumáme teoreticky.

! **Definice.**
Nechť $R$ je relace ekvivalence na nějaké množině $A$. Pro $a \in A$ definujeme **třídu ekvivalence** prvku $a$ (**equivalence class** of $a$) vzhledem k $R$ jako

$$[a]_R = \{b \in A;\ aRb\}.$$

Alternativní značení: $[a]_R$ se píše také $R[a]$ nebo dokonce jen $[a]$, pokud je relace jasná z kontextu.

Díky reflexivitě víme, že taková třída není nikdy prázdná, protože $a \in [a]_R$. Co se od takové třídy dá čekat? Podívejme se na ekvivalenci danou mohutností množin. Vezmeme-li si konkrétní množinu $A$, tak odpovídající třída ekvivalence jsou všechny množiny $M$ splňující $|A| = |M|$, takže se nám vlastně na hromádce ocitnou všechny množiny stejné mohutnosti. Původní množinu $A$ pak lze brát jako jakéhosi typického zástupce množiny této velikosti. Tato ekvivalence nám tedy množiny rozdělí do zřetelně oddělených skupin podle velikosti.

Následující věta nám shrne nejdůležitější vlastnosti tříd ekvivalence.

!

**Věta 4a.1.**
Nechť $R$ je relace ekvivalence na nějaké množině $A$, nechť $a \in A$.
(i) Pro každé $b, c \in [a]_R$ platí $bRc$.
(ii) Pro každé $b \in [a]_R$ a $c \in A$ platí, že jestliže $bRc$, pak $c \in [a]_R$.
(iii) Pro každé $b \in [a]_R$: $[a]_R = [b]_R$.
(iv) Pro každé $a, b \in A$ platí: $aRb$ právě tehdy, když $[a]_R = [b]_R$.
(v) Pro všechna $a, b \in A$ platí, že buď $[a]_R = [b]_R$, nebo $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

Jaký obrázek nám tu vzniká? Třída ekvivalence je skupina prvků, ve které jsou dle (i) všechny navzájem v relaci, v grafu ji tedy vidíme jako skupinu prvků, která je křížem krážem propojena. Zároveň z ní ale nevede žádná cestička jinam, protože jakákoliv spojnice zevnitř skupiny k nějakému prvku jej podle (ii) okamžitě vtáhne do této skupiny.

Množina $A$ se tak rozpadne na samostatné, od sebe izolované skupiny. To je znovu potvrzeno v části (v).

Každou skupinu (třídu) jsme dostali pomocí jakéhosi prvku $a$, kterého lze považovat za jejího zástupce, ale (iii) ukazuje, že libovolný člen této třídy bude také rovnocenným zástupcem, je úplně jedno, kterého si vybereme. A konečně (iv) nám říká, že se podle příslušnosti ke třídám dá poznat, kdo je s kým v relaci, což je nápad, který použijeme posléze. A teď už důkaz, vyplatí se kreslit si obrázky.

**Důkaz** (poučný)**:** (i): Jestliže $b, c \in [a]_R$, pak $aRb$ a $aRc$. Podle symetrie také $bRa$, dvojkrok $bRaRc$ pak podle tranzitivity dává $bRc$.

(ii): Z $b \in [a]_R$ máme $aRb$, spolu s $bRc$ a tranzitivitou dostanem $aRc$, tedy $c \in [a]_R$.

(iii): Vezměme libovolné $c \in [b]_R$. Pak $bRc$ a podle (ii) tedy $c \in [a]_R$. Dokázali jsme $[b]_R \subseteq [a]_R$.

Nechť naopak $c \in [a]_R$, pak $aRc$. Z $b \in [a]_R$ máme $aRb$, ze symetrie $bRa$. Dostali jsme dvojkrok $bRaRc$, podle tranzitivity $bRc$ a tedy $c \in [b]_R$. Dokázali jsme $[a]_R \subseteq [b]_R$.

(iv): Jde o snadný důsledek (iii). Jestliže $aRb$, pak $b \in [a]_R$ a proto podle (iii) máme $[a]_R = [b]_R$. Nechť naopak $[a]_R = [b]_R$. Pak $b \in [b]_R = [a]_R$, tedy $b \in [a]_R$ a $aRb$ přímo podle definice $[a]_R$.

(v): Vezměme nějaké $a, b \in A$. Jestliže $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$, pak jsme hotovi. Jinak existuje $c \in [a]_R \cap [b]_R$. Podle (iii) to pak znamená $[a]_R = [c]_R = [b]_R$.

□

V definici teď zachytíme obecně myšlenku rozdělení množiny na disjunktní části.

!

**Definice.**
Uvažujme množinu $A$. Jejím **rozkladem** rozumíme libovolný soubor $\mathcal{S}$ neprázdných podmnožin množiny $A$ takový, že $A = \bigcup\limits_{M \in \mathcal{S}} M$ a pro všechna $M \neq N \in \mathcal{S}$ jsou $M, N$ disjunktní.

Consider a set $A$. By its **partition** we mean an arbitrary collection $\mathcal{S}$ of non-empty subsets of $A$ such that $A = \bigcup\limits_{M \in \mathcal{S}} M$ and $M, N$ are disjoint for all $M \neq N \in \mathcal{S}$.

Podmínka o disjunktnosti se často vyjadřuje pomocí obměny: pro všechna $M, N \in \mathcal{S}$ má platit: $M \cap N \neq \emptyset \implies M = N$. Tato forma je někdy výhodnější pro použití například v důkazech.

Poznamenejme, že na velikost $\mathcal{S}$ se v této definici nekladou žádné nároky, klidně může být nekonečná, dokonce může jít i o nespočetnou kolekci podmnožin (a pak je tam nespočetné sjednocení, ještě to uvidíme).

!

**Věta 4a.2.**
Nechť $A$ je množina.
(i) Jestliže je $R$ ekvivalence na $A$, pak $\{[a]_R\}_{a \in A}$ je rozklad množiny $A$.
(ii) Jestliže je $\mathcal{S}$ nějaký rozklad množiny $A$, pak existuje relace ekvivalence $R$ na $A$ taková, že $\mathcal{S}$ jsou přesně třídy ekvivalence vzhledem k $R$.

**Důkaz** (z povinnosti, ale poučná myšlenka)**:** (i): Protože $a \in [a]_R$, je určitě $A = \bigcup\limits_{a \in A} [a]_R$. Druhá podmínka vyplývá z Věty 4a.1 (v).

(ii): Definujme relaci $R$ na $A$ takto: $aRb$ právě tehdy, když existuje $M \in \mathcal{S}$ takové, že $a, b \in M$.

Jinými slovy, prohlásíme, že všechny prvky z jedné množiny rozkladu jsou navzájem ekvivalentní, ale žádné jiné dvojice už nevytvoříme.

1) Nejprve ukážeme, že $R$ je ekvivalence.

R: Jestliže $a \in A$, pak z $A = \bigcup\limits_{M \in \mathcal{S}} M$ musí existovat $M \in \mathcal{S}$ takové, že $a \in M$. Pak $a \in M$ a také $a \in M$, tedy $aRa$. Relace je reflexivní.

S: Jestliže $aRb$, pak $a, b \in M$ pro nějakou množinu $M \in \mathcal{S}$. Pak ovšem také $b, a \in M$ a $bRa$. $R$ je symetrická.

T: Předpokládejme, že $aRb$ a $bRc$. Pak podle definice $R$ existuje množina $M \in \mathcal{S}$ taková, že $a, b \in M$, a existuje množina $N \in \mathcal{S}$ (zatím musíme připustit možnost, že jiná) taková, že $b, c \in N$. Teď použijeme předpoklad, že $\mathcal{S}$ je rozklad, abychom ukázali, že $M = N$. Našli jsme prvek $b \in M \cap N$, tedy $M \cap N \neq \emptyset$. Již jsme diskutovali, že pro rozklad z toho plyne $M = N$. Takže $a, b, c \in M$, proto i $a, c \in M$ a $aRc$. $R$ je tedy tranzitivní.

2) Teď ukážeme, že množiny z rozkladu odpovídají třídám ekvivalence $R$.

Vezměme třídu rozkladu $[a]_R$. Pak existuje $M \in \mathcal{S}$ taková, že $a \in M$. Pro všechny $b \in M$ pak podle definice $aRb$, tedy $b \in [a]_R$. Dokázali jsme, že $M \subseteq [a]_R$. Naopak jestliže $b \in [a]_R$, pak $aRb$, proto $a, b \in N$ pro nějakou množinu $N \in \mathcal{S}$. Prvek $a$ leží v $M$ i v $N$, proto (viz výše) $M = N$, tudíž $b \in M$. Ukázali jsme, že $[a]_R \subseteq M$. Každá třída ekvivalence je tedy rovna nějaké množině z rozkladu.

Formálně, $\{[a]_R\}_{a \in M} \subseteq \mathcal{S}$.

Ještě musíme ukázat, že každá množina z rozkladu odpovídá nějaké třídě ekvivalence. Vezměme tedy $M \in \mathcal{S}$ a libovolný prvek $a \in M$ (jsou to neprázdné množiny dle definice rozkladu). Pak podle předchozího odstavce $M = [a]_R$ a je to.

□

Z praktického pohledu tedy relace ekvivalence představuje jeden z možných pohledů na situaci, kdy množinu rozparcelujeme na kousky.

**Příklad 4a.b:** Asi nejznámější ekvivalence je relace rovnosti. Podívejme se na ni například na $\mathbb{R}$. V příkladě 3b.d jsme už ukázali reflexivitu, symetrii a tranzitivitu. Jak vypadají třídy ekvivalence? Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí $[x]_R = \{x\}$, takže to je asi ta nejnudnější ekvivalence, s nejmenšími možnými třídami ekvivalence. Vzniká tím rozklad $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$, což jen potvrzuje, že tato ekvivalence je nuda.

Mírně zajímavější je relace definovaná na $\mathbb{R}$ předpisem $xRy$ právě tehdy, když $|x| = |y|$. V této ekvivalenci jsou třídy ekvivalence

$$[x]_R = \{y \in \mathbb{R};\ xRy\} = \{y \in \mathbb{R};\ |x| = |y|\} = \{x, -x\},$$

což je v případě $x = 0$ jednoprvková množina, $[0]_R = \{0\}$, jinak dvouprvková.

△

**!** **Příklad 4a.c:** V teorii čísel se počet různých prvočíselných dělitelů čísla $n$ značí $\omega(n)$, například $\omega(12) = 2$, protože prvočísla 2 a 3 dělí 12. Dvanáctku dělí i jiná čísla, ale to nejsou prvočísla (ani 1 není).

Uvažujme následující relaci $R$ na množině $A = \{28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$: $aRb$ jestliže $a, b$ mají stejný počet různých prvočíselných dělitelů, tedy $\omega(a) = \omega(b)$. Ukážeme, že jde o ekvivalenci:

Reflexivita: Evidentně $\omega(a) = \omega(a)$ pro libovolné číslo $a$, proto $aRa$.

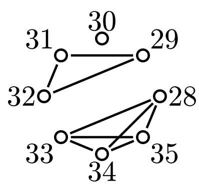
Symetrie: Nechť $a, b \in A$. Jestliže $aRb$, pak $\omega(a) = \omega(b)$, proto i $\omega(b) = \omega(a)$ a tedy $bRa$.

Tranzitivita: Nechť $a, b, c \in A$. Jestliže $aRb$ a $bRc$, pak $\omega(a) = \omega(b)$ a $\omega(b) = \omega(c)$. Proto i $\omega(a) = \omega(c)$ a tedy $aRc$.

Všimněte si, že jsme vlastně dokázali, že takto vzniklá relace je ekvivalence na libovolné podmnožině přirozených čísel, nejen na té naší. Teď už se na ni podíváme, nejprve si pro všechna čísla z $A$ určíme hodnotu parametru $\omega$, abychom viděli, které prvky jsou se kterými v relaci, pak si nakreslíme si zjednodušený graf, jak jsme to diskutovali výše.

$\omega(28) = \omega(2^2 \cdot 7) = 2$, $\omega(29) = 1$, $\omega(30) = \omega(2 \cdot 3 \cdot 5) = 3$, $\omega(31) = 1$,

$\omega(32) = \omega(2^5) = 1$, $\omega(33) = \omega(3 \cdot 11) = 2$, $\omega(34) = \omega(2 \cdot 17) = 2$, $\omega(35) = \omega(5 \cdot 7) = 2$.

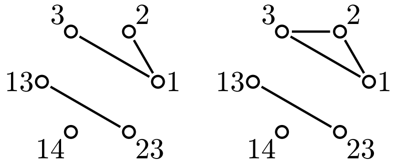



Třídy ekvivalence jsou $[28]_R = \{28, 33, 34, 35\} = [33]_R = [34]_R = [35]_R$, $[29]_R = \{29, 31, 32\} = [31]_R = [32]_R$ a $[30]_R = \{30\}$. Odpovídající rozklad je $S = \{\{28, 33, 34, 35\}, \{29, 31, 32\}, \{30\}\}$.

Již dříve jsme zmínili, že jakékoliv porovnávání objektů pomocí shodnosti nějakého ukazatele je ekvivalence. Důkaz je shodný jako ten, který jsme zde viděli, viz cvičení 4a.7.

△

**Příklad 4a.d:** Hledáme relaci $R$ na množině $A = \{1, 2, 3, 13, 14, 23\}$, která by zahrnovala vztahy $1R2$, $1R3$, $13R23$ a byla by to ekvivalence, přičemž chceme nejmenší takovouto relaci (relace jsou množiny dvojic, my chceme relaci s nejmenším možným počtem dvojic, aby ještě vyhovovala zadání). Jinými slovy, hledáme ekvivalentní uzávěr relace $\{(1,2),(1,3),(13,23)\}$, viz sekce 3c.6.




Ekvivalence má být reflexivní, proto nutně musíme doplnit všechny dvojice typu $(a,a)$. Má být také symetrická, takže nelze nepřidat dvojice $(2,1)$, $(3,1)$ a $(23,13)$. Tím jsme dostali první obrázek (jako obvykle pro zjednodušení nekreslíme smyčky a obousměrnou orientaci šipek).

Teď je třeba doplnit hrany tak, aby vznikla relace tranzitivní, tedy je třeba uzavřít všechny nedokončené trojúhelníky. Takový je tam jen jeden. Je dobré si rozmyslet, že jsme tímto doplněním neporušili symetrii.

Dostaneme tak $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(13,13),(14,14),(23,23),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(13,23),(23,13),(2,3),(3,2)\}$.

Třídy ekvivalence jsou $[1]_R=[2]_R=[3]_R=\{1,2,3\}$, $[13]_R=[23]_R=\{13,23\}$, $[14]_R=\{14\}$.

Všimněte si, že kdybychom zkusili nejprve doplnit chybějící spojnice na tranzitivitu a pak teprve symetrické šipky, tak už nedostaneme ekvivalenci. Původní relace doplněná o prvky $(a,a)$ je

$$\{(1,1),(2,2),(3,3),(13,13),(14,14),(23,23),(1,2),(1,3),(13,23)\}.$$

V ní sice navazující dvoukroky vytvořit jdou, třeba $1R3R3$, ale žádný nás nenutí doplnit nějaké dvojice do relace, tato relace už je tranzitivní. Když v druhém kroku dodáme další dvojice k vytvoření symetrické relace, přibude tam $(2,1)$ a náhle máme dvoukrok $2R1R3$, ke kterému neexistuje zkratka $(2,3)$. Jinak řečeno, vidíme, že symetrizace relace může zničit její tranzitivitu, viz cvičení 3c.10 a 4a.17.

$\triangle$

**!** **Příklad 4a.e:** Definujme následující relaci na $\mathbb{R}$: Pro $x,y\in\mathbb{R}$ platí $xRy$ právě tehdy, pokud $y-x\in\mathbb{Z}$.

Bývá dobré si novou relaci nejprve trochu vyzkoušet, máme třeba $1R4$ neboť $4-1\in\mathbb{Z}$, $1R7$, ale i $7R1$ či $7R7$, zajímavější je $0.76R14.76$, $396.76R0.76$ ale i $0.76R(-1.24)$, neboť $(-1.24)-0.76=-2\in\mathbb{Z}$.

Je reflexivní: $x-x=0\in\mathbb{Z}$ a tedy i $xRx$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$.

Je symetrická: Vezměme libovolné $x,y\in\mathbb{R}$. Jestliže $xRy$, pak $y-x\in\mathbb{Z}$, potom také $x-y=-(y-x)\in\mathbb{Z}$ a máme $yRx$.

Je tranzitivní: Vezměme libovolné $x,y,z\in\mathbb{R}$. Jestliže $xRy$ a $yRz$, pak $y-x\in\mathbb{Z}$ a $z-y\in\mathbb{Z}$, proto také $z-x=(z-y)+(y-x)\in\mathbb{Z}$ a máme $xRz$.

Jak vypadají třídy ekvivalence? Podle definice máme třeba pro $\pi\in\mathbb{R}$:

$$[\pi]_R=\{y\in\mathbb{R};\ \pi Ry\}=\{y\in\mathbb{R};\ y-\pi\in\mathbb{Z}\}=\{y\in\mathbb{R};\ \exists n\in\mathbb{Z}:\ y-\pi=n\}=\{\pi+n;\ n\in\mathbb{Z}\}.$$

Třída ekvivalence $\pi$ je tedy na reálné ose vidět jako nekonečný náhrdelník teček vzdálených od sebe o 1, přičemž jedna z nich je v $\pi$. Teď už nepřekvapí $[\frac{1}{4}]_R=\{\frac{1}{4}+n;\ n\in\mathbb{Z}\}$ a $[13]_R=\mathbb{Z}$. Pro $x\in\mathbb{R}$ tedy dostáváme $[x]_R$ jako kopii množiny $\mathbb{Z}$ posunutou o $x$ doprava. Výrok $\mathbb{R}=\bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}}[x]_R$ vlastně tedy říká, že $\mathbb{R}$ lze získat sjednocením posunutých množin $\mathbb{Z}$. V tom rozkladu se ovšem každá třída vyskytuje mnohokrát, dokonce nekonečně mnohokrát, například $[0]_R=[1]_R=[-1]_R=\cdots=\mathbb{Z}$. To je obvyklé a vede to k následující otázce.

Máme rozklad $\{[a]_R\}_{a\in A}$, ale mnohé množiny se v něm opakují. Rádi bychom vybrali z každé třídy jednoho zástupce, čímž by vznikla množina $M$ prvků z $A$ taková, že $\{[a]_R\}_{a\in M}$ jsou již *různé* množiny, tedy každá třída je tam obsažena jen jednou, a přitom je to stále rozklad $A$. Často lze takovou množinu $M$ vybrat tak, že má nějakou zajímavou strukturu, a může nám to říct něco o struktuře samotné množiny $A$.

Jak by se dal jeden takový zástupce z každé třídy nějak rozumně vybrat v našem příkladě? Rozmyslíme si, že $\{[x]_R\}_{0\le x<1}$ je rozklad $\mathbb{R}$ a rozsah $0\le x<1$ už nelze dále zmenšit.

Za prvé, vezmeme-li libovolné $y\in\mathbb{R}$, tak určitě existuje $x\in\langle 0,1)$ a $n\in\mathbb{Z}$ takové, že $y=n+x$ (toto by mělo být jasné, $x$ je desetinná část $y$ a $n=\lfloor y\rfloor$). Pak $y\in[x]_R$. Toto ukazuje, že $\bigcup\limits_{0\le x<1}[x]_R=\mathbb{R}$.

Mohli bychom ještě nějakou množinu z tohoto rozkladu odebrat? Ukážeme, že ne, protože pro $x\neq y\in\langle 0,1)$ už platí $[x]_R\neq[y]_R$. Dokážeme to nepřímo, tedy přes obměnu (rovnosti se zpracovávají lépe než nerovnosti): Kdyby $[x]_R=[y]_R$, pak $xRy$, což značí $y-x\in\mathbb{Z}$. Jenže zároveň $x,y\in\langle 0,1)$, což znamená $|x-y|<1$. Situace, kdy $|x-y|<1$ a $y-x\in\mathbb{Z}$, je možná jedině pro $x=y$.

Pro $x,y\in\langle 0,1)$ jsme dokázali, že $[x]_R=[y]_R \implies x=y$, tudíž platí i obměna $x\neq y \implies [x]_R\neq[y]_R$.

Z důkazu je jasné, že podobně si můžeme jako množinu indexů vzít libovolný polouzavřený interval délky 1 a zase dostaneme rozklad množiny, který už nelze dále zmenšit. Jsou samozřejmě i jiné možnosti, třeba $\langle 0,\frac{1}{2})\cup\langle\frac{3}{2},2)$ by fungovalo, jdou vymyslet i šílenější množiny indexů.

Jedna šťouravá otázka nakonec: Šlo by ty zástupce vybírat tak, aby v každém intervalu typu $\langle n,n+1)$ pro $n\in\mathbb{Z}$ byl jen jeden? Takže pro jednu třídu bychom vybrali něco z $\langle 0,1)$, pro další něco z $\langle 1,2)$, pro další z $\langle -1,0)$, pro další z $\langle 2,3)$ atd. Odpověď zní, že to možné není. Každá třída $[a]_R$ je totiž spočetná, ale $\mathbb{R}$ spočetná není, tudíž

je nespočetně mnoho různých tříd ekvivalence v rozkladu. Musíme proto vybrat nespočetně mnoho zástupců, viz ten interval $\langle 0,1)$, což uvažovaným stylem nejde, intervalů typu $\langle n,n+1)$ je samozřejmě jen spočetně mnoho.
$\triangle$

Ekvivalence a rozklady jsou užitečné z jednoho důvodu, umožňují schovávat nepodstatné detaily. Představme si, že zkoumáme nějaké objekty a zajímají nás nějaké podstatné vlastnosti $V$. Můžeme pak definovat ekvivalenci podmínkou, že objekty sdílejí vlastnosti $V$. Všechny objekty s konkrétní variantou podstatných vlastností se pak dostanou do jedné skupiny a my máme možnost je zkoumat najednou, například tak, že pozkoumáme jednoho konkrétního zástupce této skupiny.

**Příklad 4a.f:** Toto je mírně až silně nerealistický případ ilustrující obecné povídání předchozího odstavce.

Nechť $A$ je množina všech počítačů. Definujeme na ní relaci $R$ takto: $aRb$ jestliže $a$ a $b$ jedou pod stejným operačním systémem (včetně verze, patche, opravného balíku atp.)

Poznámka zvaná reality check: Aby tohle fungovalo, musíme předpokládat, že je tento operační systém jednoznačně dán; dá se to zařídit například tak, že pokud má nějaký počítač možnost multiple boot, tak se pro účely tohoto příkladu považuje za více počítačů, podle toho, do jakého OS naběhne. Budeme také ignorovat případy, kdy si někdo nastartuje počítač do operačního systému $A$ a spustí si v něm emulátor systému $B$, ve kterém dále pracuje. Konec poznámky omezující realitu tak, abychom při definici této relace nemuseli přemýšlet, jak se vypořádat se vším, co si lidi dokážou zbastlit.

Snadno se ověří, že jde o ekvivalenci. Reflexivita je snad jasná, symetrie už z definice. Tranzitivita: Jestliže $aRb$ a $bRc$, pak mají $a,b$ stejný OS a $b,c$ mají stejný OS. Podle naší poznámky má $b$ jen jeden OS, je tedy společný pro $a,c$ a máme $aRc$.

Tato ekvivalence nám rozloží množinu všech počítačů do tříd podle toho, na jakém OS jedou (desítky podverzí různých generací Windblows, různí tučňáci s ještě různějšími X-Win nápady, rozličné verze DOSu pro staromilce (osobně doporučuji 4DOS), Nexty, Applí operační systémy,...). Náš pohled na počítače se tím prudce zjednoduší a pokud za námi někdo přijde pro radu, tak se prostě zeptáme, do jaké třídy jeho hromádka silikonu patří, a budeme mu s vysokou pravděpodobností schopni poradit, aniž bychom přesně věděli, co má vlastně za krabičku.

To je samozřejmě další bod, ve kterém tento školní případ naráží na realitu :-), počítače se již nějakou dobu chovají často nevypočítatelně a jeví známky toho, že mají vlastní osobnost (většinou zlomyslnou).
$\triangle$

Nicméně i když nedokonalá, pořád je to dostatečně rozumně fungující metoda na to, aby zjednodušila náš život, takže ji vidíme všude kolem nás (třeba když se nám pokazí auto, tak je v servisu zajímá, jaké je značky, ne konkrétní výrobní série, a většinou to stačí; studenti jsou rozděleni do tříd podle ročníků atd atd.). Dokonce se dá říct, že náš mozek přímo funguje v těchto nedokonalých ekvivalencích, každý si během dětství vytváříme obraz světa tak, že si věci rozdělujeme do škatulek (psi, kočky, květinky, dospělí, děti, upíři, samopaly) a pak podvědomě hodnotíme podle toho, do které skupiny co patří, jakkoliv je to někdy nespravedlivé. To už je život.

Samozřejmě ve světě matematiky věci fungují mnohem vyhraněněji a hranice nejsou tak zamlžené, takže se ekvivalence stávají mocným nástrojem k vytváření skupin, které pak zkoumáme najednou (zobrazení prostá a ta ostatní, množiny konečné, spočetné a ty ostatní, ... ).

**Příklad 4a.g:**

**1)** Pravděpodobně všichni čtenáři se s třídami ekvivalence setkali v geometrii. Existuje tam pojem vázaných vektorů, což jsou zhruba řečeno šipky například v rovině, podle toho, v kolikarozměrném světě pracujeme. Každá taková šipka někde začíná a někde končí a je jich opravdu dost. V aplikacích se ale ukazuje, že to opravdu důležité není začátek a konec, ale směr a velikost. Jinými slovy, pokud mají dva vektory tyto dva atributy stejné, tak už se mohou lišit umístěním a nějak zvlášť nám to nevadí.

Formálně se tedy zavede ekvivalence, dva vázané vektory jsou ekvivalentní, pokud mají stejný směr i velikost. Vzniklé třídy ekvivalence jsou to, čemu říkáme volné vektory, přičemž všechny vektory z jedné konkrétní třídy považujeme v zásadě za stejné, což se odráží mimo jiné i v tom, že mají všechny stejné souřadnice. V konkrétních situacích si pak ze třídy vybíráme vhodného zástupce, například pokud chceme znát souřadnice příslušné k dané třídě vektorů, tak si z ní vybereme vektor, který začíná v počátku, a jeho konec nám dá souřadnice. Když chceme dva volné vektory (tedy vlastně dvě třídy ekvivalence) sečíst, tak si u prvního vybíráme zástupce začínajícího v počátku, ale u druhého už vybíráme zástupce začínajícího tam, kde první skončil.

Pro studenty začínající s vektory je někdy těžké si na taková kouzla zvyknout, ale pokud si dobře rozumí s ekvivalencemi, tak to vlastně není nic zvláštního.

**2)** Myšlenka, že do pytlíku schováme spoustu objektů a pak již manipulujeme s pytlíkem jako celkem, se přirozeně objevuje i v analýze. Neurčitý integrál funkce $f$ je jistá množina funkcí, ale my s ní běžně pracujeme jako s jedním objektem.

Formálně bychom to zařídili takto. Nechť $F$ je množina všech reálných funkcí, které jsou diferencovatelné na vnitřku definičního oboru. Pak definujme relaci $F \sim G$ právě tehdy, když $F' = G'$. Snadno se ukáže, že tato relace je ekvivalence. Když se podíváme na jednu třídu ekvivalence $[F]_\sim$, tak hned vidíme, že je to vlastně neurčitý integrál k funkci $F'$. Kdykoliv pracujeme se symbolem $\int F'\,dx$, tak vlastně pracujeme s touto třídou ekvivalence. Jsou situace (například při integraci per partes), kdy potřebujeme nějakou primitivní funkci a vybíráme si dle libosti, což zase odpovídá naší zkušenosti s ekvivalencemi, že v zásadních aplikacích na konkrétní volbě zástupce třídy vůbec nezáleží.

△

Zatímco ne každý se potkal s volnými a vázanými vektory, existuje jeden objekt, který potkali úplně všichni a který jsou vlastně také třídy ekvivalence. Jsou to zlomky, viz kapitola 8d. Teď jedna skutečná aplikace.

**Příklad 4a.h:** Uvažujme množinu $A$ řetězců nad anglickou abecedou, zvolme pevně nějaké $n \in \mathbb{N}$. Definujeme relaci $\sim$ na $A$ pro slova $v, w$ předpisem $v \sim w$ buď jestliže jsou obě slova kratší než $n$ znaků a jsou stejná, nebo jestliže mají obě slova alespoň $n$ znaků a na prvních $n$ znacích se shodují.

Použili jsme pro tuto relaci značku $\sim$, aby se nám $R$ nepletlo do písmenek v řetězcích. Je snadné ověřit, že jde o ekvivalenci.

Například jestliže $n = 3$, pak máme de $\sim$ de a žádné jiné slovo už s „de“ ekvivalentní není, ale s delším řetězcem „pec“ jsou ekvivalentní třeba „pec“, „pecka“, „pecen“, „pecxyzancdefghij“ a nekonečně mnoho dalších.

Takže $[\text{pec}]_\sim$ jsou všechny řetězce, které začínají „pec“, zatímco pro libovolný dvou či jednoznakový řetězec $w$ máme $[w]_\sim = \{w\}$.

Tento příklad není uměle vymyšlen, jazyk C dovoloval libovolnou délku názvu proměnných, ale při rozlišování používal jen několik prvních písmen. Množina tříd ekvivalence pak vlastně udává, které různé proměnné lze používat.

△

Užitečnost takového shlukování (a také to, že s každou třídou pak pracujeme jako s jedním samostatným objektem) vedly k zavedení pojmu, který to shrnuje. My zde s ním pracovat nebudeme, uvádíme jej pro úplnost, kdyby na něj čtenář někdy narazil.

**Definice.**
Nechť $R$ je relace ekvivalence na množině $A$. Množině $\{[a]_R;\ a \in A\}$ říkáme **faktorová množina podle ekvivalence** $R$ a značíme ji $A/R$.

Jisté vysvětlení značení: Pokud by byla množina $A$ konečná a všechny třídy ekvivalence měly stejnou mohutnost $n$, pak má množina $A/R$ mohutnost $|A|/n$.

V matematice je někdy klíčový obrat, kdy původní množinu rozdělíme na třídy ekvivalence a s těmi pak pracujeme jako s objekty, aniž bychom se příliš vrtali v tom, co se vlastně děje uvnitř takových tříd. Již jsme viděli příklady s vektory nebo s primitivními funkcemi, další (který vlastně známe všichni) je v kapitole 8d o racionálních číslech, další důležitý v kapitole 7, za přečtění stojí i poznámka 4b.9.

### Ekvivalence a operace

Z představy, kterou o ekvivalenci máme, by mělo být vidět, že pokud z grafu ekvivalence odebereme nějaké vrcholy včetně spojnic k nim vedoucích, tak z toho zase zůstane graf rozdělený na izolovaná hnízda.

**Fakt 4a.3.**
Nechť $R$ je relace ekvivalence na nějaké množině $A$. Pak restrikce $R$ na libovolnou podmnožinu $A$ je zase ekvivalence.

Důkaz plyne okamžitě z Faktu 3b.4.

V praxi to třeba znamená, že když jsme tady dokázali, že relace $=$ je ekvivalence na $\mathbb{R}$, tak už můžeme rovnost používat pro libovolnou podmnožinu $M \subseteq \mathbb{R}$, třeba na $\mathbb{N}$, a zase to bude ekvivalence. Mnohé z příkladů v tomto textu jsou vyráběny právě restrikcí známé relace na nějakou pěknou malou množinu, aby ten příklad moc nenarostl.

U operací množinových se stačí odvolat na Fakt 3c.2, viz cvičení 4a.14. Jak je na tom skládání? Když složíme dvě různé ekvivalence, pak ekvivalence vzniknout nemusí, problém je s tranzitivitou, viz diskuse po Faktu 3c.4.

Zbývá tedy situace, kdy skládáme stejnou ekvivalenci samu se sebou. Bylo by svůdné využít Větu 3c.5 k tvrzení, že když je $R$ ekvivalence, tak je $R^n$ zase ekvivalence. Ve skutečnosti je to ovšem ještě jednodušší, z Věty 3b.6 totiž okamžitě vyplyne toto:

**Důsledek 4a.4.**
Nechť $R$ je relace ekvivalence na množině $A$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $R^n = R$.

Ekvivalence tedy nemá smysl umocňovat a už vůbec se tím nemohou změnit jejich vlastnosti. Podobně se nemá smysl ptát, co s ekvivalencí $R$ udělá, když ji obrátíme, protože ekvivalence jsou symetrické a tudíž zase $R^{-1} = R$, nic nového nedostaneme.

V sekci 3b.9 jsme představili součinovou relaci, kdy dva vektory porovááváme prostřednictvím jejich souřadnic. Z výsledků dotyčné sekce okamžitě plyne následující.

**Věta 4a.5.**
Nechť $(A_1, R_1), \dots, (A_n, R_n)$ jsou množiny s relacemi ekvivalence. Pak příslušná součinová relace $R$ na množině $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ je ekvivalence na $A$.

O ekvivalencích a rozkladech se toho samozřejmě dá říct více, pro pár zajímavých nápadů doporučujeme cvičení, například cvičení 4a.15.

## Cvičení

**Cvičení 4a.1** (rutinní)**:** Určete, zda relace určené následujícími maticemi jsou ekvivalence:

(i) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (iii) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (v) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (iv) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

**Cvičení 4a.2** (rutinní)**:** Rozhodněte, která z následujících relací na množině $A$ lidí je ekvivalence, odpověď zdůvodněte:
(i) $aRb$ znamená, že $a, b$ se někdy potkali;
(ii) $aRb$ znamená, že $a, b$ mají společného známého;
(iii) $aRb$ znamená, že $a, b$ mají stejnou nejoblíbenější knihu (zde předpokládejte, že každý má jen jednu takovou).

**Cvičení 4a.3** (rutinní)**:** Na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ uvažujte následující relaci: $aRb$ jestliže mají slovní vyjádření pro $a$ a $b$ stejný počet písmen.
Vypište prvky této relace. Ukažte, že je to ekvivalence, pak nakreslete její zjednodušený graf. Pro všechny prvky určete jejich třídy ekvivalence a najděte odpovídající rozklad množiny.

**Cvičení 4a.4** (rutinní, poučné, zkouškové)**:** Ve cvičení 3b.4 se vlastně ukázalo, že následující relace na $\mathbb{Z}$ jsou ekvivalence:
(i) $aRb$ jestliže $|a| = |b|$;
(ii) $aRb$ jestliže $a - b = 2k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.
Pro každou z těchto relací najděte $[13]_R$ a poté popište obecně, jak třídy ekvivalence vypadají.

**Cvičení 4a.5** (rutinní, poučné, zkouškové)**:** Rozhodněte, která z následujících relací na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je ekvivalence:
(i) $(a_1, a_2)R(b_1, b_2)$ jestliže $a_1 b_2 = a_2 b_1$;
(ii) $(a_1, a_2)R(b_1, b_2)$ jestliže $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$;
(iii) $(a_1, a_2)R(b_1, b_2)$ jestliže $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$;
(iv) $(a_1, a_2)R(b_1, b_2)$ jestliže $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$.
Pro ty, které jsou ekvivalence, najděte $[(1, 2)]_R$.

**Cvičení 4a.6** (dobré, poučné)**:** Uvažujme množinu $A$ všech zobrazení ze $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$. Která z následujících relací je ekvivalence? Pro ty, které jsou, určete třídy ekvivalence.
(i) $\{(T, S);\ T(1) = S(1)\}$;
(ii) $\{(T, S);\ T(0) = S(0)$ nebo $T(1) = S(1)\}$;
(iii) $\{(T, S);\ T(0) = S(0)$ a $T(1) = S(1)\}$;
(iv) $\{(T, S);\ T(n) - S(n) = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}\}$;
(v) $\{(T, S);\ \exists C \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z} :\ T(n) - S(n) = C\}$;
(vi) $\{(T, S);\ T(1) = S(0)$ a $T(0) = S(1)\}$.

**Cvičení 4a.7** (poučné)**:** Nechť $T\colon A \mapsto B$ je zobrazení. Definujme relaci na $A$ předpisem $aRb$ právě tehdy, když $T(a) = T(b)$. Dokažte, že je to ekvivalence, a určete její třídy ekvivalence.
Poznámka: Tím obecně dokážeme, že porovnávání objektů pomocí shodnosti nějakého ukazatele dává ekvivalenci. Všechny ekvivalence lze takto reprezentovat, jako úrovňové množiny nějakého zobrazení.

**Cvičení 4a.8** (poučné)**:** Nechť $R$ je relace na množině všech trojúhelníků v rovině definovaná takto: $aRb$ jestliže lze trojúhelník $a$ získat z trojúhelníka $b$ posunem, rotací, zrcadlením či kombinací několika těchto transformací. Dokažte, že je to relace ekvivalence.
Poznámka: Toto nám umožní redukovat všechny trojúhelníky v rovině jen na informaci o délkách stran a úhlech.

**Cvičení 4a.9** (poučné)**:** Uvažujme šachovnici $2 \times 2$, nechť $A$ je množina všech možných obarvení polí této šachovnice bílou a černou (rozumí se tím, že každé pole je vybarveno právě jednou z těchto dvou barev). Definujeme relaci $R$ na $A$ předpisem: $aRb$ jestliže lze obarvení $b$ získat z obarvení $a$ rotací či zrcadlením šachovnice či kombinací několika těchto transformací. (Zpřesňující poznámka: připouští se jen takové rotace a zrcadlení, aby byla zase šachovnice jako celek v základní pozici, čili rotace o násobky pravého úhlu a zrcadlení okolo os souměrnosti šachovnice). Dokažte, že jde o relaci ekvivalence, a najděte množinu nějakých obarvení tak, aby byla nejmenší možnou množinou zástupců tříd ekvivalence.
Poznámka: Geometrie a ekvivalence se spolu potkávají velice často, například volné vektory jsou třídy ekvivalence vázaných vektorů.

**Cvičení 4a.10** (poučné)**:** Ve cvičení 3b.7 se ukázalo, že následující relace jsou ekvivalence. Určete, jak pro ně vypadají třídy ekvivalence.
(i) Relace $R$ na množině $A$ všech reálných polynomů definovaná jako $p(x)Rq(x)$ jestliže mají $p$ a $q$ stejný stupeň.
(ii) Relace $R$ na množině $A$ všech reálných polynomů definovaná jako $p(x)Rq(x)$ jestliže mají $p$ a $q$ stejné reálné kořeny včetně násobnosti.
(iii) Relace $R$ na množině $A$ všech reálných polynomů definovaná jako $p(x)Rq(x)$ jestliže mají $p$ a $q$ stejné komplexní kořeny včetně násobnosti.

**Cvičení 4a.11** (rutinní)**:** Uvažujte následující relace definované na množině všech (konečných) binárních řetězců. Pro každou z nich dokažte, že je ekvivalence, a určete, jak vypadají $[1001]_R$ a $[0]_R$.
(i) $aRb$ jestliže řetězce $a, b$ mají stejný počet jedniček;
(ii) $aRb$ jestliže řetězce $a, b$ mají stejnou paritu výskytu jedniček.

**Cvičení 4a.12** (rutinní)**:** Který z následujících souborů podmnožin množiny $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ je jejím rozkladem? Nakreslete pak graf odpovídající ekvivalence.
(i) $S = \{\{1,2,5\},\{6,7\},\{3\}\}$; (ii) $S = \{\{1,2,5\},\{6,7\},\{3,4\}\}$; (iii) $S = \{\{1,2,4,5\},\{6,7\},\{3,4\}\}$.

**Cvičení 4a.13** (rutinní, poučné)**:** Který z následujících souborů je rozkladem množiny všech binárních řetězců?
(i) Řetězce začínající 00, řetězce začínající 01, řetězce začínající 11, řetězce začínající 10;
(ii) Řetězce začínající 00, řetězce začínající 1;
(iii) Řetězce obsahující 00, řetězce obsahující 01, řetězce obsahující 11, řetězce obsahující 10;
(iv) Řetězce začínající 00, řetězce začínající 01, řetězce začínající 1.

**Cvičení 4a.14** (rutinní, poučné)**:** Který z následujících souborů podmnožin jsou rozkladem množiny $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?
(i) množina párů $(x, y)$ takových, že $x$ nebo $y$ je liché; množina párů $(x, y)$ takových, že $x$ je sudé; množina párů $(x, y)$ takových, že $y$ je sudé;
(ii) množina párů $(x, y)$ takových, že $x$ nebo $y$ je liché; množina párů $(x, y)$ takových, že $x$ a $y$ jsou sudé;
(iii) množina párů $(x, y)$ takových, že $xy > 0$; množina párů $(x, y)$ takových, že $xy < 0$.

**Cvičení 4a.15** (poučné)**:** Dokažte: Jsou-li $R_1, R_2$ relace ekvivalence na téže množině $A$, pak $R_1 \cap R_2$ je také ekvivalence, ale $\overline{R}_1$ ani $R_1 - R_2$ nejsou nikdy ekvivalence.

**Cvičení 4a.16** (poučné, dobré)**:** Nechť $S_1, S_2$ jsou dva rozklady téže množiny $A$. Řekneme, že $S_1$ je **zjemnění** (**refinement**) rozkladu $S_2$, jestliže každá množina z $S_1$ je podmnožinou nějaké množiny z $S_2$.
Intuitivně, $S_1$ vzniklo tak, že se dále rozdělily nějaké množiny z $S_2$.
Dokažte následující: Nechť $R_1, R_2$ jsou relace ekvivalence na množině $A$. Pak $R_1 \subseteq R_2$ právě tehdy, když je rozklad $\{[a]_{R_1}\}$ zjemněním rozkladu $\{[a]_{R_2}\}$.
Intuitivně: Čím víc dvojic v relaci ekvivalence, tím větší třídy—ano, to zní logicky.

**Cvičení 4a.17** (poučné, dobré)**:** Jestliže uděláme tranzitivní uzávěr symetrického uzávěru reflexivního uzávěru relace, dostaneme nutně ekvivalenci?

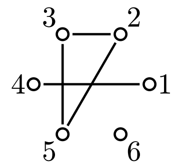
**Cvičení 4a.18** (poučné, dobré)**:** Nechť $R$ je relace na množině $A$. Řekneme, že je **cirkulární** (**circular**), jestliže pro každé $a, b, c \in A$ platí: Jestliže $aRb$ a $bRc$, pak $cRa$.
Dokažte: Relace $r$ je ekvivalence právě tehdy, když je reflexivní a cirkulární.

**Řešení:**

**4a.1:** Nejsnáze poznáme reflexivitu, matice musí mít 1 všude na diagonále. Tím jsme vyloučili (ii). Symetrii poznáme tak, že matice musí být symetrická. Kontrola dvojic souměrných podél diagonály vyřadí případy (i) a (iv). Zbývají případy (iii) a (v) a kontrola tranzitivity. Jedna možnost je použít Booleanovský součin. Druhá možnost je vypsat si z matice všechny nediagonální jedničky jako dvojice v relaci a zkoumat tranzitivitu na nich. U (v) se tím přijde na navazující dvojice $(1,2)$ a $(2,3)$, kdy zkratka $(1,3)$ v relaci není, tedy (v) není tranzitivní. U (iii) i tento test uspěje, je to tedy ekvivalence.

**4a.2:** (i): Není tranzitivní, $a$ potkal $b$, $b$ potkal $c$ nemusí znamenat $a$ potkal $c$.
(ii): Není tranzitivní.
(iii): Je ekvivalence. Označme $k(a)$ nejoblíbenější knihu $a$. Pak $k(a) = k(a)$ tedy $aRa$, reflexivita.
Dále $aRb \implies k(a) = k(b) \implies k(b) = k(a) \implies bRa$, symetrie.
Dále $aRb \wedge bRc \implies k(a) = k(b) \wedge k(b) = k(c) \implies k(a) = k(c) \implies aRc$ tranzitivita.

**4a.3:** Je praktické zavést funkci $p(n)$ značící počet písmen v čísle $n$. Pak $p(1) = 5$, $p(2) = 3$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 3$, $p(6) = 4$. Odtud snadno
$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,4),(4,1),(2,3),(3,2),(2,5),(5,2),(3,5),(5,3)\}$.




R: $a \in A \implies p(a) = p(a) \implies aRa$.
S: $a, b \in A$: $aRb \implies p(a) = p(b) \implies p(b) = p(a) \implies bRa$.
T: $a, b, c \in A$: $aRb \wedge bRc \implies p(a) = p(b) \wedge p(b) = p(c) \implies p(a) = p(c) \implies aRc$.
$[1]_R = [4]_R = \{1,4\}$, $[2]_R = [3]_R = [5]_R = \{2,3,5\}$, $[6]_R = \{6\}$.
$S = \{\{1,4\},\{2,3,5\},\{6\}\}$.

**4a.4:** (i): $[13]_R = \{a \in \mathbb{Z};\ 13Ra\} = \{a \in \mathbb{Z};\ |13| = |a|\} = \{-13, 13\}$; $[n]_R = \{n, -n\}$.
(ii): $[13]_R = \{a \in \mathbb{Z};\ 13Ra\} = \{a \in \mathbb{Z};\ \exists k \in \mathbb{Z}\colon 13 - b = 2k\} = \{a \in \mathbb{Z};\ \exists k \in \mathbb{Z}\colon b - 13 = 2k\}$
$= \{a \in \mathbb{Z};\ \exists k \in \mathbb{Z}\colon b = 13 + 2k\} = \{13 + 2k;\ k \in \mathbb{Z}\}$;
$[n]_R = \{n + 2k;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

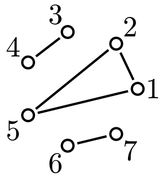
**4a.5:** (i): R: $(a_1,a_2)R(a_1,a_2) \iff a_1a_2 = a_2a_1$ vždy pravda.
S: $(a_1,a_2)R(b_1,b_2) \implies a_1b_2 = a_2b_1 \implies b_1a_2 = b_2a_1 \implies (b_1,b_2)R(a_1,a_2)$, ano.
T: $(a_1,a_2)R(b_1,b_2) \wedge (b_1,b_2)R(c_1,c_2) \implies a_1b_2 = a_2b_1 \wedge b_1c_2 = b_2c_1$. Z první $b_2 = \frac{a_2b_1}{a_1}$ do druhé $b_1c_2 = \frac{a_2b_1}{a_1}c_1 \implies a_1c_2 = a_2c_1 \implies (a_1,a_2)R(c_1,c_2)$. Ale co když $a_1 = 0$? Rozbor situace, podezření, není tranzitivní!
Protipříklad: $(1,1)R(0,0)$, $(0,0)R(2,1)$, ale $(1,1)R(2,1)$ neplatí.
Není ekvivalence.
(ii): R: $(a_1,a_2)R(a_1,a_2) \iff a_1 + a_2 = a_2 + a_1$ vždy pravda.
S: $(a_1,a_2)R(b_1,b_2) \implies a_1 + b_2 = a_2 + b_1 \implies b_1 + a_2 = b_2 + a_1 \implies (b_1,b_2)R(a_1,a_2)$, ano.
T: $(a_1,a_2)R(b_1,b_2) \wedge (b_1,b_2)R(c_1,c_2) \implies a_1+b_2 = a_2+b_1 \wedge b_1+c_2 = b_2+c_1$. Sečteme obě rovnice: $a_1+b_2+b_1+c_2 = a_2 + b_1 + b_2 + c_1$, zkrátíme, $a_1 + c_2 = a_2 + c_1 \implies (a_1,a_2)R(c_1,c_2)$, tranzitivní. Je to ekvivalence.
$[(1,2)]_R = \{(b_1,b_2) \in \mathbb{Z}^2;\ (1,2)R(b_1,b_2)\} = \{(b_1,b_2) \in \mathbb{Z}^2;\ 1 + b_2 = 2 + b_1\} = \{(b_1,b_2) \in \mathbb{Z}^2;\ b_2 = 1 + b_1\}$
$= \{(k, k+1); k \in \mathbb{Z}\}$.
(iii): R: $(a_1,a_2)R(a_1,a_2) \iff a_1 - a_2 = a_1 - a_2$ vždy pravda.
S: $(a_1,a_2)R(b_1,b_2) \implies a_1 - a_2 = b_1 - b_2 \implies b_1 - b_2 = a_1 - a_2 \implies (b_1,b_2)R(a_1,a_2)$, ano.
T: $(a_1,a_2)R(b_1,b_2) \wedge (b_1,b_2)R(c_1,c_2) \implies a_1 - a_2 = b_1 - b_2 \wedge b_1 - b_2 = c_1 - c_2 \implies a_1 - a_2 = c_1 - c_2$
$\implies (a_1,a_2)R(c_1,c_2)$, tranzitivní. Je to ekvivalence.
$[(1,2)]_R = \{(b_1,b_2) \in \mathbb{Z}^2;\ (1,2)R(b_1,b_2)\} = \{(b_1,b_2) \in \mathbb{Z}^2;\ 1 - 2 = b_1 - b_2\} = \{(b_1,b_2) \in \mathbb{Z}^2;\ b_2 = 1 + b_1\}$
$= \{(k, k+1); k \in \mathbb{Z}\}$.
(iv): R: $(a_1,a_2)R(a_1,a_2) \iff a_1 - a_2 = a_2 - a_1$ není vždy pravda.
Protipříklad: neplatí $(1,2)R(1,2)$, protože neplatí $1 - 2 = 2 - 1$. Není to ekvivalence.

**4a.6:** (i): Ano. R: $T(0) = T(0)$. S: $T(0) = S(0) \implies S(0) = T(0)$. T: $T(0) = S(0) \wedge S(0) = U(0)$
$\implies T(0) = U(0)$.
Zvolme si číslo $c \in \mathbb{Z}$. Pak třída ekvivalence odpovídající tomuto číslu je množina všech zobrazení, jejichž grafy procházejí bodem $(1,c)$. Dá se to tedy představit, že se grafy v tomto bodě setkají, ale doleva i doprava už se rozbíhají dle libosti. Zvolíme-li jiné $c$, dostaneme jinou třídu, jedna třída se tedy posouvá nahoru a dolů podle volby $c$.
(ii): Není T; stačí zvolit $T$ tak, aby $T(0) = 1$ a $T(1) = 3$, $S$ tak aby $S(0) = 1$ (pak $(T,S) \in R$) a $S(1) = 2$ a $U$ tak, aby $U(0) = 5$ a $U(1) = 2$ (pak $(S,U) \in R$), ale neplatí $(T,U) \in R$.
(iii): Ano. Podobné jako (i), třída ekvivalence jsou všechna zobrazení, jejichž grafy procházejí společným bodem $(0,c)$ a také $(1,d)$.
(iv): Není R,S,T.

(v): Ano. Třída ekvivalence vznikne tak, že si vezmeme jedno zobrazení a odpovídající třída se skládá ze všech posunů jeho grafu nahoru a dolů.
(vi): Není R,T.
**4a.7:** R: $T(a) = T(a) \implies aRa$;
S: $aRb \implies T(a) = T(b) \implies T(b) = T(a) \implies bRa$;
T: $aRb \wedge bRc \implies T(a) = T(b) \wedge T(b) = T(c) \implies T(a) = T(c) \implies aRc$;
$[a]_R = \{b \in A;\ aRb\} = \{b \in A;\ T(a) = T(b)\} = T^{-1}[T(a)]$.
**4a.8:** R: trojúhelník získáme z něj samého žádnou transformací.
S: získali jsme $b$ z $a$ pomocí transformací, tak je uděláme pozpátku a naopak a dostaneme z $b$ to $a$.
T: z $a$ získáme transformacemi $b$, z toho pak transformacemi $c$, spojíme je, dostáváme z $a$ transformacemi $c$.
**4a.9:** Ekvivalence: Podobné předchozímu.
Množina: viz pět obarvení napravo, ostatní z nich dostaneme ale jedno z druhého ne.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | $b$ | $c$ | $b$ | $c$ | $c$ | $c$ | $b$ | $c$ | $c$ | $c$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $b$ | $b$ | $b$ | $b$ | $c$ | $c$ | $b$ | $c$ | $c$ |

**4a.10:** (i): $[p(x)]_R$ jsou všechny polynomy stejného stupně jako $p$.
(ii): $[p(x)]_R$ jsou všechny polynomy, které mají stejné reálné kořeny včetně násobnosti. Víc se říci nedá.
(iii): $[p(x)]_R$ jsou všechny polynomy, které mají stejné komplexní kořeny včetně násobnosti. To ale znamená, že mají stejné kořenové faktory $(x - \lambda)$ v rozkladu, mohou se tedy lišit jen konstantou před kořenovými faktory. Závěr: Jde o násobky $p$, $[p(x)]_R = \{a \cdot p(x);\ a \in \mathbb{R} - \{0\}\}$.
Proč to nešlo u (ii)? Protože v reálném oboru rozklad není zaručen, například $p(x) = (x - 13)(x^2 + 1)$ a $q(x) = (x - 13)(x^2 + 4)$ mají stejné reálné kořeny, ale jeden není násobkem druhého.
**4a.11:** (i) Zaveďte si $j(r)$ jako počet jedniček v řetězci $r$, pak $aRb \iff j(a) = j(b)$ a důkaz je stejný jako třeba ve cvičení 4a.3.
$[1001]_R$ jsou všechny řetězce s přesně dvěma jedničkami. $[0]_R$ jsou všechny řetězce bez jedniček.
(ii) Zaveďte $j(a)$ jako počet jedniček, pak $aRb \iff j(a) - j(b) = 2k$ pro $k \in \mathbb{Z}$, je to kombinace cvičení 4a.3 a cvičení 4a.4 (ii).
$[1001]_R$ jsou všechny řetězce se sudým počtem jedniček, ditto $[0]_R$.
**4a.12:** (i): chybí 4
(ii): ano viz obrázek
(iii): překryv, $\{1, 2, 4, 5\} \cap \{3, 4\} \neq \emptyset$.




**4a.13:** (i): ano; (ii): ne, chybí řetěce začínající 01; (iii): ne, množiny se překrývají, třeba řetězec 001 je v prvních dvou; (iv): ano.
**4a.14:** (i): ne, třeba pár (lichá, sudá) je v první i třetí množině; (ii): ano, každý pár někam patří, žádný není v obou; (iii): ne, nepokrývá páry, ve kterých je nula.
**4a.15:** Průnik: viz Fakt 3c.2.
Nechť $a \in A$. Pak $(a, a) \in R_1$, proto $(a, a) \notin \overline{R}_1$, tedy $\overline{R}_1$ není reflexivní, tudíž ani ekvivalence.
Nechť $a \in A$. Pak $(a, a) \in R_1$ a $(a, a) \in R_2$, proto $(a, a) \notin R_1 - R_2$, tedy $R_1 - R_2$ není reflexivní, tudíž ani ekvivalence.
**4a.16:** $\Longrightarrow$: Nechť $R_1 \subseteq R_2$. Tvrdíme, že vždy $[a]_{R_1} \subseteq [a]_{R_2}$: $b \in [a]_{R_1} \implies aR_1b \implies aR_2b \implies b \in [a]_{R_2}$.
$\Longleftarrow$: Nechť je $\{[a]_{R_1}\}$ zjemnění $\{[a]_{R_2}\}$. Nechť $aR_2b$. Pak $b \in [a]_{R_1}$. Protože musí existovat množina z $\{[a]_{R_2}\}$ taková, že $[a]_{R_1}$ je její podmnožinou, existuje $c \in A$ takové, že $[a]_{R_1} \subseteq [c]_{R_2}$. Pak tedy i $a, b \in [c]_{R_2}$ a proto $aR_2b$.
**4a.17:** Ano. Vznikne tak ekvivalentní uzávěr. Pozor, na pořadí záleží, viz příklad 4a.d a cvičení 3c.10.
**4a.18:** Ekvivalence je reflexivní. Je cirkulární? Nechť $aRbRc$. Z tranzitivity $aRc$, pak ze symetrie $cRa$.
Nechť je $R$ reflexivní a cirkulární. Symetrie: Nechť $aRb$. Z reflexivity i $bRb$, proto cirkularita dává $bRa$. Tranzitivita: Nechť $aRbRc$. Cirkularita dá $cRa$, symetrie pak $aRc$.

## 4b. Částečná uspořádání

Jedním z častých úkolů je srovnat prvky jeden za druhým dle nějakého kritéria či alespoň mezi nimi udělat trochu pořádek. Můžeme třeba při pohledu na seznam úkolů rozpoznat, že určité z nich musí být udělány před jinými, někdy z toho vznikne již jediné možné pořadí pro všechny, jindy je těch omezení méně a zbude jistá míra volnosti. Když se podíváme na seznam doporučených předmětů, které by měl student computer science absolvovat, tak jsou určitá omezení zvaná prerekvizity, ale také určitá volnost. Při vaření asi nemá smysl dát sůl do hrnce, dát to na oheň rozpálit a pak teprve nalít vodu (i když sranda by to asi byla†), na druhou stranu bývá jedno, v jakém pořadí nastrouháme jednotlivé brambory.

† Jakékoliv škody na majetku či zdraví vzniklé v souvislosti s tímto odstavcem jsou čistě na zdpovědnost čtenáře.

Společným prvkem těchto příkladů je, že umíme srovnávat určité jednotlivé dvojice podle nějakého kritéria a snažíme se nějak uspořádat celou množinu. Asi nejpohodlnějším srovnáním, se kterým se potkáváme, je srovnávání (celých) čísel na reálné ose, protože každé dvě umíme porovnat, a když nám někdo dá konečnou množinu čísel, tak je umíme seřadit podle velikosti. To je jakýsi ideál, ale rovnou se smiřme s tím, že velice zřídka dosažitelný, většinou jsme rádi za alespoň nějaká srovnání.

Abychom mohli rozumně pracovat, budeme od srovnávací relace chtít nějaké vlastnosti. Praxe ukázala, který typ srovnání se používá nejčastěji, nikterak překvapivě je zde silná inspirace nerovností $x \leq y$ (či $x \geq y$).

**!** **Definice.**
Nechť $R$ je relace na nějaké množině $A$. Řekneme, že $R$ je **částečné uspořádání**, jestliže je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.
V tom případě řekneme, že dvojice $(A, R)$ je **částečně uspořádaná množina**.

A relation $R$ on a set $A$ is called a **partial ordering** or a **partial order** if it is reflexive, antisymmetric and transitive.

In that case we say that the pair $(A, R)$ is a **partially ordered set**, often we just say **poset**.

Poznámka k anglické terminologii: V češtině se bohužel neujalo „čumnožina“ ani „čužina“.

Často říkáme jen „uspořádání“. Uvidíme, že uspořádání může být víc (částečné, lineární, dobré), takže když řekneme „uspořádání“, myslíme tím jen to nejobyčejnější, tedy částečné, pokud nemáme z kontextu dáno víc vlastností.

**Příklad 4b.a:** V kapitole 3b jsme viděli, že relace $x \leq y$ a $x \geq y$ jsou částečná uspořádání na $\mathbb{N}$, na $\mathbb{Z}$, na $\mathbb{Q}$, na $\mathbb{R}$ a vlastně na libovolné podmnožině reálných čísel.
$\triangle$

**!** **Značení:** Aby se zdůraznila srovnávací povaha relace částečného uspořádání, používá se často namísto symbolu $aRb$ symbol $a \preceq b$. I my to zde zavedeme, pak také hovoříme o částečně uspořádané množině $(A, \preceq)$.

**Příklad 4b.b:** Uvažujme relaci $R$ danou předpisem $|x| \leq |y|$ třeba na množině $\mathbb{Z}$. Tato relace je zjevně reflexivní, protože $|x| \leq |x|$ pro libovolné číslo, tedy $xRx$.

Tranzitivita je také splněna: Jsou-li $x, y, z$ čísla ze $\mathbb{Z}$ splňující $xRy$ a $yRz$, pak $|x| \leq |y|$ a $|y| \leq |z|$, odtud $|x| \leq |z|$ a tedy $xRz$.

Bohužel ale selže antisymetrie, protože například $(-13)R13$ a $13R(-13)$, přitom neplatí $-13 = 13$. Tato relace proto není částečným uspořádáním. Přesto je to bezesporu užitečná relace, často porovnáváme objekty podle jejich velikosti neboli magnitudy. I pro takovéto relace tedy budeme chtít vytvořit teoretický kabát, jeden možný přístup ukážeme v Poznámce 4b.9.
$\triangle$

Teď si ukážeme dva nejdůležitější příklady částečných uspořádání.

**Příklad 4b.c:** Nechť $\mathcal{M}$ je nějaký soubor množin a uvažujme relaci na $\mathcal{M}$ danou pro $A, B \in \mathcal{M}$ jako $A \preceq B$ právě tehdy, když $A \subseteq B$. Prostě nás zajímá relace inkluze na množinách. Je snadné nahlédnout, že jde o částečné uspořádání (viz Fakt 2a.1 (i), Fakt 2a.2 a Fakt 2a.3), takže $(\mathcal{M}, \subseteq)$ je částečně uspořádaná množina.

Toto bude pro nás velice důležitý příklad, protože na rozdíl od nerovností nám nenaznačuje věci, které nemusí být pravda. My jsme totiž zvyklí, že umíme porovnat pomocí $\leq$ libovolná dvě (reálná) čísla, ale to rozhodně neplatí o všech uspořádáních. Pokud například náš soubor množin $\mathcal{M}$ obsahuje množiny $\{13, 23\}$ a $\{13, 33\}$, tak je pomocí $\subseteq$ porovnat neumíme, neplatí ani $\{13, 23\} \subseteq \{13, 33\}$, ani $\{13, 33\} \subseteq \{13, 23\}$.

Relace inkluze je tedy velice vhodným příkladem, protože nás upozoňuje, že na některé věci nelze obecně spoléhat. Dokonce je to v jistém smyslu příklad univerzální, co se naučíme na inkluzi, bude fungovat pro všechna uspořádání.

Nejčastěji pracujeme se situací, kdy si množiny k porovnání nevybíráme, ale rovnou bereme všechny možné, neboli máme nějaké universum prvků $U$ a my uvažujeme množinu všech podmnožin $\mathcal{M} = P(U)$. Pokud má to universum alespoň dva různé prvky $u, v$, tak už vznikají neporovnatelné množiny $\{u\}$ a $\{v\}$.
$\triangle$

**Poznámka:** Již jsme viděli několikrát, že obecné pojmy vznikají v matematice často tak, že se vyjde z jednoho konkrétního a užitečného příkladu a zkusí se zachytit jeho podstatné rysy tak, aby vznikla bohatší kategorie zahrnující více objektů, které by se všechny (díky těm vlastnostem) chovaly v zásadě jako ten příklad, který nás inspiroval. Dá se říct, že částečná uspořádání vznikla (také) po inspiraci nerovností $\leq$ a inkluzí $\subseteq$.

Zejména pro začátečníka se při zobecňování skrývá velké nebezpečí, protože je často v pokušení používat v argumentech věci, které zná z oblíbeného inspiračního příkladu, ale neuvědomí si, že obecně již platit nemusí.

Například v naší současné situaci je spousta věcí, které jsou „jasné“, protože se s nimi čtenář setkává u nerovností celý život, ale ony obecně platit nemusí. V důkazech je tedy třeba být opatrný. Když student napíše „$p$ platí, protože $q$“, tak by se měl zamyslet, zda ten argument $q$ opravdu má zaručen pro obecné objekty, se kterými pracuje, nebo to říká jen ze zvyku. V takové situaci se právě hodí dobře znát „méně pěkné“ příklady typu relace $\subseteq$, aby člověka zastavily v rozletu, pokud myšlenky míří chybným směrem.

△

**Příklad 4b.d:** Uvažujme relaci $|$ na množině $\mathbb{N}$ danou předpisem $a \,|\, b$ právě tehdy, když $a$ dělí $b$, tedy pokud existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $b = k \cdot a$. Například $2\,|\,6$, $3\,|\,6$, ale neplatí $4\,|\,6$. O této relaci máme celou další kapitolu, kde dokážeme, že je to částečné uspořádání, viz Věta 6a.5.

I zde existují dvojice čísel, která nejsou porovnatelná, například neplatí ani $4\,|\,6$, ani $6\,|\,4$, je to tedy další velice dobrý příklad. Většinou se budeme kvůli stručnosti omezovat jen na nějakou menší podmnožinu přirozených čísel.

Poznamenejme, že relace dělitelnosti již není uspořádání, pokud připustíme i záporná celá čísla, například na množině $\mathbb{N} \cup \{-13\}$. Pak totiž platí $13\,|\,(-13)$ a $(-13)\,|\,13$, ale nemáme $-13 = 13$, tudíž relace $|$ už není na této množině antisymetrická.

△

Zmínili jsme, že relaci dělitelnosti budeme často používat jen na podmožinách $\mathbb{N}$. Tím se jako obvykle dostáváme k otázce, co s uspořádáním dělají operace.

**!**

**Fakt 4b.1.**
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Pak restrikce $\preceq$ na libovolnou podmnožinu množiny $A$ je zase částečné uspořádání.

Zde je přechod k podmnožině nejen příjemným způsobem vytváření příkladů, ale dokonce užitečným teoretickým nástrojem, zejména v důkazech.

Další tvrzení vyplyne okamžitě z Faktu 3c.3. Připomeňme, že $a \preceq^{-1} b$ právě tehdy, když $b \preceq a$.

**!**

**Fakt 4b.2.**
Jestliže je $(A, \preceq)$ částečně uspořádaná množina, pak je i $(A, \preceq^{-1})$ částečně uspořádaná množina.

Inverzní relace má u uspořádání významnější roli než obvykle, ostatně čtenář zná spřízněnost nerovností $\leq$ a $\geq$ či vlastností býti podmnožinou a býti nadmnožinou. I většina pojmů, které dále probereme, si velice dobře rozumí s přechodem k $\preceq^{-1}$.

Díky své užitečnosti má inverzní relace u uspořádání zvláštní název. Je-li dána částečně uspořádaná množina $(A, \preceq)$, pak se $(A, \preceq^{-1})$ říká **duální uspořádání** (**dual order**). Zde to nebudeme používat, protože nepůjdeme do teorie tak hluboko, aby se to vyplatilo, už tak je tu dost názvů.

Čtenář by si jako cvičení měl rozmyslet, co se stane, když se dvě uspořádání spojí pomocí operací (množinových či skládání). Necháváme to jako cvičení 4b.11, odpovědi jsou snadné po přečtení Faktů 3c.2 a 3c.4 a diskuse kolem.

V této souvislosti je zajímavé si rozmyslet, jaká je interpretace průniku dvou uspořádání. Máme dva způsoby porovnávání prvků z $A$ a my se to rozhodneme hrát na jistotu, prohlásíme, že prvek $b$ je „opravdu větší“ než $a$, jestliže zvítězí v obou výchozích porovnáních, jinak raději neřekneme nic.

Existuje ještě jedno široce používané srovnání.

**Příklad 4b.e:** Uvažujme relaci $<$ na množině $\mathbb{R}$. V příkladě 3b.c jsme ukázali, že tato relace je antisymetrická a tranzitivní, ale není reflexivní. Nejde tedy o částečné uspořádání. Tato relace je ovšem antireflexivní a asymetrická, viz část 3c.8. Další vlastnosti.

△

Tato bezesporu užitečná relace se tedy nevejde do skupiny, kterou zde zkoumáme, ale je inspirací pro skupinu jinou, která je také zajímavá, například zahrnuje vztah předek-potomek.

**Definice 4b.3.**
Uvažujme relaci $R$ na množině $A$. Řekneme, že $R$ je **ostré uspořádání** (**strict ordering**), jestliže je antireflexivní a tranzitivní.

Snadno se ukáže, že taková relace už je i asymetrická, viz cvičení 3c.12, tudíž i antisymetrická.
Víme naopak, že asymetrické relace jsou automaticky antireflexivní, takže jsme do definice mohli dát i podmínku, že dotyčná relace je asymetrická a tranzitivní.
Z praktického pohledu jsou tedy ostrá uspořádání relace antireflexivní, asymetrické, antisymetrické a tranzitivní, ale do definice coby správní matematici nechceme dávat zbytečné předpoklady.
Pro ostrá uspořádání se dá udělat teorie s věcmi obdobnými těm, které budeme pro částečná uspořádání dělat v této a příští kapitole, ale je to spíš specializovanější oblast a zde se jí nebudeme zabývat, tento pojem je pro nás pomocný. Přijde vhod při zkoumání vztahu mezi relacemi $\leq$ a $<$, protože víme, že jsou úzce svázány, dokážeme snadno vyjádřit jednu pomocí druhé. My si teď ukážeme, že toto lze udělat i obecně.

**!** **Definice.**
Nechť $\preceq$ je částečné uspořádání na množině $A$. Definujeme relaci $\prec$ na $A$ takto: Pro $a,b\in A$ platí $a\prec b$ právě tehdy, když $a\preceq b$ ale $a\neq b$.
Této relaci budeme říkat **odvozená relace** (**derived relation**).

Pro dvojici $a\prec b$ říkáme, že $a$ je **předchůdce** (**predecessor**) prvku $b$ a $b$ je **následník** (**successor**) prvku $a$.

Potvrdíme si, že se tato obecná situace opravdu chová povědomým způsobem.

**!** **Lemma 4b.4.**
Nechť $\preceq$ je částečné uspořádání na množině $A$ a $\prec$ je odvozená relace.
(i) Nechť $a,b\in A$. Jestliže $a\prec b$, pak $a\preceq b$.
(ii) Nechť $a,b\in A$. Nemůže platit najednou $a\preceq b$ a $b\prec a$.
(iii) Nechť $a,b,c\in A$. Jestliže ($a\preceq b$ a $b\prec c$) nebo ($a\prec b$ a $b\preceq c$), pak nutně $a\prec c$.

**Důkaz** (rutinní)**:** (i): Toto je jasné z definice $\prec$.
(ii): Kdyby platilo $a\preceq b$ a $b\prec a$, tak z toho druhého máme i $b\preceq a$. Z antisymetrie $\preceq$ pak $a=b$, to je ale ve sporu s předpokladem $b\prec a$.
(iii): Předpokládejme, že $a\preceq b$ a $b\prec c$. Pak podle (i) také $b\preceq c$, máme tedy řetězec $a\preceq b\preceq c$ a podle tranzitivity $\preceq$ také $a\preceq c$. Zbývá ukázat, že nemůže nastat $a=c$.
To dokážeme sporem. Kdyby $a=c$, pak se z $a\preceq b$ stane $c\preceq b$, což je podle (ii) ve sporu s $b\prec c$.
Důkaz pro případ $a\prec b$ a $b\preceq c$ je samozřejmě v zásadě stejný a přenecháme jej čtenáři jako cvičení.
□

Takovýchto lemmátek bychom mohli vymyslet spoustu, my jsme vybrali jedno, které se nám ještě bude silně hodit. Odvozená relace $\prec$ není nějak zvlášť důležitá z hlediska teorie, ale ušetří nám spoustu práce při psaní důkazů, podobně jako nám nerovnost $<$ usnadňuje život, ačkoliv bychom si dokázali vystačit jen s relací $\leq$. Čímž se dostáváme k tomu, jak jsou obecně svázána částečná a ostrá uspořádání. Již jsme to nakousli ve Faktu 3c.10, teď to uděláme pořádně.

**Věta 4b.5.**
(i) Nechť $(A,\preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Pak je odvozená relace $\prec$ antireflexivní, asymetrická a tranzitivní (je to ostré uspořádání).
(ii) Uvažujme relaci $R$ na množině $A$, která je asymetrická a tranzitivní. Definujme relaci $\preceq$ na $A$ předpisem $a\preceq b$ právě tehdy, když $aRb$ nebo $a=b$. Pak je $(A,\preceq)$ částečně uspořádaná množina.
Jestliže byla navíc $R$ antireflexivní, pak je relace $\prec$ odvozená od $\preceq$ zase rovna $R$.

**Důkaz** (poučný)**:** (i): Už definice $\prec$ vylučuje případ $a\prec a$ pro jakékoliv $a\in A$. Je to tedy relace antireflexivní.
Asymetrie: Dokážeme, že pro žádné dva prvky $a,b\in A$ nemůžeme mít zároveň $a\prec b$ a $b\prec a$. Sporem: Kdyby tomu tak bylo, tak také $a\preceq b$ a $b\preceq a$, pak podle antisymetrie $a=b$, což je ve sporu s $a\prec b$.
Připomeňme, že asymetrie je silnější než antisymetrie, takže $\prec$ je samozřejmě také antisymetrická.
Tranzitivita: Jestliže pro $a,b,c\in A$ platí $a\prec b$ a $b\prec c$, pak také $a\preceq b$ a $b\prec c$ a podle Lemmatu 4b.4 (iii) platí $a\prec c$.
(ii): Reflexivita: jasná z definice, $a\preceq a$ pro všechna $a\in A$.

Antisymetrie: Jestliže $a, b \in A$ splňují $a \preceq b$ a $b \preceq a$, pak jsou dvě možnosti, buď $a = b$ nebo $a \neq b$. V prvním případě jsme hotovi, o druhém ukážeme, že nemůže nastat. Kdyby totiž platilo $a \neq b$, pak podle definice $a \preceq b$ musí platit $a \prec b$, podobně také $b \prec a$, což je ale ve sporu s předpokladem, že $\prec$ je asymetrická.

Tranzitivita: Nechť $a, b, c \in A$ splňují $a \preceq b$ a $b \preceq c$, pak jsou tři možnosti:

Jestliže $a = b$, pak $b \preceq c$ znamená $a \preceq c$ a jsme hotovi. Jestliže $b = c$, pak $a \preceq b$ znamená $a \preceq c$ a zase jsme hotovi. (Všimněte si, že tyto dvě možnosti se navzájem nevylučují, mohou platit obě najednou). Zbývá možnost, že $a \neq b$ a $b \neq c$. Pak ovšem podle definice $\preceq$ podmínky $a \preceq b$, $b \preceq c$ znamenají $a \prec b$ a $b \prec c$, což podle tranzitivity $\prec$ dává $a \prec c$, tedy i $a \preceq c$.

Když z této $\preceq$ odvodíme $\prec$, tak vlastně máme (v množinovém zápise) $\prec = \preceq - \Delta(A)$. Zároveň $\preceq = R \cup \Delta(A)$. Rovnost $(R \cup \Delta(A)) - \Delta(A) = R$ platí v případě, že $R \cap \Delta(A) = \emptyset$, tedy v případě, že $R$ je antireflexivní.

□

Bod (ii) je pěkně vidět v akci ve cvičení 4b.5 (ii), viz také 4b.2 a další.

## ! 4b.6 Hasseův diagram

Vlastnosti částečných uspořádání nám umožňují zásadním způsobem redukovat jejich graf. Uvažujme tedy konečnou množinu $A$ a částečné uspořádání $\preceq$ na ní.

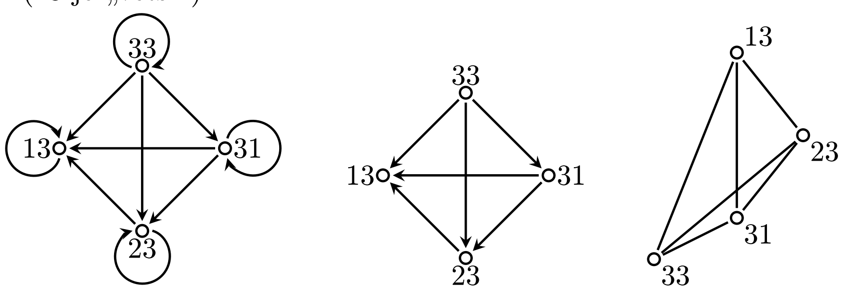
Prvním krokem ke zjednodušení grafu je, že podobně jako u ekvivalencí nemusíme kreslit smyčky, stejně víme, že jsou všude. Mimochodem, to, co zbyde, je přesně graf odvozené relace $\prec$.

Víme dále, že mezi dvěma různými body vede nejvýše jedna šipka, ale její orientace je zásadní, takže to nelze jen tak vynechat. Orientaci ale lze něčím nahradit, jmenovitě pozicí v prostoru. To je novinka, zatím jsme se při kreslení grafů nezabývali otázkou, jak konkrétně jsou jednotlivé tečky reprezentující prvky z $A$ rozmístěny.

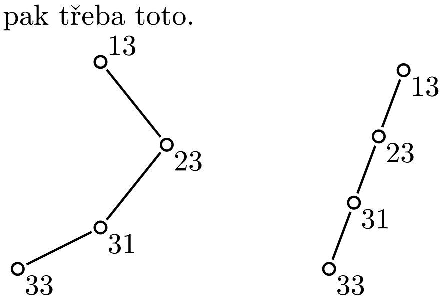
Základní myšlenka reprezentace, která se jmenuje **Hasseův diagram**, spočívá právě v chytrém uspořádání vrcholů grafu tak, aby šipky vždy směřovaly směrem vzhůru (ne nutně svisle, třeba šikmo, ale vzhůru). Tím intuitivně naznačíme, že prvky, které jsou na obrázku výše, jsou větší ve smyslu $\preceq$. Pak můžeme šipky vynechat a kreslit jen obyčejné spojnice, protože směr je již dán úmluvou z geometrie. Zkusíme si tyto první kroky na jednoduchém příkladě.

Uvažujme částečně uspořádanou množinu $(\{13, 23, 31, 33\}, \geq)$.

Nakreslíme nějaký graf, pak vynecháme smyčky a zkusíme graf přeorganizovat tak, aby zbylé šipky ukazovaly nahoru. Nakonec vynecháme šipky, „největší“ prvek je nahoře, ostatní jdou postupně dolů. Zde je třeba dát pozor na význam zadání, pracujeme s relací $\geq$, nikoliv s $\leq$. Takže třeba $23 \geq 13$ neboli $23R13$, tedy šipka vede od 23 směrem k 13, ne naopak (13 je „větší“).




Jak vidíte, dostali jsme houštinku. Hodilo by se další zjednodušení, ke kterému použijeme tranzitivitu. Díky ní víme, že když z prvku do prvku vede dlouhá cesta, tak musí vést i kratší, takže když tu kratší nenamalujeme, tak se v zásadě nic nestane, stejně vidíme, že se do cíle nakonec dostaneme. Jinými slovy, neztrácíme informaci, pokud vynecháme kratší spojnice tam, kde již máme spojení. Chceme-li u grafu částečného uspořádání vědět, zda vede šipka z $a$ do $b$ (tedy zda $a \preceq b$), stačí se podívat, jestli z $a$ do $b$ nevede cesta. Posledním krokem našeho zjednodušování je tedy vynechání těch hran, které nejsou potřeba. Kdykoliv vidíme na grafu cestu a její zkratku, tak vymažeme tu zkratku. Dostáváme pak třeba toto.




Ukázali jsme dvě možnosti, abychom naznačili, že geometrických uspořádání Hasseova diagramu může být více. Tady jsme ještě relativně omezováni, protože máme nadprůměrně dobře se chovající relaci, u těch zajímavějších už se může stát, že máme opravdu dost prostoru pro fantasii.

Právě předvedený postup ukazuje podstatu Hasseova diagramu, ale není perspektivní, protože vyznat se v houštině původního grafu je náročná práce a rovněž hledání správné geometrické konfigurace tak, že se spoléháme na inspiraci, není zrovna nejlepší nápad. Trochu se tomu dá pomoci tím, že nejprve odstraníme šipky z tranzitivity a teprve poté uspořádáme body geometricky, ale existuje postup, který nám umožní nakreslit Hasseův rovnou ze zadání.

**S** **Algoritmus 4b.7.** pro vytváření Hasseova diagramu částečného uspořádání $(A, \preceq)$ pro konečnou (malou) množinu $A$.

**1.** Vypište si seznam všech dvojic $x \prec y$ přidružené ostré relace.

**2.** Hledejte prvky $a \in A$, které se v odvozené relaci nikdy nevyskytují ve dvojicích napravo, tedy v pozici $x \prec a$. (Tj. hledejte body, do kterých nevchází žádná šipka s výjimkou té reflexivní smyčky.)

Tyto prvky zakreslete do vznikajícího diagramu jako první řádek. Pak je škrtněte z množiny $A$ a škrtněte také ze seznamu dvojic všechny, ve kterých se dotyčné prvky vyskytují.

**3.** Pokud už v množině $A$ nic nezbylo, je diagram hotov.

Jinak projděte částečně odmazaný seznam dvojic a hledejte prvky $a$ ze zmenšené množiny $A$, které nikdy nejsou napravo jako $x \prec a$. Tyto prvky zakreslete do vznikajícího diagramu jako druhý řádek počítáno zdola a vyškrtněte je z množiny $A$.

Nakreslete spojnice nahoru z vrcholů prvního řádku do vrcholů druhého řádku tam, kde jsou spolu v relaci (tedy tam, kde existují jako dvojice v seznamu dvojic $x \prec y$, neboli kde by spolu byly spojeny v běžném grafu relace). Tyto dvojice pak vyškrtněte ze seznamu $x \prec y$.

Dostáváte zkrácený seznam prvků z $A$, které ještě nejsou ve vznikajcím diagramu, a zkrácený seznam dvojic $x \prec y$, ve kterých se nevyskytují žádné prvky z prvních dvou řádků diagramu.

**4.** Pokud už v $A$ nic nezbylo, je diagram hotov.

Jinak projděte částečně odmazaný seznam dvojic a hledejte prvky $a$ ze zmenšené množiny $A$, které nikdy nejsou napravo jako $x \prec a$. Tyto prvky zakreslete do vznikajícího diagramu jako nový řádek nahoru a vyškrtněte je z množiny $A$.

Nakreslete spojnice z bodů v dolních řádcích do bodů v novém horním řádku tam, kde v relaci existují jako dvojice, ale pouze v tom případě, že tuto cestu nelze ukutečnit pomocí již zakreslených spojnic a to čistě směrem vzhůru (pokud se někam dostanete tak, že v průběhu cesty musíte i dolů, pak se to nepočítá). Zde je důležité postupovat shora dolů, tedy nejprve zakreslovat spojnice mezi horním řádkem a tím bezpostředně pod ním, pak mezi horním a tím o dva níže, až nakonec se zkoumají možné spojnice mezi horním a dolním řádkem.

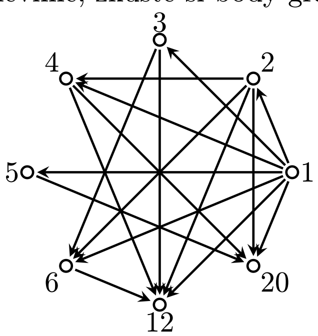
Z onoho postupně se zkracujícího seznamu dvojic $x \prec y$ vymažte všechny, ve kterých se vyskytují prvky z právě přidané horní řady diagramu.

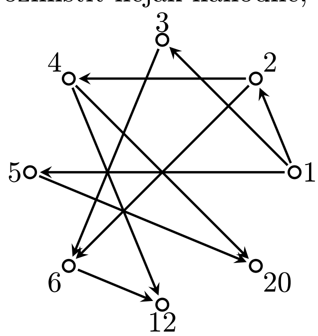
Jděte znovu na bod 4.

$\triangle$

Je také možné kreslit diagram shora, tedy vždy hledat body, do kterých šipky pouze vchází. To, že algoritmus kreslením zdola či shora funguje, je založeno na pojmu minimum a maximum, viz poznámka 4c.4.

**Příklad 4b.f:** Vytvoříme Hasseův diagram pro množinu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 20\}$ uspořádanou dělitelností. Nejprve si sami udělejte intuitivní postup, kdy nejprve z grafu bez smyček odebíráme přepony v trojúhelnících a pak uhádneme tvar, kdy všechny šipky vedou vzhůru. Abychom si správně nasimulovali situaci, kdy pracujeme s relací, o které dopředu moc nevíme, zkuste si body grafu rozmístit nějak náhodně, třeba takto:



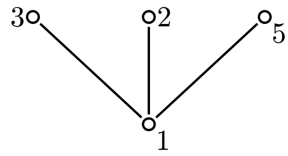




Překreslete si ten obrázek vpravo, ale bez označení vrcholů čísly, aby vám to nenapovídalo, a zkuste graf překroutit tak, aby všechny šipky šly směrem vzhůru. Jde to najít, ale asi to není nejlepší metoda.

Odvodíme správný tvar algoritmem. Nejprve si vypíšeme odpovídající ostré uspořádání: $1|2$, $1|3$, $1|4$, $1|5$, $1|6$, $1|12$, $1|20$, $2|4$, $2|6$, $2|12$, $2|20$, $3|6$, $3|12$, $4|12$, $4|20$, $5|20$, $6|12$.

Hledáme prvky $A$, které se v seznamu nevyskytují v žádné dvojici vpravo, tedy které už nikdo jiný nedělí. Takový tam je jeden, 1, ten nakreslíme do první (dolní) řady diagramu. Vyškrtneme prvek 1 i všechny dvojice, ve kterých se vyskytuje.

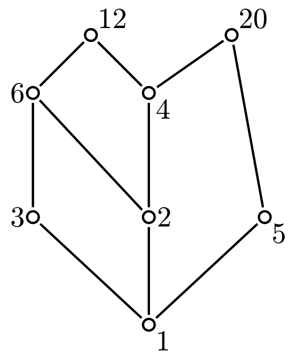
Jsou v množině $A_1 = \{2,3,4,5,6,12,20\}$ čísla, která v tom novém kratším seznamu $2\,|\,4$, $2\,|\,6$, $2\,|\,12$, $2\,|\,20$, $3\,|\,6$, $3\,|\,12$, $4\,|\,12$, $4\,|\,20$, $5\,|\,20$, $6\,|\,12$ nikdy nejsou napravo? Vlastně vidíme, že bychom se bez seznamu obešli, prostě hledáme v $A_1$ čísla, která žádné jiné z $A_1$ nedělí.




Ano, jsou to čísla 2, 3 a 5. Ty přijdou do diagramu nad 1, a protože 1 dělí všechny tři, nakreslíme k nim spojnice z 1. Odebereme $2,3,5$ z množiny a odpovídající dvojice ze seznamu, vznikne seznam $6\,|\,12$.

Jsou v množině $A_2 = \{4,6,12,20\}$ čísla, která nikdo jiný z $A_2$ nedělí? Ano, jsou to čísla 4 a 6, ty přijdou do diagramu nad 2, 3 a 5. Spouštíme spojnice. Ze 4 do předposledního řádku spojujeme jen do 2, protože nejsou dvojice $3\,|\,4$ a $5\,|\,4$. Ze 6 spustíme spojnice do 2 a 3. Je třeba spustit spojnici i o řádek níž, tedy ze 4, popř. z 6 do jedničky? Ne, tam už cesta vede.

Vymažeme z $A_1$ prvky $4,6$, ze seznamu odstraníme všechny dvojice zahrnující 4 nebo 6.




Jsou v množině $A_3 = \{12,20\}$ čísla, která nikdo jiný z $A_3$ nedělí? Ano, jsou to obě čísla 12 a 20. Mimochodem, najdeme je také jako čísla, která se ve zkráceném seznamu nevyskytují napravo, ale ten je již prázdný, takže opravdu bereme vše.

Čísla 12 a 20 přijdou do diagramu nahoru a doplníme spojnice do předposlední řady tam, kde je dělitelnost. Zamyslíme se nad spouštěním spojnic do druhé řady shora. Máme $3\,|\,12$ a $2\,|\,12$, ale cesty $3 \mapsto 12$ i $4 \mapsto 12$ už existují, tak nespojujeme. Máme také $2\,|\,20$ a $5\,|\,20$. Cesta z 2 do 20 nahoru už existuje, ale spojení $5 \mapsto 1 \mapsto 20$ neplatí, protože nevede čistě vzhůru, taže tuto spojnici je nutné dodělat. Ještě si rozmyslíme možná spojení do spodního řádku (nejsou třeba, už propojeno) a jsme hotovi.

△

**Poznámka:** Viděli jsme, že nám algoritmus nechával možnost volby, pokud jsme v jednom řádku měli více prvků. Změna jejich pořadí dokáže výrazně ovlivnit celkový vzhled výsledného diagramu. Často jsou také verze diagramu, ke kterým nás náš algoritmus ani zavést neumí, například prvek 5 mohl být klidně o řádek výše nebo dokonce někde mezi. Z čistě matematického pohledu na konkrétní podobě samozřejmě nezáleží, ale pro uživatele bude určitě příjemnější pracovat s grafem přehledným. Protože je vytváření diagramu pomocí algoritmu nudné, je možné si to zpestřit právě zařazením dodatkového kritéria, snahou o co nejhezčí graf. To například znamená, že se snažíme o graf, ve kterém se spojnice nekříží. V příkladu se nám to povedlo, ale ne vždy je to možné.

△

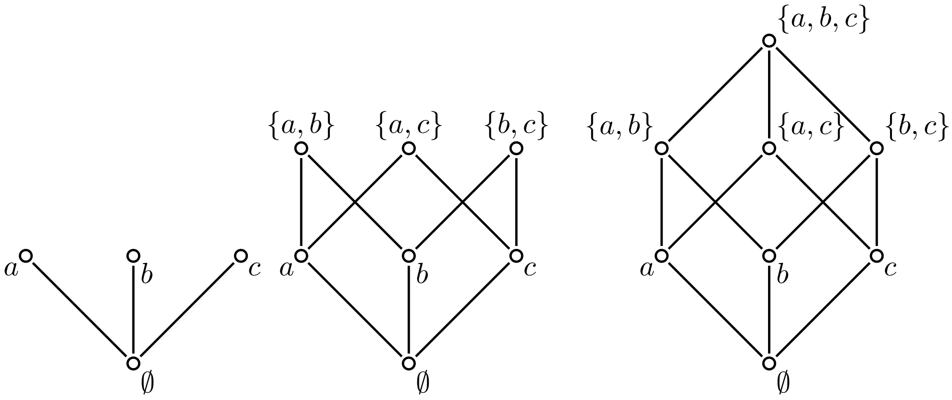
**!** **Příklad 4b.g:** Vytvoříme Hasseův diagram pro částečně uspořádanou množinu $(P(\{a,b,c\}),\subseteq)$. Použijeme algoritmus růstu zdola. Aby se nám lépe pracovalo, raději si danou množinu vypíšeme, zajímá nás tedy relace inkluze na množině $A = P(\{a,b,c\}) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

Zkusíme to bez vypisování všech ostrých uspořádání. Je nějaká množina v $A$, aby žádná jiná nebyla její podmnožinou? Ano, $\emptyset$, bude dole.

Jsou v $A_1 = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ množiny takové, že jiné množiny z $A_1$ už nejsou jejich podmnožinami? Ano, všechny jednoprvkové. Ty přijdou do druhého řádku a spojíme je s prázdnou množinou.

Jsou v $A_2 = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ množiny takové, že jiné množiny z $A_2$ už nejsou jejich podmnožinami? Ano, všechny dvouprvkové. Ty přijdou do třetího řádku a spojíme je s jednoprvkovými tam, kde je mezi nimi vztah inkluze. S prvním řádkem (prázdnou množinou) není třeba přímo spojovat, protože se od prázdné ke každé dvouprvkové dostaneme již existujícími spojnicemi.

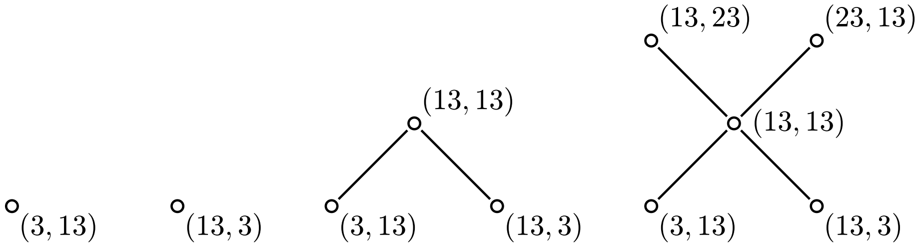
Nakonec přidáme nahoru $\{a,b,c\}$ a spojíme se všemi množinami v předposledním řádku, jiných spojnic již netřeba.




Zrovna u tohoto příkladu nelze vytvořit Hasseův diagram tak, aby se spojnice nekřížily, viz 12c.
△

Jako inspiraci si na stejné množině zaveďte relaci $\supseteq$, vytvořte diagram a pak si jako cvičení rozmyslete, že obecně Hasseův diagram uspořádání $\preceq^{-1}$ získáme jednoduše tak, že otočíme Hasseův diagram $\preceq$ vzhůru nohama.

**Příklad 4b.h:** Vytvoříme Hasseův diagram pro množinu $\{(3,13),(13,3),(13,13),(13,23),(23,13)\}$ a uspořádání nerovností $\leq$ po složkách (součinové uspořádání, viz 3b.9), tedy $(u,v)\preceq(x,y)$ právě tehdy, když $u\leq x$ a $v\leq y$. Algoritmus dává




△

Hasseův diagram je velice užitečný, dá se použít k rychlému rozpoznávání různých vlastností uspořádání, o kterých se dozvíme v následující kapitole. je to i díky tomu, že vztah „relace $\Longrightarrow$ diagram“ lze v jistém smyslu „obrátit“. Když nakreslíme hromádku bodů a některé z nich spojíme úsečkami tak, aby ve výsledném obrázku nebyly vodorovné spojnice, tak už tento obrázek jednoznačně určuje nějaké částečné uspořádání.

**4b.8 Bonus: Covering relation.** Zajímavá otázka je, co to vlastně dostaneme, když vyjdeme z nějakého částečného uspořádání a vytvoříme z něj výrazně menší podmnožinu dvojic zakreslenou v diagramu. V této nové relaci je každý prvek spojen jen s „bezprostředními“ sousedy z původní relace, tedy s těmi prvky, ke kterým se v původní relaci dostává jedině přímo, bez mezikroku. Definice vypadá takto:

**Definice.**
Nechť $(A,\preceq)$ je částečně uspořádaná množina a $\prec$ je příslušná odvozená relace. Definujeme relaci $\lhd$ na $A$ předpisem $a\lhd b$ jestliže $a\prec b$ a neexistuje $z\in A$ takové, že $a\prec z$ a $z\prec b$.
Relaci $\lhd$ říkáme **covering relation** pro relaci $\preceq$.
Jestliže $a\lhd b$, tak říkáme, že prvek $b$ pokrývá prvek $a$, popřípadě že prvek $a$ je pokryt prvkem $b$. Alternativní terminologie říká, že prvek $a$ je **bezprostřední předchůdce** (**immediate predecessor**) prvku $b$, popř. že prvek $b$ je **bezprostřední následník** (**immediate successor**) prvku $a$.

Podívejme se na příklad 4b.f. Prvek 3 má dva následníky, 6 a 12, ale jen jeden z nich je bezprostřední, jmenovitě 6.

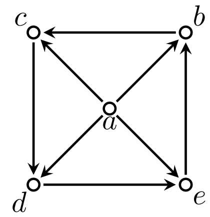
Když sestrojíme Hasseův diagram nějakého uspořádání $\preceq$ a pro pořádek přidáme ke spojnicím šipky, ať je formálně zaznačena i orientace vzhůru, tak dostáváme právě graf relace $\lhd$. Bez důkazu jsme tvrdili, že z diagramu dokážeme odvodit zpětně původní relaci, což vlastně říká, že z covering relation $\lhd$ zase dokážeme nějakým postupem dostat zpět $\preceq$. Trochu to připomíná situaci s odvozeným uspořádáním, kdy nám fungovalo kolečko $\preceq\mapsto\prec\mapsto\preceq$, ale není to úplně stejné.

Kolečko $\preceq\mapsto\lhd\mapsto\preceq$ totiž funguje jen někdy. Zajímavé je, že se nezadrhne krok $\lhd\mapsto\preceq$, ten je spolehlivý, problém může nastat již ve fázi $\preceq\mapsto\lhd$.

Pokud je množina $A$ konečná, pak lze sestrojit Hasseův diagram (viz poznámka 4c.4) a tudíž vznikne i $\lhd$, tady to funguje. Ale u nekonečných množin se již na to nedá spoléhat, stačí se podívat na relaci $\leq$. Když ji uvažujeme na

$\mathbb{N}$ či na $\mathbb{Z}$, pak má každý prvek $n$ svého bezprostředního následníka $n+1$ i svého bezprostředního předchůdce $n-1$ (zde s výjimkou $n=1$ při práci v $\mathbb{N}$). To, že nějaký prvek nemá bezprostředního předchůdce či následníka, nijak nevadí, ostatně jsme to zažili již v příkladě 4b.f, kde třeba prvek 12 nemá bezprostředního následníka. Podstatné je, že vznikla relace $\lhd$ dostatečně bohatá na to, aby v sobě nesla informaci o celé původní relaci.

Teď se ale podívejme na relaci $\le$ na $\mathbb{Q}$, třeba jak to vypadá s prvkem 0. Ten má spoustu následníků i předchůdců, ale přesto nemá bezprostředního následníka, protože pro jakéhokoliv kandidáta, tedy kladné $r$, vždycky najdeme mezikrok, $0<\frac{r}{2}<r$, podobně dopadnou předchůdci. Nula přitom není ničím speciální, víme, že pro libovolný zlomek je otázka „jaký je bezprostředně větší zlomek?“ nezodpověditelná. Pro $(\mathbb{Q},\le)$ je tedy covering relation prázdná! Pak z ní samozřejmě nejde zpětně odvodit původní relace $\le$.




Mimochodem, podobná definice bezprostředního předchůdce/následníka se dá udělat pro libovolnou relaci $R$, ale tam už jsou vůbec problémy s existencí, a to i pro konečné množiny, mimo jiné proto, že na rozdíl od uspořádání jsou v obecnějších relacích možné cykly.

Prvek $a$ nemá bezprostředního následníka, protože ke všem prvkům $b,c,d,e$ se dostane jak přímo, tak oklikou přes mezikrok. Pro obecné relace se proto covering relation nezavádí.

**4b.9 Poznámka (pokročilá):** Představme si relaci $R$ na množině $A$, která je reflexivní a tranzitivní, ale není mrška antisymetrická (takovým se říká **kvaziuspořádání** (**quasi-ordering**)). Typickým příkladem jsou relace dané $|x|\le|y|$ pro čísla či $|A|\le|B|$ pro množiny, takže jde o docela běžný případ. Dá se i zde nějak převést situace na uspořádání? Ano.

Základním trikem je zadefinovat relaci $S$ předpisem $aSb$ právě tehdy, jestliže $aRb$ a $bRa$ (rozmyslete si, že $S=R\cap R^{-1}$). V našich dvou příkladech vzniknou relace $|x|=|y|$ a $|A|=|B|$. Pro reflexivní a tranzitivní $R$ je pak vždy takto vytvořená $S$ ekvivalence (viz cvičení 3b.14) a pomocí ní začneme předstírat, že prvky, které nám kazí antisymetrii, jsou vlastně vždy jedna věc, čímž jakoby antisymetrie začne fungovat.

Matematicky řečeno, podíváme se na příslušný rozklad $A$ podle $S$ a považujeme každou třídu za jeden objekt, tomuto jsme říkali faktorová množina $A/S$. Na ní zavedeme nové uspořádání $\preceq$, které bude přirozeným způsobem odvozeno od původního uspořádání $R$.

Formálně: Definujeme $[a]_S\preceq[b]_S$ právě tehdy, když $aRb$.

Hlavním problémem takové definice je, že výsledek závisí na volbě zástupců tříd. Co kdybychom vybrali jiné zástupce? Nechť $c\in[a]_S$ a $d\in[b]_S$, potřebujeme ukázat, že také $cRd$. Použijeme tranzitivitu. Pro začátek máme $aRb$. Protože $c\in[a]_S$, je $aSc$, což podle definice znamená $cRa$. Podobně pro $d$ odvodíme $bRd$. Získali jsme tak řetězec $cRaRbRd$, máme tedy opravdu $cRd$.

Dokázali jsme tím, že tato definice má smysl, tedy že dává stejné výsledky pro libovolné volby zástupců tříd. Máme proto relaci mezi třídami a ukážeme, že je to částečné uspořádání.

Reflexivita: $R$ je reflexivní, proto $aRa$ a tedy i $[a]_S\preceq[a]_S$.

Antisymetrie: Předpokládejme, že $[a]_S\preceq[b]_S$ a $[b]_S\preceq[a]_S$. Podle definice $\preceq$ tedy $aRb$ a $bRa$. Podle definice $S$ tedy $aSb$ a dostáváme $[a]_S=[b]_S$, přesně jak jsme to potřebovali.

Tranzitivita: Předpokládejme, že $[a]_S\preceq[b]_S$ a $[b]_S\preceq[c]_S$. Podle definice $\preceq$ tedy $aRb$ a $bRc$. Podle tranzitivity $R$ dostáváme $aRc$ a proto $[a]_S\preceq[c]_S$.

Podobný trik, kdy se s třídami pracuje jako s objekty, se v matematice používá relativně často, my jej tu uvidíme v kapitole o počítání modulo a pak v kapitole 8d neboli Bonusu o racionálních číslech, kde dokonce zavádíme uspořádání v zásadě zde popsaným způsobem.

$\triangle$

## Cvičení

**Cvičení 4b.1** (rutinní)**:** Které z následujících relací jsou částečná uspořádání na $\{1,2,3,4\}$? Pro každé uspořádání nakreslete Hasseův diagram.

(i) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3),(2,3),(3,4)\}$;

(ii) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$;

(iii) $\{(1,1),(2,2),(4,4),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$;

(iv) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$;

(v) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3),(1,3),(3,1),(3,2)\}$.

**Cvičení 4b.2** (rutinní)**:** Nechť $A$ je množina všech lidí. Která z následujících relací je částečné uspořádání?

(i) $a$ a $b$ mají společného přítele;

(ii) $a$ je předek $b$ nebo $a$ je $b$;

(iii) $a$ je vyšší než $b$;

(iv) $a$ neváží víc než $b$.

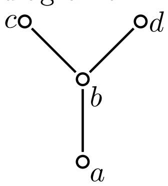
**Cvičení 4b.3** (rutinní)**:** Rozhodněte, které z následujících relací na $\mathbb{Z}^2$ jsou uspořádání.
(i) $(u,v)R(x,y)$ jestliže $u \le x$ a $v = y$;
(ii) $(u,v)R(x,y)$ jestliže $u \le x$ a $v < y$;
(iii) $(u,v)R(x,y)$ jestliže $u \le x$ a $v \ge y$.

**Cvičení 4b.4** (rutinní)**:** Pro číslo $n \in \mathbb{N}$ definujme $m(n)$ jako největší cifru použitou při desítkovém zápise $n$, například $m(13756) = 7$. Rozhodněte, které z následujících relací jsou částečná uspořádání na $\mathbb{N}$:
(i) $xRy$ jestliže $m(x) \le m(y)$;
(ii) $xRy$ jestliže $m(x) < m(y)$;
(iii) $xRy$ jestliže $m(x) < m(y)$ nebo $x = y$.

**Cvičení 4b.5** (rutinní, poučné)**:** Ukažte přímým vyšetřením vlastností, že následujících relace jsou uspořádání (viz Věta 4b.5 (ii)).
(i) Relace $\preceq$ na $M_{2\times 2}$, množině reálných matic $2 \times 2$: $A \preceq B$ jestliže $|A| < |B|$ (determinanty) nebo $A = B$.
(ii) Relace $\preceq$ na $\mathbb{N}$: $x \preceq y$ jestliže je počet jedniček v binárním zápise $x$ menší než počet jedniček v binárním zápise $y$ nebo $x = y$.
(iii) Relace $\preceq$ na $P$, množině všech reálných polynomů: $p \preceq q$ jestliže je stupeň $p$ menší než stupeň $q$ nebo $p = q$.
Nápověda: U (ii) si zaveďte vhodné značení pro počet jedniček.

**Cvičení 4b.6** (rutinní)**:** Určete, zda relace určené následujícími maticemi jsou částečná uspořádání:
(i) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
(ii) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
(iii) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
(iv) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
(v) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Cvičení 4b.7** (rutinní)**:** Napište výčtem dvojic prvků, která relace uspořádání je dána následujícím Hasseovým diagramem.




**Cvičení 4b.8** (rutinní)**:** Nakreslete Hasseův diagram
(i) pro $(\{13, 23, 31, 33, 43\}, \ge)$;
(ii) pro množinu množin $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}$ uspořádanou relací býti podmnožinou.

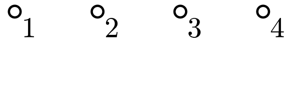
**Cvičení 4b.9** (rutinní)**:** Nakreslete Hasseův diagram pro $(A, |)$ (relace dělitelnosti), kde
(i) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$;
(ii) $A = \{1,2,3,5,11,13\}$;
(iii) $A = \{2,3,4,5,6,30,60\}$;
(iv) $A = \{1,2,3,6,12,24\}$;
(v) $A = \{1,2,4,8,16,32,64\}$;
(vi) $A = \{2,4,6,12,24,36\}$.
Viz také cvičení 4c.3.

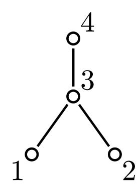
**Cvičení 4b.10** (poučné)**:** Dokažte, že jestliže je relace $R$ na množině $A$ částečné uspořádání a ekvivalence zároveň, pak nutně $R \subseteq \Delta(A)$.

**Cvičení 4b.11** (poučné)**:**
Nechť $\preceq_1$, $\preceq_2$ jsou částečná uspořádání na téže množině $A$. Dokažte, že pak
(i) $\preceq_1 \cap \preceq_2$ je také částečné uspořádání na $A$;
(ii) $\preceq_1 \cup \preceq_2$ nemusí být částečné uspořádání na $A$;
(iii) $\preceq_1 - \preceq_2$ nikdy není částečné uspořádání na $A$;
(iv) $\preceq_1 \circ \preceq_2$ nemusí být částečné uspořádání na $A$;
(v) $\preceq_1 \circ \preceq_1 = \preceq_1{}^2$ je částečné uspořádání na $A$.

**Řešení:**

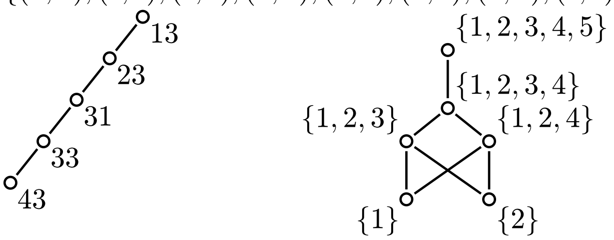
**4b.1:**
(i): není tranzitivní, viz $(2,3)$ a $(3,4)$.
(ii): uspořádání (i ekvivalence).
(iii): není reflexivní, viz $(3,3)$.
(iv): uspořádání.
(v): není antisymetrická, viz $(1,3)$ a $(3,1)$.



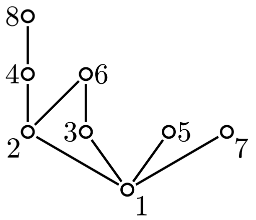




**4b.2:** (i): není A,T; (ii): uspořádání; (iii): není R; (iv): není A;
**4b.3:** (i): upořádání; (ii): není R; (iii): uspořádání.

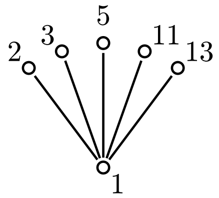
**4b.4:** (i): Je R,T, není A. (ii): Je A,T, není R. (iii) Je uspořádání.
**4b.5:** (i): R: přímo z definice. A: Nechť $A \preceq B \wedge B \preceq A$. Dvě možnosti. Kdyby $A \neq B$, pak z definice dostáváme $|A| < |B| \wedge |B| < |A|$, spor. Tudíž je to varianta $A = B$. T: Nechť $A \preceq B \wedge B \preceq C$. Čtyři možnosti:
a) V obou případech vzniklo $\preceq$ z první podmínky. Pak $|A| < |B| \wedge |B| < |C|$, proto $|A| < |C|$ a $A \preceq C$.
b) Vzniklo to jako $|A| < |B|$ a $B = C$. Pak $|A| < |C|$ a $A \preceq C$.
c) Varianta $A = B$ a $|B| < |C|$ dává také $A \preceq C$.
d) poslední možnost je, že to $A \preceq B \wedge B \preceq C$ vzniklo jako $A = B$ a $B = C$, pak $A = C$ a tedy $A \preceq C$.
Takže vždy $A \preceq C$ a tranzitivita je prokázána.
(ii) a (iii) se dělají obdobně, jen místo determinantu se pracuje s jinou funkcí.
**4b.6:** Nejsnáze poznáme reflexivitu, matice musí mít 1 všude na diagonále. Tím jsme vyloučili (ii). Antisymetrii poznáme tak, že matice nesmí mít 1 zároveň na dvou polích symetrických podle diagonály. Projdeme matice a vyloučíme také (iii) a (v). Zbývají příklady (i) a (iv), kde je třeba ověřit tranzitivitu. Jedna možnost je použít Booleanovský součin. Druhá možnost je vypsat si z matice všechny nediagonální jedničky jako dvojice v relaci a zkoumat tranzitivitu na nich. U (iv) se takto najdou navazující dvojice $(1,2)$ a $(2,3)$, ke kterým chybí $(1,3)$, dotyčná relace tedy není tranzitivní. V případě (i) se tranzitivita potvrdí a je to částečné uspořádání.
**4b.7:** $\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}$.
**4b.8:**



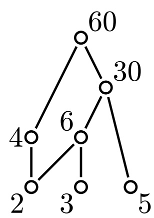

**4b.9:**
(i):



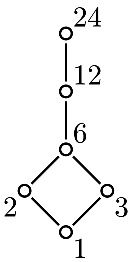

(ii):



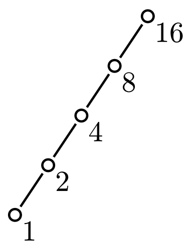

(iii):



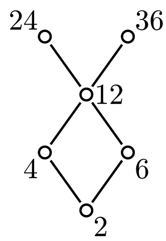

(iv):




(v):




(vi):




**4b.10:** Viz cvičení 3b.11.
**4b.11:** (i) viz Fakt 3c.2.
(ii) Diskuse po Faktu 3c.2 ukazuje, že sjednocením se nemusí zachovat tranzitivita ani antisymetrie, protipříklady tam jsou, jeden snadný na $A = \{1,2,3\}$: $\preceq_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$ a $\preceq_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,1),(2,3)\}$ jsou obě uspořádání, ale sjednocení $\preceq_1 \cup \preceq_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3)\}$ není ani antisymetrické, ani tranzitivní.
(iii) Protože jsou dvojice $(a,a)$ v obou relacích (reflexivita), nemůže iž z principu relace $\preceq_1 - \preceq_2$ obsahovat žádnou takovouto dvojici, tudíž nemůže být reflexivní.
(iv) Stačí upravit příklad po Faktu 3c.4 na tranzitivitu.
$\preceq_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(3,4)\}$ a $\preceq_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(2,3),(4,5)\}$ jsou relace uspořádání, ale složením dostaneme $R = \preceq_1 \circ \preceq_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(3,5)\}$, kde lze vytvořit řetízek $1R3R5$, který na jeden krok nezvládneme, dvojice $(1,5)$ v té složenině není. Relace proto není tranzitivní, tudíž ani uspořádání.
Pokud (kromě dvojic $a \preceq a$) dáme do první relace $(1,2),(2,5)$ a do druhé $(5,3),(3,1)$, tak to opět budou uspočádání, ale složení bude obsahovat dvojice $(1,5),(5,1)$, čímž se poruší pro změnu antisymetrie.
(v) U skládání to vypadá na první pohled nevesele, protože antisymetrie se dá mocninou pokazit, viz diskuse po Faktu 3c.4. Zde ale máme i vlastnosti jiné a ty to zachrání, protože podle Věty 3b.6 pro každé částečné uspořádání máme $R^2 = R$.

# 4c. Minima, nejmenší prvky a podobně, dobré uspořádání

V této kapitole se budeme v zásadě zajímat o to, jak u částečně uspořádané množiny vypadají její „horní konec“ a „dolní konec“.

! **Definice.**
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina a $\prec$ odpovídající odvozená relace. Nechť $M$ je neprázdná podmnožina $A$.
Řekneme, že prvek $m \in A$ je **nejmenší prvek** množiny $M$, jestliže $m \in M$ a pro všechna $x \in M$ platí $m \preceq x$.
Řekneme, že prvek $m \in A$ je **největší prvek** množiny $M$, jestliže $m \in M$ a pro všechna $x \in M$ platí $x \preceq m$.
Řekneme, že prvek $m \in A$ je **minimální prvek** množiny $M$, jestliže $m \in M$ a neexistuje $x \in M$: $x \prec m$.
Značíme to $m = \min(M)$.
Řekneme, že prvek $m \in A$ je **maximální prvek** množiny $M$, jestliže $m \in M$ a neexistuje $x \in M$: $m \prec x$.
Značíme to $m = \max(M)$.

Let $(A, \preceq)$ be a poset. Let $M$ be a non-empty subset of $A$.

We say that an element $m \in A$ is a **least element** of the set $M$, if $m \in M$ and $m \preceq x$ for all $x \in M$.

We say that an element $m \in A$ is a **greatest element** of the set $M$, if $m \in M$ and $x \preceq m$ for all $x \in M$.

We say that an element $m \in A$ is **minimal** in the set $M$ (or a minimum of $M$), if $m \in M$ and there is no $x \in M$ such that $x \prec m$. We denote it $m = \min(M)$.

We say that an element $m \in A$ is **maximal** in the set $M$ (or a maximum of $M$), if $m \in M$ and there is no $x \in M$ such that $m \prec x$. We denote it $m = \max(M)$.

Řečeno lidově, nejmenší prvek množiny je takový, že všichni ostatní jsou „nad ním nebo rovny“, zatímco minimální prvek je takový, že nikdo není „pod ním“. Evidentně nejde o totéž, jinak bychom neměli dva pojmy. Brzy ten rozdíl uvidíme na vlastní oči.

**Příklad 4c.a:** Uvažujme $(\mathbb{N}, \leq)$ a podmnožinu $M = \{n \in \mathbb{N};\ n > 12\} = \{13, 14, 15, \dots\}$. Pak nejmenší prvek $M$ je $m = 13$, protože $13 \leq x$ pro všechna $x \in M$ a $13 \in M$. Také minimální prvek $M$ je $m = 13$, protože v $M$ neexistuje $x$, které by splňovalo $x < 13$.

Největší ani maximální prvek neexistují. Důkaz: Představme si, že by $m$ bylo maximálním prvkem $M$. Pak by žádné prvky $x \in M$ nesměly splňovat $m < x$, ale některé to splňují, stačí si vzít $x = m + 1$. Kdyby nějaké $m \in M$ bylo největším prvkem, pak by pro všechna $x \in M$ muselo platit $x \leq m$, ale $m + 1$ to nesplňuje.
△

Tento příklad ukazuje, že množiny s nekonečným koncem jsou problémy. Není to ale problém jediný.

**Příklad 4c.b:** Uvažujme $(\mathbb{Q}^+, \leq)$ a podmnožinu $M = \{x \in \mathbb{Q};\ 0 < x < 1\}$. Tato množina nikam do nekonečna neutíká, ale nemá maximum ani minimum, nejmenší ani největší prvek.

Ukážeme, že nemůže mít nejmenší ani minimální prvek: Vezměme libovolného kandidáta $m \in M$. Pak $\frac{m}{2} \in M$ a $\frac{m}{2} < m$, tedy $\frac{m}{2}$ je protipříklad k tvrzení, že $m$ je minimální, zároveň neplatí $m \leq \frac{m}{2}$ a proto není $m$ ani nejmenší.
Podobně ukážeme, že nelze najít největší ani maximální prvek $M$: Vezměme libovolného kandidáta $m \in M$. Pak $x = 1 - \frac{1-m}{2} \in M$ a $x > m$ (to se snadno ověří algebrou, ale je to vidět i geometricky, $x$ jsme vyrobili tak, že jsme se podívali, jak daleko je $m$ od 1, a $x$ je o polovinu blíže).
△

Dostáváme se k zajímavé otázce, jaký je opravdu rozdíl mezi nejmenším a minimálním prvkem. Pro příklad rozhodně nepůjdeme k relaci $\leq$, protože tam to vyjde nastejno, jak brzy uvidíme. Musíme zkusit něco zajímavějšího.

! **Příklad 4c.c:** Uvažujme množinu množin $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ a částečné uspořádání $\subseteq$. Jako podmnožinu $M$ vezmeme přímo toto $\mathcal{A}$.

Prvek $\{1, 2, 3\}$ je největším prvkem $\mathcal{A}$, protože všechny prvky $N \in \mathcal{A}$ splňují $N \subseteq \{1, 2, 3\}$. Je také maximálním prvkem $\mathcal{A}$, protože v $\mathcal{A}$ neexistuje množina $N$, která by splňovala $\{1, 2, 3\} \subseteq N$ a $\{1, 2, 3\} \neq N$.

Prvek $\{1\}$ je minimálním prvkem $\mathcal{A}$, protože neexistuje prvek $N$ v $\mathcal{A}$, který by splňoval $N \subseteq \{1\}$ a $N \neq \{1\}$.
Podobně je i $\{2\}$ minimálním prvkem $\mathcal{A}$. Nejmenší prvek $\mathcal{A}$ ale neexistuje. Takový nejmenší prvek by totiž musel být podmnožinou všech množin z $\mathcal{A}$, například by musel být podmnožinou $\{1\}$ a také podmnožinou $\{2\}$, což splňuje jen prázdná množina, která ale není prvkem $\mathcal{A}$.
△

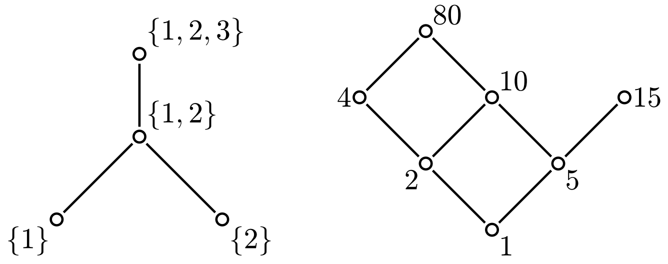
**!** **Příklad 4c.d:** Uvažujme množinu $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 15, 80\}$ uspořádanou relací dělitelnosti, tedy $a\,|\,b$ jestliže $a$ dělí $b$. Existuje nějaký nejmenší prvek? Ano, číslo 1 dělí všechna čísla z $A$, tj. $1\,|\,a$ pro všechna $a \in A$, je to tedy nejmenší prvek $A$. Je to také prvek minimální, protože nejde najít $a \in A$ takové, že dělí 1 a přitom to není 1.

Největší prvek neexistuje, takový prvek $m$ by totiž musel splňovat podmínku, že všechna čísla $a \in A$ jej dělí. Mluvíme tedy o společných násobcích čísel z $A$, ale žádný z nich v $A$ není.

Při hledání maximálních prvků se díváme po číslech takových, že už nedělí žádné jiné číslo z $A$. Třeba 4 není maximální, protože $4\,|\,40$. Maximální členy jsou dva, jmenovitě 15 a 80.

$\triangle$

**!** Podívejme se na Hasseovy diagramy posledních dvou příkladů, porovnáme je s výsledky, které jsme odvodili.




Intuitivně to funguje takto: Aby byl prvek největším v množině $M$, tak musí všechny ostatní prvky z $M$ ležet pod ním a být s ním spojeny nějakou cestou. Aby byl prvek maximálním v $M$, pak stačí, aby žádný prvek z $M$ nebyl nad ním a spojen cestou, což se zdá jakoby snažší splnit a ukážeme, že to je pravda. Symetricky, nejmenší prvek je takový, že všechny ostatní prvky $M$ jsou nad ním a spojeny cestou (žádný takový v levém obrázku výše nevidíme), zato minimálnímu prvku $M$ stačí, aby nebyl nikdo pod ním a spojen cestou. Lidově řečeno, minima a maxima jsou horní a dolní konce Hasseova diagramu, zatímco nejmenší prvek je kořen, do kterého se sbíhají všechny cesty, do největšího prvku se zase všechny cesty musí sbíhat nahoře.

Člověk by řekl, že diagram bude mít nějaký konec vždycky, zato s tím sbíháním je to těžší (jak už jsme viděli). Vidíme také hierarchii mezi min/max a nejmenším/největším prvkem, pokud se třeba dole sbíhají všechny cesty, tak je to také spodní konec množiny. Šťouravější student by si ještě mohl všimnout, že jestliže existují dvě různá maxima (popř. minima), tak musí být navzájem nesrovnatelná. Tato pozorování patřičně zformulujeme a dokážeme, ale než se do toho dáme, zjednodušíme si situaci pomocí chytrého lemmátka.

Oč zde půjde? Velice nepřesně řečeno, v zásadě ukážeme, že bude stačit umět zacházet s jedním koncem Hasseova diagramu, třeba tím dolním, protože v situaci, kdy chceme něco provést nahoře, jej prostě překlopíme vzhůru nohama (neboli přejdeme k inverzní relaci), provedeme to dole a zase jej překlopíme zpět. Teď to řekneme pořádně.

**Lemma 4c.1.**
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina, uvažujme neprázdnou podmnožinu $M \subseteq A$.
(ia) $m$ je minimum $M$ vzhledem k $\preceq$ právě tehdy, jestliže je $m$ maximem $M$ vzhledem k $\preceq^{-1}$.
(ib) $m$ je maximum $M$ vzhledem k $\preceq$ právě tehdy, jestliže je $m$ minimem $M$ vzhledem k $\preceq^{-1}$.
(iia) $m$ je nejmenším prvkem $M$ vzhledem k $\preceq$ právě tehdy, jestliže je $m$ největším prvkem $M$ vzhledem k $\preceq^{-1}$.
(iib) $m$ je největším prvkem $M$ vzhledem k $\preceq$ právě tehdy, jestliže je $m$ nejmenším prvkem $M$ vzhledem k $\preceq^{-1}$.

**Důkaz** (rutinní)**:** (ia): Předpokládejme, že $m$ je minimum $M$ vzhledem k $\preceq$. Ukážeme, že je to maximum $M$ vzhledem k $\preceq^{-1}$. Sporem: Není-li to maximum, pak existuje $x \in M$ takové, že $m \preceq^{-1} x$ a $x \neq m$. Pak ale $x \preceq m$ a $x \neq m$, tedy $x \in M$ a $x \prec m$, což je ve sporu s $m = \min_{\preceq}(M)$.

Naopak předpokládejme, že $m$ je maximum $M$ vzhledem k $\preceq^{-1}$. Ukážeme, že je to minimum $M$ vzhledem k $\preceq$. Sporem: Není-li to minimum, pak existuje $x \in M$ takové, že $x \preceq m$ a $x \neq m$. Pak ale $m \preceq^{-1} x$ a $x \neq m$, tedy $x \in M$ a $m \prec^{-1} x$, což je ve sporu s $m = \max_{\preceq^{-1}}(M)$.

(ib) se dokazuje obdobně.

(iia) $m$ je nejmenší prvek $M$ vzhledem k $\preceq$ právě tehdy, když $m \preceq x$ pro všechna $x \in M$, což je právě tehdy, když $x \preceq^{-1} m$ pro všechna $x \in M$, což je právě tehdy, když $m$ je největší prvek $M$ vzhledem k $\preceq^{-1}$.

(iib) se dokazuje obdobně.

$\square$

Odteď tedy víme, že minima a maxima mají stejné obecné vlastnosti, totéž je pravda o největších a nejmenších prvcích. Proto vždy stačí dělat důkaz jen pro jeden z nich, pro druhý bývá analogický.

! **Věta 4c.2.**
Nechť je $(A, \preceq)$ částečně uspořádaná množina, uvažujme neprázdnou podmnožinu $M \subseteq A$. Pak platí následující:
(i) Jestliže existuje nejmenší prvek $M$, pak je jediný.
Jestliže existuje největší prvek $M$, pak je jediný.
(ii) Jestliže $m_1 = \min(M)$, $m_2 = \min(M)$ a $m_1 \preceq m_2$, pak $m_1 = m_2$.
Jestliže $m_1 = \max(M)$, $m_2 = \max(M)$ a $m_1 \preceq m_2$, pak $m_1 = m_2$.
(iii) Jestliže je $m$ nejmenší prvek $M$, pak $m = \min(M)$ a jiné minimum už není.
Jestliže je $m$ největší prvek $M$, pak $m = \max(M)$ a jiné maximum už není.

**Důkaz** (rutinní)**:** (i): Nechť $m_1, m_2$ jsou nejmenší prvky $M$, pak jsou mimo jiné z $M$. Protože je $m_1$ nejmenší z $M$, musí být $m_1 \preceq m_2$. Protože je $m_2$ nejmenší z $M$, musí být $m_2 \preceq m_1$. Antisymetrie pak dává $m_1 = m_2$, takže dva různé nejmenší prvky nelze mít.

Důkaz pro největší prvek je symetrický.

(ii): Sporem: Předpokládejme, že $m_1 \neq m_2$. Pak z předpokladu $m_1 \preceq m_2$ máme $m_1 \prec m_2$ a také máme $m_1 \in M$, což je ve sporu s předpokladem $m_2 = \min(M)$. Druhé tvrzení se dokáže symetricky.

(iii): Předpokládejme, že $m$ je nejmenší prvek $M$. Pak pro všechny prvky $x \in M$ platí $m \preceq x$, tudíž pro ně už podle Lemmatu 4b.4 (ii) nemůže platit $x \prec m$. Proto je $m$ minimum $M$.

Nechť $n$ je také minimální prvek $M$. Protože je $m$ nejmenším prvkem $M$ a $n \in M$, platí nutně $m \preceq n$ a podle (ii) tedy $m = n$.

Podobně se dokazuje jedinečnost největšího prvku a pak i maxima.

□

Zajímavá je obměna tvrzení z (iii). Jestliže existuje více minimálních prvků $M$, pak neexistuje nejmenší prvek $M$, obdobně pro maxima a největší prvek.

! Jaká je tedy situace? Ani minimum, ani maximum, ani nejmenší či největší prvek vůbec nemusí existovat. Maximum a minimum mají lepší šanci na existenci, existují ve více případech než nejmenší a největší prvky, které jsou zase lepší z hlediska použití. Nejmenší/největší prvek je jen jeden (pokud tedy vůbec existuje), zatímco minim/maxim může být klidně víc.

Co víme o existenci těchto prvků? Hned první příklad ukázal, že když vezmeme nekonečnou množinu, tak na existenci minim/maxim či nejmenšího/největšího prvku nelze spoléhat, dokonce nepomohou ani pokročilejší vlastnosti z další části. Pokud tedy chceme existenci těchto prvků vynutit, musíme se uchýlit ke konečným množinám.

Než se do toho dáme, všimněte si, že v definici maxima, minima, nejmenšího ani největšího prvku se nikde neodkazujeme na to, co se děje v $A$ mimo $M$. Podobně ani v důkazu výše se vlastně vůbec nepracovalo s prvky mimo $M$. To znamená, že tyto pojmy vlastně závisí jen na $M$ a restrikci $\preceq$ na $M$, tedy na částečně uspořádané množině $(M, \preceq)$, nikoliv na tom, v jaké nadmnožině se $M$ nachází. Na tom je založena oblíbená finta, kdy se v situaci $M \subseteq A$ rovnou prohlásí, že pracujeme s $(M, \preceq)$.

! **Věta 4c.3.**
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Jestliže je $M$ konečná neprázdná podmnožina $A$, pak existuje $\min(M)$ a $\max(M)$.

**Důkaz** (poučný)**:** Podle právě provedené úvahy stačí dokázat, že pro libovolnou konečnou uspořádanou množinu $(M, \preceq)$ existují $\min(M)$ a $\max(M)$. Jako obvykle dokážeme jen jednu věc, třeba existenci minima, a to indukcí.

Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme $V(n)$: Jestliže je $(M, \preceq)$ částečně uspořádaná množina o $n$ prvcích, pak má minimum.

(0) Jednoprvková uspořádaná množina $M = \{m\}$ má určitě minimum, jmenovitě $m$, protože v $M$ nemohou být $x$ takové, aby $x \prec m$, to totiž zahrnuje také podmínku $x \neq m$ a množina takovýchto prvků je prázdná.

(1) Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné a předpokládejme, že všechny $n$-prvkové množiny mají minimum. Potřebujeme ukázat, že totéž platí pro všechny množiny s $n+1$ prvky. Uvažujme proto uspořádanou množinu $(M, \preceq)$, kde $|M| = n + 1$. Zvolme libovolný prvek $y \in M$ a podívejme se na $M' = M - \{y\}$. Když uděláme restrikci $\preceq$ na $M'$, dostaneme $n$-prvkovou uspořádanou množinu, proto podle indukčního předpokladu existuje její minimum $m' \in M'$ vzhledem k $\preceq$. Teď porovnáme $m'$ a $y$ a rozebereme jednotlivé možnosti.

Jestliže $m' \preceq y$, tak tvrdíme, že $m' = \min(M)$. Na to musíme ukázat, že žádný prvek $x \in M$ nesplňuje $x \prec m'$. Pro $x \in M'$ to plyne z $m' = \min(M')$, zbývá případ $x = y$. Tam předpokládáme $m' \preceq y$, proto podle Lemmatu 4b.4 (ii) nemůže nastat $y \prec m'$. Minimum nalezeno.

Jestliže $y \preceq m'$, tak tvrdíme, že toto $y$ je minimálním prvkem $M$. Dokážeme to sporem, předpokládejme, že existuje nějaké $x \in M$ takové, že $x \prec y$. Pak máme $x \prec y \preceq m'$, tedy podle Lemma 4b.4 (iii) $x \prec m'$, zároveň $x \in M - \{y\} = M'$ a máme spor s $m' = \min(M')$.

Zbývá varianta, že $m'$ a $y$ jsou neporovnatelné, tvrdíme, že pak $m'$ je minimum celého $M$. Schválně zkusme vybrat nějaké $x$ z $M - \{m'\}$. Jsou dvě možnosti. Buď $x = y$, pak je toto $x$ neporovnatelné s $m'$, tedy rozhodně neplatí $x \prec m'$. Nebo $x \neq y$, pak $x \in M - \{y\} = M'$, a protože je $m'$ minimum $M'$, zase nemůže být $x \prec m'$.

V každém případě jsme tedy nalezli minimum $M$, čímž je důkaz (1) dokončen.

Podle principu matematické indukce jsem tím dokázali existenci minima pro všechny konečné uspořádané množiny.

Alternativní důkaz: Zvolme $a_1 \in M$. Jestliže to není minimum $M$, tak existuje $a_2 \in M_1 = M - \{a_1\}$ takové, že $a_2 \prec a_1$. Jestliže $a_2$ není minimum, tak existuje $a_3 \in M - \{a_2\}$ takové že $a_3 \prec a_2$. Všimněme si, že $a_3 \neq a_1$, protože z tranzitivity $\prec$ máme $a_3 \prec a_1$. Takže víme, že $a_3 \in M_2 = M - \{a_1, a_2\}$.

Jestliže $a_3$ není minimum, zvolme $a_4 \in M - \{a_3\}$ takové, že $a_4 \prec a_3$, zase $a_4 \in M_3 = M - \{a_1, a_2, a_3\}$. Atd., dříve či později musíme dostat minimum, protože $M$ je konečná.

Tento alternativní důkaz vypadá snadněji, ale to je tím, že jsme nedokazovali některé kritické body, jinak by to pěkně narostlo. Vrátíme se k tomu v kapitole o indukci.

□

**4c.4 Poznámka:** Všimněte si, že při kreslení Hasseova diagramu zdola jsme používali minima množiny. Tato věta zaručuje, že existují, tedy že dotyčný algoritmus bude fungovat. Existence minim a maxim také zaručí existenci covering relation. Vezměme prvek $a \in A$ a uvažujme množinu $\{x \in A;\ a \prec x\}$. Jestliže je prázdná, pak je $a$ maximum $A$ a tudíž přirozeně nemůže mít bezprostředního následníka. Pokud tato množina prázdná není, tak všechna její minima jsou bezprostředními následníky $a$. Podobně hledáme bezprostřední předchůdce jako maxima množiny $\{x \in A;\ x \prec a\}$.

△

Věta nám pro konečné množiny zaručuje existenci minim a maxim, ale pořád zůstává problém s největším a nejmenším prvkem. Pokud chceme jejich existenci vynutit, musíme zabránit tomu, aby bylo více minim či maxim. Jako nástroj se nabízí Věta 4c.2 (ii). Začneme se tedy ptát, jestli v dané částečně uspořádané množině $(A, \preceq)$ dokážeme porovnávat prvky $A$ pomocí $\preceq$.

**!** **Definice.**
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Řekneme, že $a, b \in A$ jsou **porovnatelné**, jestliže $a \preceq b$ nebo $b \preceq a$. Řekneme, že $a, b \in R$ jsou **neporovnatelné**, jestliže ani $a \preceq b$ ani $b \preceq a$ neplatí.

Let $(A, \preceq)$ be a poset. We say that $a, b \in A$ are **comparable** if $a \preceq b$ or $b \preceq a$.
We say that $a, b \in A$ are **incomparable** if neither $a \preceq b$ nor $b \preceq a$.

Například pracujeme-li s relací $\subseteq$, pak množiny $\{13, 23\}$ a $\{3, 13\}$ porovnatelné nejsou, zato množiny $\{13, 23\}$ a $\{3, 13, 23\}$ porovnatelné jsou.

Podobně uvažujeme-li pro přirozená čísla relaci $aRb$ jestliže $a$ dělí $b$, pak čísla 6 a 12 porovnatelná jsou, zato čísla 6 a 9 porovnatelná nejsou.

**!** **Definice.**
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Řekneme, že $\preceq$ je **lineární uspořádání**, popřípadě **úplné uspořádání**, jestliže jsou každé dva prvky z $A$ porovnatelné.

Let $(A, \preceq)$ be a poset. We say that $\preceq$ is a **total order** or a **linear order** if every two elements from $A$ are comparable.

**!** **Příklad 4c.e:** $(\mathbb{Z}, \leq)$ je lineárně uspořádaná množina. $(\mathbb{N}, \geq)$ je lineárně uspořádaná množina.
Na druhou stranu $(P(X), \subseteq)$ není lineárně uspořádaná množina pro $|X| > 1$ (viz příklad 4b.c), také relace dělitelnosti není lineární uspořádání na $\mathbb{N}$.

△

**Poznámka:** V této souvislosti si možná připomenete vlastnosti dichotomie a trichotomie z části Další vlastnosti (3c.8), které otázku porovnatelnosti kladou pro obecné relace. Částečné uspořádání je lineární právě tehdy, když je dichotomické.

Máme-li částečné uspořádání $\preceq$, které je dichotomické, tak od něj odvozená relace $\prec$ je nutně trichotomická. Naopak začneme-li s asymetrickou, tranzitivní a trichotomickou relací $\prec$, tak od ní odvozená relace $\preceq$ je lineární uspořádání.

△

Již tradičně se zeptáme, kdy se linearita zachovává.

**Fakt 4c.5.**
Je-li $(A,\preceq)$ lineární uspořádání, pak jeho restrikce na libovolnou podmnožinu $A$ je také lineární uspořádání.

**Důkaz** (poučný)**:** Zde budeme protínat relaci s množinou, proto bude výhodnější zápis pomocí uspořádaných dvojic, bude také lepší použít pro $\preceq$ písmeno $R$, takže namísto $a \preceq b$ píšeme $(a,b) \in R$.

Nechť $B$ je podmnožina $A$, nechť $S$ je restrikce $R$ na $B$, připomeňme, že $S = R \cap (B \times B)$. Vezměme teď libovolné $a,b \in B$. Pak $a,b \in A$, proto dle linarity $\preceq$ je splněn výrok „$(a,b) \in R$ nebo $(b,a) \in R$“. Ale z $(a,b) \in R$ plyne díky $(a,b) \in B \times B$ také $(a,b) \in S$, podobně z $(b,a) \in R$ plyne $(b,a) \in S$. Je tedy pravdivý výrok „$(a,b) \in S$ nebo $(b,a) \in S$.“

□

Jinými slovy, všechno při starém, používáním uspořádání na menší množině nic neztratíme.

**Fakt 4c.6.**
Nechť $(A,\preceq)$ je lineárně uspořádaná množina. Pak je $\preceq^{-1}$ také lineární uspořádání na $A$.

Důkaz je tak snadný, že to snad ani nestojí za těchto třináct slov.

Zajímavější jsou množinové operace. Víme, že průnikem dvou částečných uspořádání zase dostaneme částečné uspořádání, ale linearita už se nezachová. Například $\leq$ i $\geq$ jsou lineární uspořádání na $\mathbb{Z}$, ale jejich průnikem dostaneme $\Delta(\mathbb{Z})$ neboli relaci danou vztahem $a = b$, což rozhodně není lineární uspořádání.

Teď už je čas na nějaký pěkný výsledek.

**!** **Věta 4c.7.**
Nechť $(A,\preceq)$ je lineárně uspořádaná množina a $M$ je její neprázdná podmnožina.
Jestliže je $m = \min(M)$, pak je to i nejmenší prvek $M$.
Jestliže je $m = \max(M)$, pak je to i největší prvek $M$.

**Důkaz** (rutinní)**:** Předpokládejme, že $m = \min(M)$. Nechť $x \in M$ je libovolný, potřebujeme ukázat, že $m \preceq x$. Protože je $\preceq$ lineární, musí platit $m \preceq x$ nebo $x \preceq m$. V případě toho prvního je důkaz hotov. Co kdyby platilo $x \preceq m$? Protože je $m$ minimální, tak se nesmí stát $x \prec m$, což znamená, že $x = m$ a tedy zase $m \preceq x$. Důkaz je hotov.

Druhá část se dokáže symetricky.

□

U lineárně uspořádaných množin tedy minimum a nejmenší prvek jedno jsou, podobně pro maximum a největší prvek. Tím se vysvětluje, proč se v analýze pro podmnožiny $\mathbb{R}$ definuje maximum a minimum, přičemž v definici je podmínka z největšího a nejmenšího prvku. Je to v analýze tradiční, ale z hlediska relací je to samozřejmě špatně. Naštěstí to díky linearitě uspořádání $\leq$ na $\mathbb{R}$ vyjde v tomto konkrétním případě nastejno.

A teď už okamžitý důsledek Věty 4c.3 a posledního tvrzení.

**!** **Věta 4c.8.**
Nechť $(A,\preceq)$ je lineárně uspořádaná množina. Každá její neprázdná konečná podmnožina má nejmenší a největší prvek.

Silně pokročilá a nedůležitá, nicméně možná zajímavá poznámka: Na existenci nejmenšího a největšího prvku nepotřebujeme plnou sílu uspořádání. Dobře to ukazuje následující tvrzení:

**Věta 4c.9.**
Nechť je $R$ relace na množině $A$, která je tranzitivní. Nechť $M$ je neprázdná množina prvků z $A$ taková, že pro každé dva různé prvky $a,b \in M$ platí $aRb$ nebo $bRa$. Pak existuje prvek $m \in M$ takový, že pro všechna $x \in M - \{m\}$ platí $mRx$.

**Důkaz** (poučný)**:** Důkaz povedeme indukcí podle $|M|$.

$V(n)$: Každá množina velikosti $n$, na které je tranzitivní relace $R$ splňující podmínku vzájemné porovnatelnosti všech různých prvků $M$, má prvek $m$ s vlastností, že $mRx$ pro všechna $x \in M - \{m\}$.

(0) $V(1)$ je triviálně splněno.

(1) Vezměme libovolné $n \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že $V(n)$ platí. Uvažujme teď množinu $M$ o $n+1$ prvcích uspořádanou relací $R$ splňující příslušné požadavky (tranzitivita, porovnatelnost). Zvolme nějaké $y \in M$, označme $M' = M - \{y\}$. Restrikce $R$ na $M'$ je pořád tranzitivní a porovnává všechny prvky, takže podle indukčního předpokladu existuje $m' \in M'$ takové, že $m'Rx$ pro všechna $x \in M' - \{m'\}$.

Protože $m', y \in M$ a $y \neq m'$, musí být podle předpokladu porovnatelné, platí tedy $m'Ry$ nebo $yRm'$.

Jestliže $m'Ry$, pak $m'Rx$ pro všechny $x \in (M' - \{m'\}) \cup \{y\} = M - \{m'\}$, máme tedy hledaný prvek.

Jestliže $yRm'$, pak tvrdíme, že $y$ je ten hledaný prvek. Vezměme libovolné $x \in M - \{y\} = M'$. Jestliže $x = m'$, pak $yRm'$ říká $yRx$ a vše je v pořádku. Jestliže $x \neq m'$, pak $x \in M' - \{m'\}$ a proto $m'Rx$, také $yRm'$ a podle tranzitivity $yRx$, jak bylo potřeba.

□

**Poznámka:** Z toho již hravě odvodíme předchozí větu: Nechť $(A, \preceq)$ je lineárně uspořádaná množina, $M$ její konečná podmnožina. Pak $\preceq$ je tranzitivní relace, která díky linearitě porovnává všechny prvky $M$. Podle Věty 4c.9 tedy existuje prvek $m \in M$ takový, že pro $x \in M - \{m\}$ máme $m \preceq x$. Díky reflexivitě ovšem máme i $m \preceq m$, takže $m \preceq x$ pro všechna $x \in M$ a $m$ je tedy nejmenší prvek.
△

Věta nám poskytla existenci nejmenšího a největšího prvku za předpokladu, že máme lineární uspořádání. Následující tvrzení ukáže, že to platí i naopak, tedy bez linearity už se na takové prvky spoléhat nelze.

**Fakt 4c.10.**
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Jestliže platí, že každá dvouprvková podmnožina $A$ má nejmenší prvek, pak $(A, \preceq)$ už je nutně lineárně uspořádaná množina.

**Důkaz** (poučný)**:** Nechť $x, y \in A$. Jestliže $x = y$, pak $x \preceq y$ z reflexivity. Jinak je $\{x, y\}$ dvouprvková podmnožina $A$, tudíž podle předpokladu musí mít nejmenší prvek. Pokud je jím $x$, tak platí $x \preceq y$, a pokud je jím $y$, tak platí $y \preceq x$. Tyto dva prvky jsou tedy porovnatelné.

□

Všechny konečné lineárně uspořádané množiny jsou v jistém smyslu stejné.

! **Věta 4c.11.**
Nechť $(A, \preceq)$ je konečná částečně uspořádaná množina. Je to lineární uspořádání právě tehdy, jestliže lze prvky $A$ napsat jako $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ tak, aby $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_n$.

**Důkaz** (poučný)**:** 1) $\Longrightarrow$: Indukcí dokážeme tvrzení $V(n)$, že jestliže je $n$-prvková množina lineárně uspořádaná, pak ji lze příslušným způsobem seřadit.

(0) $V(1)$ evidentně platí, $A = \{a_1\}$.

(1) Vezměme libovolné $n \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že $V(n)$ platí. Uvažujme teď nějakou lineárně uspořádanou množinu $(A, \preceq)$ o $n+1$ prvcích. Protože je to konečná lineárně uspořádaná množina, tak musí mít největší prvek $m$. Uvažujme $M' = M - \{m\}$. Ukázali jsme, že restrikce lineárního uspořádání je zase lineární uspořádání, takže $(M', \preceq)$ je lineárně uspořádaná množina o $n$ prvcích, tudíž ji podle indukčního předpokladu můžeme uspořádat jako $M - \{m\} = \{a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_n\}$. A jelikož je $m$ největší prvek $M$, tak určitě $a_n \preceq m$, také $a_n \neq m$, máme tedy $a_n \prec m$. Můžeme tudíž položit $a_{n+1} = m$ a jsme hotovi.

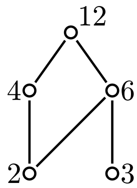
2) $\Longleftarrow$: Předpokládejme, že částečně uspořádanou množinu $(A, \preceq)$ lze napsat jako $A = \{a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_n\}$. Chceme ukázat, že je lineárně uspořádná. Ale to je snadné, kdykoliv nám někdo dá $a, b \in A$, tak musí existovat $i, j$ takové, že $a_i = a$ a $a_j = b$. Možnost $i = j$ odpovídá $a = b$, pak $a \preceq b$ díky reflexivitě. Pokud by bylo $i < j$, pak je $a$ v tom řetězci někde před $b$, tudíž dle tranzitivity $a \preceq b$. Případ $i > j$ pak symetricky a naprosto stejně vede na $b \preceq a$. Čili ať už nastane jakýkoliv případ, $a, b$ jsou porovnatelné.

□

! Řečeno jinak, konečná uspořádaná množina je lineárně uspořádaná právě tehdy, jestliže její Hasseův diagram vypadá jako jedna šňůrka s korálky zdola nahoru. Zajímavá věc je, že každý Hasseův diagram lze na takovou šňůrku upravit. Jak se to dělá? Jestliže pro dané uspořádání linearita nefunguje, tak to způsobil nedostatek vhodných srovnání. Naskýtá se tedy nápad napravit to tím, že prostě nějaké dvojice do relace přidáme. Musí se to ovšem dělat opatrně, aby se nové dvojice nedostaly do rozporu s původním porovnáváním, tedy aby vzniklá relace byla pořád uspořádání.

! **Definice.**
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Relace $\preceq_L$ na $A$ se nazývá **lineární rozšíření** (**linear extension**) relace $\preceq$, jestliže je $(A, \preceq_L)$ lineárně uspořádaná množina a $\preceq \subseteq \preceq_L$, tedy pro všechna $a, b \in A$ splňující $a \preceq b$ platí i $a \preceq_L b$.

! **Příklad 4c.f:** Uvažujme množinu $A = \{2, 3, 4, 6, 12\}$ uspořádanou dělitelností $|$. Tato možina není lineárně uspořádaná, jak ostatně napoví Hasseův diagram.




Nebo si prostě hned všimneme, že 4 a 6 jsou dělitelností neporovnatelné. Uvažujme teď tutéž množinu, ale s uspořádáním $\leq$. Pak ji lze krásně uspořádat $2 < 3 < 4 < 6 < 12$, je to tedy již lineárně uspořádaná množina, a zároveň toto uspořádání nejde nikde proti tomu původnímu. Například relace $3 \,|\, 6$ říká, že 3 je před 6 vzhledem k $|$, a toto je v novém uspořádání zachováno. Zkuste si projít všechny porovnatelné dvojice z $(A, |)$ (je jich 8) a přesvědčte se, že mají stejné pořadí i v novém srovnání.

Nebo dokažte obecně, že jestliže $a, b \in \mathbb{N}$ a $a \,|\, b$, pak $a \leq b$, a máte důkaz, že pro libovolnou podmnožinu $N$ přirozených čísel uspořádanou pomocí dělitelnosti dostanete její lineární rozšíření pomocí $\leq$.
$\triangle$

Linearizaci lze najít pro každou konečnou uspořádanou množinou.

! **Věta 4c.12.**
Pro každou konečnou částečně uspořádanou množinu $(A, \preceq)$ existuje lineární rozšíření $\preceq_L$ daného uspořádání $\preceq$.

**Důkaz** (poučný, drsný)**:** Důkaz provedeme indukcí.

Tvrzení $V(n)$: Každé uspořádání na $n$-prvkové množině lze lineárně rozšířit.

(0) $V(1)$ evidentně platí.

(1) Mějme libovolné $n \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že lineární rozšíření lze najít pro všechny $n$-prvkové množiny. Teď nechť $(M, \preceq)$ je uspořádaná množina o $n + 1$ prvcích. Dokázali jsme, že konečné uspořádané množiny mají maximální prvek, tak si jedno $m = \max(M)$ vezměme a uvažujme množinu $M' = M - \{m\}$, kterou uspořádáme restrikcí $\preceq$. Dostaneme $n$-prvkovou částečně uspořádanou množinu, proto podle indukčního předpokladu pro ni existuje lineární rozšíření $\preceq_L$. Můžeme tedy psát $M' = \{a_1 \prec_L a_2 \prec_L \cdots \prec_L a_n\}$. Přidejme definici, že $m \preceq_L m$ a $a_i \prec_L m$ pro všechna $a_i \in M'$ a dostaneme relaci $\preceq_L$ na $M$. Ukážeme, že je to lineární rozšíření $\preceq$.

Je to ovšem relace, jejíž část jsme dodělávali sami na koleně, tudíž není vůbec jasné, co všechno jsme náhodou nezkazili, takže teď nevíme nic, ani základní vlastnosti, musíme dokázat všechno.

Bude se nám při tom hodit, když si ujasníme jednu věc. V okamžiku, kdy napíšeme $a \preceq_L b$, tak jsou dvě možnosti. Buď $a, b \in M'$, pak ovšem to $\preceq_L$ pochází z indukčního předpokladu, tudíž má všechny tři vlastnosti uspořádání (R,A,T) a můžeme je použít. Pokud by ale byl některý z prvků roven $m$, tak už jde o $\preceq_L$, které jsme my následně vyrobili definicí. Pak je situace zajímavá v tom, že o něm zatím žádné vlastnosti neznáme, zato ale přesně víme, co se děje. Jmenovitě, všechny prvky $a \in M$ splňují $a \preceq_L m$, ale situace, kdy $m \preceq_L b$, může nastat jedině, pokud také $b = m$, protože pro žádné jiné $x \neq m$ jsme dvojici $m \preceq_L x$ do naší relace nezařadili.

1) $(M, \preceq_L)$ je částečné uspořádání:

Reflexivita: $m \preceq_L m$ platí dle definice, pro $x \in M'$ platí $x \preceq_L x$ z toho, že $\preceq_L$ je uspořádání na $M'$.

Antisymetrie: Nechť $a, b \in M$ splňují $a \preceq_L b$ a $b \preceq_L a$. Jsou tři možnosti.

Jestliže $a, b \in M'$, pak jde o relaci $\preceq_L$ na $M'$ a ta už přišla coby uspořádání, proto $a = b$.

Jestliže $a = m$ a $b = m$, pak $a = b$ a je to zase v pořádku.

Poslední možnost je, že jeden z $a, b$ je z $M'$ a druhý je $m$, to ale nemůže nastat, protože u takových dvojic jsme $\preceq_L$ definovali přímo sami předpisem a pro každou dvojici $a_i, m$ jsme do $\preceq_L$ zařadili jen jedno srovnání.

Tranzitivita: Nechť $a, b, c \in M$ splňují $a \preceq_L b \preceq_L c$. Zase musíme rozebrat možnosti podle toho, odkud prvky jsou.

Jestliže $a, b, c \in M'$, pak zde používáme $\preceq_L$, jak přišlo z indukce, je to tedy uspořádání a z jeho tranzitivity $a \preceq_L c$.

Jiná možnost je, že některý z prvků je $m$. Pokud by to bylo $c$, pak buď také $a = m$ a $a \preceq_L c$ je z reflexivity, nebo $a \in M'$ a pak $a \preceq_L c$, protože tak jsme srovnání mezi $m$ a prvky z $M'$ definovali.

Pokud by $b = m$, tak dle předchozí diskuse už z $b \preceq_L c$ plyne $c = m$, tudíž $b = c$ a předpoklad $a \preceq_L b$ říká i $a \preceq_L c$.

Poslední možností je, že $a = m$. Pak z $a \preceq_L b$ plyne i $b = m$ a můžeme použít závěr předchozího odstavce.

Každopádně $\preceq_L$ je tranzitivní.

2) $\preceq_L$ je lineární: To je snadné, máme $M = \{a_1 \prec_L \cdots \prec_L a_n \prec_L m\}$, tudíž jde o lineární uspořádání.

3) Platí $\preceq \subseteq \preceq_L$:

Nechť $a, b \in M$ splňují $a \preceq b$. Jestliže $a, b \in M'$, pak $a \preceq_L b$, protože jde o relaci z indukčního předpokladu.

Jestliže je $b = m$, pak tedy zkoumáme situaci $a \preceq m$ a i zde máme $a \preceq_L m$, tak jsme to definovali pro všechna $a \in M$.

Zbývá případ $a = m$. My jsme ale $m$ zvolili jako maximum $M$, to znamená, že jediný prvek $M$, který splňuje $m \preceq b$, je $b = m$. Máme tedy $a = b = m$ a $a \preceq_L b$ z toho, že jsme definovali i $m \preceq_L m$.

Tím je důkaz hotov.

$\square$

**!** Tento proces je docela užitečný a má své jméno. Pro matematiky je zajímavý teoreticky, protože s lineárním uspořádáním se lépe pracuje, říkají tomu **linearizace částečného uspořádání**. Pro lidi z computer science je to praktický nástroj a říkají tomu **topologické uspořádávání**. Pojem topologie computerscientisti používají k označení prostorového rozmístění prvků a zde vlastně nejde o nic jiného, než vzít třeba i docela košatý Hasseův diagram a zmáčknout jej chytře z boku tak, aby vznikla jedna svislá šňůrka, a to tak, aby se hrany, které jdou nahoru, nepřeklopily během procesu do opačného směru. (Matematici používají pojem „topologie“ pro něco úplně jiného, proto mají svůj název.)

Důkaz Věty zároveň slouží jako praktický návod na algoritmus takového procesu, a protože jde o důkaz indukcí, půjde o algoritmus rekurzivní. Abychom ukázali, že i zde funguje symetrie mezi horním a dolním koncem, zkusíme v algoritmu budovat linearizaci zdola na rozdíl od důkazu, kde jsme to dělali shora.

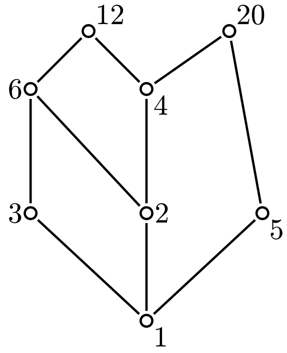
`procedure` *topological sort* $((A, \preceq))$
$k := 0$;
`while` $A \neq \emptyset$ `do`
  $k := k + 1$;
  $a_k := \min(A)$;
  $A := A - \{a_k\}$;
`output:` $(a_1 \prec_L a_2 \prec_L \cdots \prec_L a_n)$;

Tento postup docela dobře koresponduje s algoritmem pro tvoření Hasseova diagramu. Lze toho využít. Pokud máme Hasseův diagram uspořádání vytvořený pomocí standardního algoritmu zdola, pak linearizaci provedeme velice snadno: Nejprve vezmeme prvky z dolního řádku a seřadíme je libovolně. Za ně zařadíme prvky z druhého řádku a seřadíme je libovolně. A tak dále, až je množina linearizována.

**!** **Příklad 4c.g:** Uvažujme částečně uspořádanou množinu $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 20\}, |)$, viz příklad 4b.f.

Pak $a_1 = \min(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 20\}) = 1$, $a_2$ je nějaké $\min(\{2, 3, 4, 5, 6, 12, 20\})$, třeba $a_2 = 3$, $a_3$ je nějaké $\min(\{2, 4, 5, 6, 12, 20\})$, třeba $a_3 = 2$, $a_4$ je nějaké $\min(\{4, 5, 6, 12, 20\})$, třeba $a_4 = 5$, $a_5$ je nějaké $\min(\{4, 6, 12, 20\})$, třeba $a_5 = 6$, $a_6$ je nějaké $\min(\{4, 12, 20\})$, třeba $a_6 = 4$, $a_7$ je nějaké $\min(\{12, 20\})$, třeba $a_7 = 12$, a $a_8$ je nějaké $\min(\{20\})$, tedy $a_8 = 20$,

Dostáváme linearizaci $1 \prec_L 3 \prec_L 2 \prec_L 5 \prec_L 6 \prec_L 4 \prec_L 12 \prec_L 20$. Podíváte-li se na Hasseův graf z příkladu 4b.f, vidíte, že jsme prostě brali postupně řádky zleva doprava.




Jinou linearizací by bylo srovnat čísla podle velikosti, což ukazuje, že linearizace rozhodně není jednoznačná.

$\triangle$

**!** Poznámka k příkladu: Při praktickém tvoření linearizace rukou se vyplatí vypsat si všechny dvojice z odpovídající relace $\prec$. V onom příkladě jsou to $1 \prec 2$, $1 \prec 3$, $1 \prec 4$, $1 \prec 5$, $1 \prec 6$, $1 \prec 12$, $1 \prec 20$, $2 \prec 4$, $2 \prec 6$, $2 \prec 12$, $2 \prec 20$, $3 \prec 6$, $3 \prec 12$, $4 \prec 12$, $4 \prec 20$, $5 \prec 20$, $6 \prec 12$.

V prvním kroku pak hledáme minimum, tedy takové číslo, které se v žádné z těchto dvojic neobjeví napravo. Najdeme jedničku, pak ze seznamu vymažeme všechny dvojice, které jedničku obsahují, a opakujeme tento postup. Vyzkoušejte si, že dostáváte tytéž situace jako v předchozím řešení.

K čemu toto může být? Máte úkoly $u_1, \dots, u_n$, které musíte splnit, ale existují mezi nimi jisté závislosti, třeba že $u_7$ se musí dělat až po $u_3$ a podobně. Cílem je seřadit tyto úkoly tak, aby člověk mohl dělat jeden po druhém a přitom zachoval podmínky. Jde tedy vlastně o docela užitečnou záležitost z oboru plánování, asi si umíte představit, že něco takového se může hodit programu, který zadává úkoly procesoru, inženýrovi navrhujícímu výrobní linku a spoustě dalším lidem. Je to samostatný obor, ke kterému jsme zde jen přičichli na té nejsnažší úrovni, opravdu zajímavé to začne být, když povolíme paralelní zpracování a podobné hrátky, započítáme do toho délku splnění úkolu, ceny operací a ceny prostojů a ceny přepravy od úkolu k úkolu a chceme ještě něco minimalizovat a vůbec se na tom dá vyřádit (něco takového určitě řeší v Airbusu, kde z politických důvodů vyrábí každý kousek letadla někde jinde, ale nakonec z toho musí s co nejmenšími náklady a námahou vylézt letadlo, pokud možno kompletní). Ke slovu přijdou pokročilé matematické metody, z nichž některé určitě potkáte v kursu o optimalizaci.

Z našeho pohledu to má jen jeden malý zádrhel, taková praktická vyjádření mají jen málokdy podobu částečného uspořádání, většinou dostaneme jen několik ostrých srovnání typu $u_2 \prec u_5$ (úkol 2 se musí dělat před úkolem 5). Formálně bychom to řešili tak, že bychom uvažovali nejmenší možnou relaci $\preceq$ takovou, že už je to částečné uspořádání a přitom obsahuje podmínky $\prec$. Toto ovšem není vždy možné udělat, protože ty podmínky $\prec$ nemusí doplnění na uspořádání umožňovat. Jednoduchý příklad: Kdybychom měli $u_1 \prec u_2$, $u_2 \prec u_4$ a $u_4 \prec u_1$, tak při snaze o doplnění na tranzitivní relaci přidáme $u_1 \prec u_4$ (viz první dvě priority) a hned máme spor se třetí. To ale vlastně není na škodu, v takovém případě je stejně nemožné najít pořadí úkolů, které vyhoví zadaným podmínkám, protože si podmínky odporují, čili se při pokusu o vytvoření uspořádání dozvíme, že úloha nemá řešení.

V praxi dokonce ani nemusíme uspořádání vytvářet, prostě jen na zadané priority aplikujeme stejný algoritmus, jaký jsme použili v předchozím příkladě. Nejprve najdeme úkol, který se nikdy nevyskytuje ve srovnáních napravo, to bude ten první. Pak ze seznamu vymažeme všechny dvojice, kde tento úkol je, a krok s vyhledáváním opakujeme. A tak dále, buď se podaří seřadit všechny úkoly, nebo se to někde zadrhne (nenajdeme vhodný prvek), což je znamení, že úloha není řešitelná.

**Příklad 4c.h:** Vyvíjí se program, je nutno udělat komponenty $p_1$ až $p_7$, přičemž $p_7$ lze udělat až po $p_4$ a $p_6$; $p_6$ až po $p_5$ a $p_2$; $p_4$ až po $p_1$, $p_2$ a $p_3$; $p_2$ až po $p_1$ a $p_3$. Najdeme nějaké pořadí, v jakém je dělat.

Minimální komponenta je taková, že se nic nemusí dělat před ní. Nejprve si pro názornost přepíšeme předpoklady do tvaru relace: $p_4 \prec p_7$, $p_6 \prec p_7$, $p_5 \prec p_6$, $p_2 \prec p_6$, $p_1 \prec p_4$, $p_2 \prec p_4$, $p_3 \prec p_4$, $p_1 \prec p_2$ a $p_3 \prec p_2$.

Hledáme minimum, tedy komponentu, která se nevyskytuje ve srovnáních napravo. Vidíme $p_1$, tím začneme. Teď odebereme všechna srovnání, ve kterých se $p_1$ vyskutuje, zbude seznam

$p_4 \prec p_7$, $p_6 \prec p_7$, $p_5 \prec p_6$, $p_2 \prec p_6$, $p_2 \prec p_4$, $p_3 \prec p_4$, $p_3 \prec p_2$.

Hledáme minimum mezi $p_2, \dots, p_7$, najdeme třeba $p_3$. Dostáváme tedy $p_1 \prec_L p_3$, nový seznam bez $p_3$:

$p_4 \prec p_7$, $p_6 \prec p_7$, $p_5 \prec p_6$, $p_2 \prec p_6$, $p_2 \prec p_4$.

Další minimum je třeba $p_2$. Dostáváme tedy $p_1 \prec_L p_3 \prec_L p_2$, nový seznam bez $p_2$: $p_4 \prec p_7$, $p_6 \prec p_7$, $p_5 \prec p_6$.

Další minimum je třeba $p_5$. Dostáváme tedy $p_1 \prec_L p_3 \prec_L p_2 \prec_L p_5$, nový seznam bez $p_5$: $p_4 \prec p_7$, $p_6 \prec p_7$.

Další minimum je třeba $p_4$. Dostáváme tedy $p_1 \prec_L p_3 \prec_L p_2 \prec_L p_5 \prec_L p_4$, nový seznam bez $p_4$: $p_6 \prec p_7$.

Teď už dorazíme celou linearizaci, máme $p_1 \prec_L p_3 \prec_L p_2 \prec_L p_5 \prec_L p_4 \prec_L p_6 \prec_L p_7$.

Pro srovnání si zkuste vytvořit Hasseův diagram, viz cvičení 4c.7.

△

Shrňme si, jakou máme situaci. Jestliže chceme mít zaručeny nejmenší prvky, potřebujeme na to linearitu. Pro konečné množiny už to stačí, ale pro nekonečné ani to stačit nemusí. Tam už žádné prostředky na vynucení nemáme, prostě buď máme štěstí a nejmenší prvky jsou, nebo nejsou. Případy s existujícími nejmenšími prvky jsou důležité, tak jim dáme jméno.

**!** **Definice.**
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Řekneme, že $(A, \preceq)$ je **dobře uspořádaná množina**, jestliže každá neprázdná podmnožina $M \subseteq A$ má nejmenší prvek.

Let $(A, \preceq)$ be a poset. We say that $(A, \preceq)$ is a **well-ordered set** if every non-empty subset of $A$ has a least element.

Někteří autoři definují dobré uspořádání jako uspořádání, které je lineární a podmnožiny mají nejmenší prvky. Není v tom žádný rozdíl, protože i naše definice už linearitu automaticky zahrnuje.

!

**Fakt 4c.13.**
Každé dobré uspořádání je také lineární.

Vyplývá to okamžitě z Faktu 4c.10.

Všimněte si, že zde ztrácíme onu symetrii mezi „horním a dolním koncem“. Jestliže máme dobré uspořádání $\preceq$ a hledáme největší prvek podmnožiny $M$, pak jej můžeme hledat jako nejmenší prvek $M$ vůči $\preceq^{-1}$, ale o tomto inverzním uspořádání obecně nevíme, zda je dobré (viz níže).

Díky Větě 4c.8 víme, že každá konečná lineárně uspořádaná množina je dobře uspořádaná. Teď si představíme nejdůležitější nekonečnou dobře uspořádanou množinu.

!

**4c.14. Princip dobrého uspořádání (well-ordering principle).**
$(\mathbb{N}, \leq)$ je dobře uspořádaná množina.

! **4c.15 Poznámka (důležitá):** Toto tvrzení asi čtenáře nikterak nepřekvapilo, minima různých množin přirozených čísel hledáme běžně. Zajímavé ovšem je, že jsme tento užitečný fakt neuvedli jako větu. Proč? Pro odpověď musíme začít od jiného konce.

V předchozích kapitolách jsme už viděli, jak matematika roste coby strom. Něco dokážeme, pak pomocí toho dokážeme něco těžšího, čímž se naše znalosti rozvětví, ale z těch nových věcí zase dostaneme další znalosti, a tak se matematika postupně košatí, větve se zase spojují a zaplétají a zase větví, vzniká tak velice komplikovaný keř. Zajímavá otázka: Co najdeme, když se po větvích pustíme opačným směrem? Každý fakt je dokázan pomocí jistých jednodušších faktíků, ty jsou zase dokázány pomocí jiných věcí. Takže sestupujeme stále níže až ke kořenům. Co tam najdeme?

V zásadě nic `:-)`. Neexistují totiž žádné věci, které by byly pravdivé samy od sebe. Můžete si například myslet, že bychom mohli jako jeden základ vzít $1 + 1 = 2$, ale pak si člověk položí otázku, co je vlastně 1, a rychle znejistí. Když tedy nejsou žádné absolutní pravdy, z čeho vlastně vycházíme?

Z takzvaných axiomů. Matematici si podobné otázky kladli někdy v 19. století, pořádně prozkoumali onen strom matematického vědění, co z čeho plyne a co by potřebovali znát, aby věci fungovaly, až se nakonec domluvili na seznamu kritických vlastností. Dohodli se, že tyto věci budeme považovat za pravdivé, říká se jim axiomy, a pak se uvidí, jak daleko s tím dokážeme zajít. Existuje skupina axiomů, která je všeobecně přijímaná a stojí na ní současná matematika, pro zajímavost je to třeba axiom, že vůbec nějaké množiny existují, nebo axiom, že když máme dvě množiny $A$ a $B$, tak když je použijeme coby prvky v objektu $\{A, B\}$, tak ta nová věc je také množina. Axiomy jsou tedy věci, o kterých nevíme jistě, zda jsou pravdivé, ale přijde nám vhodné a praktické je za pravdivé považovat.

Tím se dostáváme k principu dobrého uspořádání. Jeho platnost se pomocí standardních axiomů dokázat nedá. Protože to ale přijde matematikům rozumné, tak si jeho fungování přibírají jako další axiom. V kapitole o indukci uvidíme, že přibráním tohoto axiomu si zároveň otevíráme dveře k mnoha dalším užitečným matematickým trikům, nejde tedy o žádnou kontroverzní volbu. Pokud se čtenář nechce hlouběji procházet filosofií matematiky, může to prostě brát jako další daný fakt, jako věří i $1 + 1 = 2$.

Mimochodem, proč se matematici rozhodli právě pro ty axiomy, které máme? V zásadě je možné použít libovolné axiomy, které nejsou vzájemně ve sporu, a dostaneme z nich nějakou teorii. Problém je, že taková teorie by nejspíše byla na nic, protože by se pravidla takového světa silně lišila od našich. Protože bychom přeci jen chtěli, ať nám matematika pomáhá v poznávání zrovna našeho světa, tak se matematici snaží volit axiomy tak, aby se vzniklé výsledky podobaly tomu, co vidíme kolem nás. Už od poloviny 20. století máme vyjasněno, na kterých axiomech matematika stojí, matematici jsou s nimi (až na pár odvážlivců) spokojeni a výsledky, které pomocí nich dostáváme, fungují. A to je to hlavní.

△

**Poznámka (pro hračičky):** Protože axiomy hrají základní roli a silně ovlivní to, jak výsledná teorie vypadá, tak se samozřejmě pilně zkoumají. Jedním z témat je vzájemná souvislost. Pokud se třeba ukáže, že nějaký axiom už se dá dokázat na základě jiných, tak je vlastně navíc, jen zbytečně kalí vodu. Ale nejde jen o to. Dobrá otázka také je, jestli když si nějaký axiom přidáme, tak tím nezpůsobíme rozpor. Když to přeženu, asi bychom z axiomů $1 + 1 = 2$ a $1 + 1 = 3$ daleko nedošli. To je důležité v situaci, kdy zvažujeme, zda ještě další axiom nepřibrat. Dobrým příkladem je axiom výběru (AC, axiom of choice). Víme, že je na ostatních základních axiomech nezávislý, což znamená, že s nimi ani není ve sporu, ani z nich nevyplývá, takže když jej přibereme, tak tím teorii obohatíme. Většina matematiků jej bere, protože je velice užitečný, ale existují i takoví, kteří jej odmítají zabudovat do základů matematické teorie. Mají tedy teorii svou, bez (AC), a jak se dá čekat, mají tam také méně tvrzení, protože zrovna (AC) patří mezi velice oblíbené nástroje při důkazech.

Podobně také víme, že žádné průšvihy nevzniknou, když si mezi axiomy přibereme jeden o platnosti hypotézy kontinua, o které jsme mluvili v kapitole 2c (viz poznámka 2c.20 a zamyšlení za ní).

A protože jsou matematici hraví a zvídaví, tak se také ptají, co se stane, když naopak nějaký axiom uberou. S tím je spojena zajímavá příhoda. Na axiomech stojí i geometrie a někdy na začátku 19. století si někteří matematici řekli, že zkusí jeden axiom vyhodit, co to udělá. Ne že by si mysleli, že to není pravda, ale jedna věc je to, co matematici vidí kolem sebe, a druhá jsou axiomy. A tak ho vyhodili a dostali docela zajímavou geometrii, ve které se děly podivné věci, například už se úhly v trojúhelníku nenasčítaly do $\pi$. Byla to taková veselá hříčka, a najednou se o sto let později ukázalo, že ve skutečnosti přesně takto funguje vesmír ve velkém měřítku (obecná teorie relativity a podobné Einsteinoviny). Hrátky s axiomy se tedy mohou zajímavě zvrhnout.
△

**Příklad 4c.i:** Teď použijeme princip dobrého uspořádání k důkazu, že všechna přirozená čísla lze popsat nejvýše 10 českými slovy.

Zkusíme to sporem, předpokládejme, že to nejde. Pak je množina $M$ přirozených čísel, která nejdou popsat nejvýše 10 českými slovy, neprázdná. Podle principu dobrého uspořádání tedy musí existovat její nejmenší prvek, nazvěme jej $m$. Pak je $m$ vlastně *nejmenší přirozené číslo, které nelze popsat nejvýše desíti českými slovy*, takže jsme jej popsali přesně deseti českými slovy a máme spor.
△

**Poznámka:** Další nepovinný náhled za oponu matematiky: Všimněte si, že jsme dokázali popsatelnost všech čísel deseti slovy, ale tento důkaz nám nedal žádný návod, jak to vlastně dělat. Já třeba nevím, jak bych popsal číslo 19462409365925236583776, jen vím, že to nějak musí jít. Jsou principiálně dva druhy důkazů, že něco existuje. Důkazy *konstruktivní* to dokazují tak, že dotyčný objekt přímo najdou (či doloží, jak jej najít). Pak jsou důkazy *nekonstruktivní*, kdy se existence dovodí nějakým trikem, aniž bychom ale nějaký exemplář předvedli. Někteří matematici s těmito důkazy mají filosofický problém a neuznávají je za platné. Mají tak svou vlastní teorii matematiky, která je o něco chudší než ta obecně přijímaná, protože k některým výsledkům se konstruktivně neumí dostat, a komplikovanější, protože k mnoha výsledkům se nakonec dopracovali, ale trnitější cestou. Je to ale silně okrajový fenomén.
△

Dobře uspořádané množiny jsou velice užitečné, mimo jiné tím, že na nich lze používat matematickou indukci (viz kapitola 5b). Ukážeme si jich teď více, ale začneme pro srovnání několika případy, kdy dobrota naopak selže.

**Příklad 4c.j:** $(\mathbb{Z}, \leq)$ je lineárně uspořádaná množina, ale není dobře uspořádaná, neboť neprázdná podmnožina $M = \mathbb{Z}$ určitě nemá nejmenší prvek, tedy prvek $m$, který by splňoval $m \leq n$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$.
△

**Příklad 4c.k:** $(\mathbb{Q}, \leq)$ je lineárně uspořádaná množina, ale není dobře uspořádaná, neboť neprázdná podmnožina $M = \{x \in \mathbb{Q};\ 0 < x < 1\}$ určitě nemá nejmenší prvek.

Tento příklad je zajímavý tím, že $M$ „neutíká“ nikam do nekonečna.
△

**Příklad 4c.l:** Nechť $X$ je libovolná alespoň dvouprvková množina, třeba konečná, uvažujme množinu jejích podmnožin $A = P(X)$ uspořádanou inkluzí. Pak nejde o lineární uspořádání, tím pádem ani nemůže být dobré, viz Fakt 4c.13 a příklad 4b.c.

Podobně nedostáváme lineární uspořádání u relace dělitelnosti, pokud vhodně zvolíme množinu $A$. Například na množině $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ dává dělitelnost dobré uspořádání, ale na $A = \{1, 2, 3, 6\}$ už ne: Podmnožina $\{2, 3\}$ nemá vůči dělitelnosti nejmenší prvek.

Konečné příklady nedobrých uspořádání se tedy vyrábějí velice snadno.
△

**Příklad 4c.m:** $(\mathbb{N}, \geq)$ je lineárně uspořádaná množina, ale není dobře uspořádaná, neboť neprázdná podmnožina $M = \mathbb{N}$ určitě nemá nejmenší prvek. Opravdu? Takový prvek $m$ by musel splňovat $m \geq n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, takže neexistuje.
△

Poslední příklad ukazuje, že když vezmeme dobře uspořádanou množinu $(\mathbb{N}, \leq)$ a přejdeme k duálnímu uspořádání $(\mathbb{N}, \leq^{-1}) = (\mathbb{N}, \geq)$, tak se dobrota může ztratit. Přechod k inverznímu uspořádání tedy rozhodně není něco, co bychom chtěli u dobře uspořádaných množin dělat, a ztrácíme onu příjemnou symetrii mezi pohledy „shorna“ a „zdola“. Naopak přechod k podmnožině je jako obvykle bezproblémový.

**Fakt 4c.16.**
Nechť $(A, \preceq)$ je dobře uspořádaná množina. Pak pro libovolnou neprázdnou podmnožinu $B \subseteq A$ je restrikce $\preceq$ na $B$ dobré uspořádání.

**Důkaz** (rutinní)**:** Podle Faktu 4c.5 už víme, že tato restrikce je lineární uspořádání. Zbývá dokázat, že je dobré. Nechť $M$ je neprázdná podmnožina $B$. Pak je to i neprázdná podmnožina $A$ a tudíž existuje její nejmenší prvek $m$. Podmínka, že $m \preceq x$ pro všechna $x \in M$, je ale zcela nezávislá na tom, v jaké nadmnožině $M$ je, relace $\preceq$ a její restrikce na $B$ se na $M$ shodují, tudíž je $m$ také minimem $M$ v $(B, \preceq)$.

□

To je zase případ, kdy je to tak lehké, až člověk přemýšlí, co vlastně napsat. Dobře uspořádané množiny tedy můžeme získávat pomocí podmnožin $(\mathbb{N}, \leq)$ (což tady děláváme), dalším zajímavým zdrojem je kartézský součin.

## 4c.17 Uspořádání a kartézský součin

V obecné kapitole o relacích jsme zavedli uspořádání na kartézském součinu množin, viz 3b.9. Vysoce užitečné to začne být zejména u uspořádání. Připomeňme, že máme-li množiny s relacemi $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_m, \preceq_n)$, pak součinové uspořádání porovnává vektory z $A_1 \times \dots \times A_n$ předpisem $(a_i) \preceq (b_i)$ právě tehdy, pokud $a_i \preceq_i b_i$ po všechna $i$.

Z obecného tvrzení 3b.10 okamžitě dostáváme důsledek.

**Fakt 4c.18.**
Jestliže jsou $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_m, \preceq_n)$ částečně uspořádané množiny, pak je i $A_1 \times \dots \times A_n$ se součinovým uspořádáním částečně uspořádaná množina.

To vypadá moc pěkně, ale ve skutečnosti se to používá relativně zřídka, protože u tohoto typu uspořádání jsou vážné problémy s porovnatelností vektorů. Například v součinu $(\mathbb{N}, \leq) \times (\mathbb{N}, \leq)$ sice platí třeba $(1, 13) \leq (3, 23)$, ale neuměli bychom porovnat řekněme vektory $(1, 2)$ a $(2, 1)$. Řečeno matematicky, součinové uspořádání bývá zřídka lineární. To bývá v mnoha aplikacích zásadní problém.

Chce to tedy jiný nápad. Jako inspirace poslouží uspořádání, které se používá ve slovnících, my totiž na základě schopnosti srovnat jednotlivé „souřadnice“, tj. individuální písmena, umíme porovnat pořadí libovolných dvou slov. To vypadá nadějně.

**Definice.**
Uvažujme částečně uspořádané množiny $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_n, \preceq_n)$. Definujeme **lexikografické uspořádání** (**lexicographic ordering**) $\preceq_L$ na $A = A_1 \times \dots \times A_n$ následovně: Pro $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in A$ platí $a \preceq_L b$ právě tehdy, jestliže $a_i = b_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$ (tedy $a = b$), nebo existuje index $k$ takový, že $a_i = b_i$ pro všechna $i$ splňující $1 \leq i < k$ a $a_k \prec_k b_k$.

V některých situacích je praktičtější jiná definice, kdy se nejprve zavede „ostrá nerovnost“ na $A$, značená tradičně $(a_1, \dots, a_n) \prec_L (b_1, \dots, b_n)$, podmínkou „existuje index $k$ takový, že $a_i = b_i$ pro všechna $i$ splňující $1 \leq i < k$ a $a_k \prec_k b_k$“. Toto je asymetrická a tranzitivní relace, z ní se pak $\preceq_L$ udělá již standardním způsobem, podmínkou „$a \prec_L b$ nebo $a = b$“. Naopak pokud z $\preceq_L$ vyrobíme standardní odvozenou relaci $\prec$, tak to bude ta ze začátku tohoto odstavce (viz Věta 4b.5).

Co to znamená v praxi? Máme-li porovnat dva prvky, tak je začneme porovnávat po souřadnicích, začneme od první a ignorujeme je, dokud jsou stejné. Jakmile narazíme na rozdílné souřadnice, použijeme příslušné srovnání k rozhodnutí. Není to nic nového, asi nás nepřekvapí, že ve slovníku je „sadař“ dříve než „salát“. Ignorujeme shodné první znaky „sa“ a ten další rozhodl, ostatní jsme pak také ignorovali. Než se pustíme do podrobnějšího zkoumání, potvrdíme si, že lexikografické uspořádání je opravdu uspořádání.

**Věta 4c.19.**
Uvažujme částečně uspořádané množiny $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_n, \preceq_n)$. Pak je $A = A_1 \times \dots \times A_n$ spolu s lexikografickým uspořádáním $\preceq_L$ částečně uspořádaná množina.

**Důkaz** (z povinnosti)**:** Reflexivita: Vezměme libovolné $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$. Pak $a = a$, proto $a \preceq_L a$.

Antisymetrie: Vezměme libovolné $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in A$ takové, že $a \preceq_L b$ a $b \preceq_L a$. Z toho prvního srovnání máme podle definice dvě možnosti. Jedna je, že $a = b$, čímž máme, co potřebujeme, a důkaz antisymetrie je hotov. Ukážeme, že druhá možnost $a \neq b$ nastat nemůže.

Takže předpokládejme, že $a \neq b$, pak z $a \preceq_L b$ máme $a \prec_L b$ a existuje $k$ takové, že $a_i = b_i$ pro $i < k$ a $a_k \prec_k b_k$. Podobně máme $b \prec_L a$ a existuje $l$ splňující $a_i = b_i$ pro $i < l$ a $b_l \prec_l a_l$. Když $a_i = b_i$ pro $i < k$ ale $a_l \neq b_l$, tak nutně $k \leq l$, symetrickým argumentem pak odvodíme, že musí být $k = l$. Máme tedy $a_k \prec_k b_k$ a zároveň $b_k \prec_k a_k$, což je ve sporu s asymetrií $\prec_k$. Tato varianta tedy vůbec nemůže nastat, jediná možnost je ta, kdy se rovnají všechny souřadnice.

Tranzitivita: Vezměme libovolné $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n), c = (c_1, \dots, c_n) \in A$ takové, že $a \preceq_L b$ a $b \preceq_L c$. Jestliže $a = b$, pak $b \preceq_L c$ je vlastně $a \preceq_L c$ a jsme hotovi. Jestliže $b = c$, pak $a \preceq_L b$ je vlastně $a \preceq_L c$ a zase jsme hotovi.

Nejzajímavější případ je ten poslední, když $a \neq b$ a $b \neq c$. Pak podle definice existuje $k$ takové, že $a_i = b_i$ pro $i < k$ a $a_k \prec_k b_k$, a také existuje $l$ splňující $b_i = c_i$ pro $i < l$ a $b_l \prec_l c_l$. Nechť $m = \min(k, l)$. Pak pro $i < m$ máme $a_i = b_i = c_i$.

Co platí pro $m$? Jsou dvě možnosti, podle toho, jestli je to minimum rovno $k$ nebo $l$ (nevylučují se, v případě $m = k = l$ budou platné oba argumenty, takže to nevadí). Jak vypadá případ $m = k \leq l$? Podle předpokladu $a_k \prec_k b_k$, tedy $a_m \prec_m b_m$. Co bude s $l$? Pro $m < l$ máme $b_m = c_m$, pro $m = l$ máme $b_m \prec_m c_m$, každopádně $b_m \preceq_m c_m$. Jsme tedy v situaci $a_m \prec_m b_m \preceq_m c_m$ a Lemma 4b.4 (iii) dává $a_m \prec_m c_m$, což spolu se závěrem předchozího odstavce dává $a \preceq_L c$. Podobně to dopadne, pokud $m = l \leq k$.

□

V typickém případě jsou všechny množiny $A_i$ stejné a porovnáváme prvky z $A \times \cdots \times A$, kde máme jen jedno uspořádání.

**Příklad 4c.n:** Uvažujme $\mathbb{Z}^6$ s lexikografickým uspořádáním daným relací $\leq$. Pak máme například $(1,2,3,9,9,9) \preceq_L (1,2,4,1,1,1)$ a také $(1,2,3,9,9,9) \prec_L (1,2,4,1,1,1)$, rozhodla třetí souřadnice a další už nehrály roli.
△

**Příklad 4c.o:** Co vše je menší než $(3,4)$ v množině $(\mathbb{N}, \leq) \times (\mathbb{N}, \leq)$ uspořádané lexikograficky?

Aby platilo $(x,y) \prec_L (3,4)$, tak buď musí rozhodnout první souřadnice, tedy musí být $x = 1$ či $x = 2$ a zbytek libovolný, nebo rozhoduje až druhá souřadnice. Proto

$$\{(x,y) \in \mathbb{N}^2;\ (x,y) \preceq_L (3,4)\} = \{(1,y);\ y \in \mathbb{N}\} \cup \{(2,y);\ y \in \mathbb{N}\} \cup \{(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

△

Teď si potvrdíme, v čem je hlavní výhoda lexikografického uspořádání.

**Věta 4c.20.**
Nechť $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_n, \preceq_n)$ jsou částečně uspořádané množiny, uvažujme $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ spolu s lexikografickým uspořádáním $\preceq_L$.
(i) Jestliže jsou všechny $(A_i, \preceq_i)$ lineárně uspořádané, tak je i $(A, \preceq_L)$ lineárně uspořádaná.
(ii) Jestliže jsou všechny $(A_i, \preceq_i)$ dobře uspořádané, tak je i $(A, \preceq_L)$ dobře uspořádaná.

**Důkaz** (drsný, poučný)**:** (i): Předpokládejme, že všechny $(A_i, \preceq_i)$ jsou lineárně uspořádané. Vezměme libovolné $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in A$. Buď jsou si rovny, pak $a \preceq_L b$ a tyto prvky jsou porovnatelné. Nebo existují $j$ taková, že $a_j \neq b_j$, nechť $k$ je z nich nejmenší. Pak $a_i = b_i$ pro $i < k$ a $a_k \neq b_k$. Protože je $(A_k, \preceq_k)$ lineární, tak určitě buď $a_k \preceq_k b_k$ nebo $b_k \preceq_k a_k$. V prvním případě pak máme $a \preceq_L b$, v druhém $b \preceq_L a$. Lexikografické uspořádání je tedy lineární.

(ii): Důkaz provedeme indukcí na $n$.

(0) Pro $n = 1$ máme jednu množinu, jejíž součin se sebou je zase ona, tedy je dobře uspořádaná.

(1) Zvolme nějaké $n \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že kartézský součin libovolných $n$ dobře uspořádaných množin je dobrý v lexikografickém uspořádání. Teď mějme $n+1$ dobře uspořádaných množin $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_{n+1}, \preceq_{n+1})$ a jejich kartézský součin $A$ s lexikografickým uspořádáním $\preceq_L$.

Uvažujme $\widehat{M_1} = \{a_1;\ (a_1, \dots, a_{n+1}) \in M\}$ (ze všech prvků $M$ si vytáhneme první souřadnici). To je neprázdná podmnožina $A_1$, takže podle předpokladu musí existovat její nejmenší prvek $m_1$. Máme tedy prvek takový, že kdykoliv $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in M$, pak $m_1 \preceq_1 a_1$. Navíc tento prvek pochází z nějakého $(m_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \in M$. Nechť

$$M_1 = \{(a_2, a_3, \dots, a_{n+1}) \in M;\ (m_1, a_2, a_3 \dots, a_{n+1}) \in M \wedge a_1 = m_1\}.$$

Zde bereme všechny prvky z $M$, jejichž první souřadnice je $m_1$, tuto první souřadnici vynecháme a zbývající dáme do $M_1$. Pak $M_1$ je neprázdná podmnožina kartézského součinu $A_2 \times \dots \times A_{n+1}$. To je $n$ množin, proto podle indukčního předpokladu jde o dobře uspořádanou množinu vzhledem k příslušnému lexikografickému uspořádání, tudíž tato množina musí mít nejmenší prvek $(m_2, \dots, m_{n+1})$. Nechť $m = (m_1, m_2, \dots, m_{n+1})$. Tvrdíme, že jde o nejmenší prvek $M$ vzhledem k lexikografickému uspořádání na $A$.

Vezměme tedy libovolné $a = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in M$. Protože $a_1 \in \widehat{M_1}$, musí podle volby $m_1$ platit $m_1 \preceq_1 a_1$. Pokud platí dokonce $m_1 \prec_1 a_1$, pak již $m \preceq_L a$ podle definice lexikografického uspořádání (rozhodla hned první souřadnice).

Pokud $m_1 \prec_1 a_1$ neplatí, tak nutně $m_1 = a_1$. Pak ovšem $(a_2, \dots, a_{n+1}) \in M_1$ a tudíž $(m_2, \dots, m_{n+1}) \preceq (a_2 \dots, a_{n+1})$ v lexikografickém uspořádání $A_2 \times \dots \times A_{n+1}$. To zase nabízí dvě možnosti.

Jedna je, že $m_i = a_i$ pro všechna $i = 2, \dots, n+1$, ale my teď předpokládáme i $m_1 = a_1$, tedy $m_i = a_i$ pro všechna $i$ a máme $m \preceq_L a$. Druhá je, že existuje nějaké $k$ takové, že $m_i = a_i$ pro $i = 2, \dots, k-1$ a $m_k \prec_k a_k$. To ale znamená, že $m_i = a_i$ pro $i = 1, \dots, k-1$ a $m_k \prec_k a_k$, tedy $m \preceq_L a$. Důkaz hotov.

□

Naopak se dá ukázat, že stačí, aby jen jediná složka takového kartézského součinu nebyla lineárně či dobře uspořádaná, a už to pokazí pro celý součin, například $(\mathbb{Z}, \leq) \times (\mathbb{N}, \leq)$ s lexikografickým uspořádáním není dobře uspořádaná.

Stojí za zmínku, že pro analýzu ani lexikografické uspořádání není tím pravým, sice porovná všechno, ale pořád nebere ohled na velikost vektorů. Čímž narážíme na skutečnost, že na každé množině lze vymyslet spousty různých částečných uspořádání, ale my také potřebujeme, aby nám to uspořádání pomáhalo v tom, co máme s množinou v úmyslu. V některých situacích prostě rozumné uspořádání nenajdeme.

Z pohledu computer science je nicméně možnost uspořádávat složitější množiny lexikograficky velice užitečná, v diskrétní matematice se s ním lze setkat často.

**Příklad 4c.p:** Lexikografické uspořádání, které jsme definovali, nám umožňuje porovnávat vektory o stejné délce. Ve slovníku ale porovnáváme slova různých délek. Jak by se taková definice udělala obecně? Základní myšlenka je, že když máme dva vektory nestejné délky, tak ten delší zkrátíme. Pro zjednodušení zápisu budeme předpokládat, že všechny složky pocházejí z jedné množiny.

Mějme uspořádanou množinu $(A, \preceq)$ a uvažujme množinu $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A^n$. Nejprve definujeme ostrou relaci takto: Pro $(a_i)_{i=1}^m, (b_j)_{j=1}^n \in B$ nechť $k = \min(m, n)$. Platí $(a_i)_{i=1}^m \prec (b_j)_{j=1}^n$ právě tehdy, když buď $(a_i)_{i=1}^k \prec_L (b_i)_{i=1}^k$, nebo $(a_i)_{i=1}^k = (b_i)_{i=1}^k$ a $m < n$.

Pak standardním způsobem definujeme $(a_i)_{i=1}^m \preceq (b_j)_{j=1}^n$ jestliže buď $(a_i)_{i=1}^m \prec (b_j)_{j=1}^n$ nebo $(a_i)_{i=1}^m = (b_j)_{j=1}^n$.

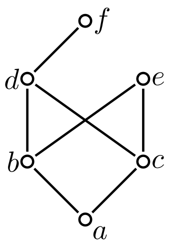
Tímto dostaneme částečné uspořádání na $B$. Není problém tuto definici převést na uspořádání pro řetězce, prostě se řetězce považují za vektory, například bereme *ahoj* jako $(a, h, o, j)$. Na abecedě máme přirozené částečné uspořádání a právě popsanou procedurou z něj dostaneme obvyklé slovníkové uspořádání, takže třeba auto$\preceq$autobus$\preceq$autobusek$\preceq$auvajs.

△

## Cvičení

**Cvičení 4c.1** (rutinní): Najděte dva neporovnatelné prvky v $A = \{2, 4, 6, 8\}$ uspořádané dělitelností a v $(P(\{\diamond, \bullet, \odot\}), \subseteq)$.

**Cvičení 4c.2** (rutinní): Uvažujte uspořádanou množinu danou následujícím Hasseovým diagramem.



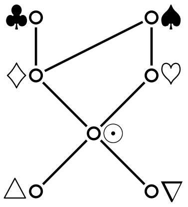

Najděte maximum, minimum, největší a nejmenší prvek množiny $M = \{a, b, c, d, e\}$, pokud existují.

**Cvičení 4c.3** (rutinní): Uvažujte uspořádanou množinu $(\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}, |)$, tedy relace dělitelnosti.
(i) Nakreslete její Hasseův diagram.
(ii) Najděte její maxima, minima, největší a nejmenší prvek, pokud existují.
(iii) Najděte maxima, minima, největší a nejmenší prvek podmnožiny $M = \{3, 9, 15\}$, pokud existují.

**Cvičení 4c.4** (rutinní)**:** Uvažujte množinu množin $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}$ uspořádanou relací býti podmnožinou (viz cvičení 4b.8).
(i) Najděte maximum, minimum, největší a nejmenší prvek množiny $M = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$, pokud existují.
(ii) Najděte nějaké lineární rozšíření $(A, \subseteq)$.

**Cvičení 4c.5** (rutinní)**:** Nakreslete Hasseův diagram nějaké konečné uspořádané množiny, která
(i) nemá největší prvek, má nejmenší prvek;
(ii) má největší prvek, nemá nejmenší prvek;
(iii) nemá největší prvek, nemá nejmenší prvek.

**Cvičení 4c.6** (rutinní)**:** Uvažujte uspořádání dané následujícím Hasseovým diagramem. Najděte nějaké jeho lineární rozšíření.




**Cvičení 4c.7** (rutinní)**:** Uvažujme částečně uspořádanou množinu $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$, jejíž uspořádání je dáno následujícím odvozeným ostrým uspořádáním: $p_4 \prec p_7$, $p_6 \prec p_7$, $p_5 \prec p_6$, $p_2 \prec p_6$, $p_1 \prec p_4$, $p_2 \prec p_4$, $p_3 \prec p_4$, $p_1 \prec p_2$ a $p_3 \prec p_2$.
Sestavte Hasseův diagram pro tuto uspořádanou množinu.

**Cvičení 4c.8** (rutinní)**:** Uvažujte množinu $A = \{2, 3, 10, 30, 60, 90\}$ uspořádanou relací dělitelnosti $a \,|\, b$. Najděte nějaké její lineární rozšíření.

**Cvičení 4c.9** (rutinní)**:** Uvažujte množinu vektorů $A = \{(3,23), (13,23), (23,3), (23,13), (23,23)\}$ uspořádanou součinovým uspořádáním založeným na $\geq$, tedy $(u,v) \preceq (x,y)$ jestliže $u \geq x$ a $v \geq y$. Najděte nějaké její lineární rozšíření.

**Cvičení 4c.10** (rutinní)**:** Která z následujících množin je dobře uspořádaná?
(i) $(\{n \in \mathbb{Z};\ n \geq -13\}, \leq)$;
(ii) $(\{n \in \mathbb{Z};\ n > -13\}, \leq)$;
(iii) $(\{n \in \mathbb{Z};\ n > -13\}, \geq)$;
(iv) $(\{n \in \mathbb{Z};\ n \text{ sudé}\}, \leq)$;
(v) $(\mathbb{Q}, \leq)$;
(vi) $(\mathbb{Q}^+, \leq)$;
(vii) $(\{x \in \mathbb{Q}^+;\ x = \frac{p}{q},\ p,q \in \mathbb{N},\ q < 100\}, \leq)$.

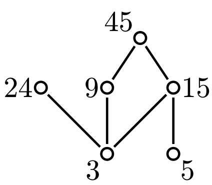
**Cvičení 4c.11** (rutinní)**:** Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Dokažte, že $\preceq$ je lineární právě tehdy, když je $\preceq^{-1}$ lineární.

**Cvičení 4c.12** (rutinní)**:** Nechť $A = \{a, b, c\}$, uspořádejme ji podle abecedy. Uvažujte $A \times A$ s lexikografickým uspořádáním. Najděte všechny prvky z $A \times A$, které jsou vzhledem k lexikografickému uspořádání
(i) menší než $(a,c)$; (ii) větší než $(a,c)$; (iii) menší než $(b,b)$.

**Cvičení 4c.13** (rutinní)**:** Uspořádejte podle lexikografického uspořádání binární řetězce 0, 01, 11, 001, 010, 011, 0001, 0101.

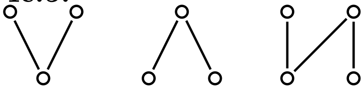
**Cvičení 4c.14** (rutinní)**:** (i) Nakreslete Hasseův diagram pro $(\{1,2,3\}, \leq)^2$ v lexikografickém uspořádání.
(ii) Nakreslete Hasseův diagram pro $(\{1,2,3\}, \leq)^2$ v součinovém uspořádání („po složkách“).

**Řešení:**
**4c.1:** Třeba 4 a 6. Třeba $\{\bullet\}$ a $\{\odot\}$.
**4c.2:** Max $d, e$, největší neex., min $a$, nejmenší $a$.
**4c.3:**
(ii): Max 24,45, největší neex., min 3,5, nejmenší neex.
(iii): Max 9,15, největší neex., min 3, nejmenší 3.

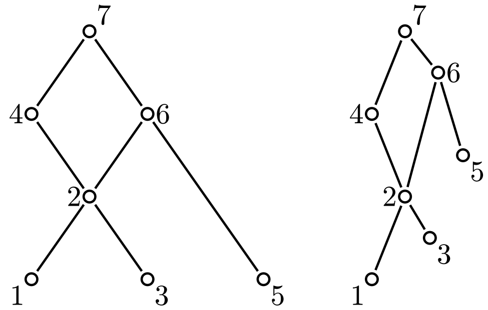



**4c.4:** (i): Max $\{1,2,3,4\}$, největší $\{1,2,3,4\}$, min $\{1\}$, $\{2\}$, nejmenší neex.
(ii): Třeba $\emptyset \prec_L \{1\} \prec_L \{2\} \prec_L \{1,2,4\} \prec_L \{1,2,3\} \prec_L \{1,2,3,4\} \prec_L \{1,2,3,4,5\}$.

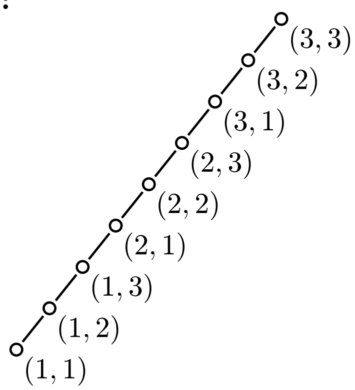
**4c.5:**



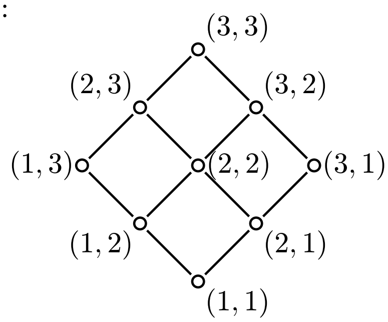
**4c.6:** Například $\triangle \prec_L \nabla \prec_L \odot \prec_L \diamondsuit \prec_L \heartsuit \prec_L \clubsuit \prec_L \spadesuit$ nebo $\nabla \prec_L \triangle \prec_L \odot \prec_L \heartsuit \prec_L \diamondsuit \prec_L \clubsuit \prec_L \spadesuit$ nebo ...
**4c.7:** Nalevo Hasseův diagram sestrojený dle algoritmu, napravo jeho topologická úprava, která odpovídá linearizaci v příkladu 4c.h.




**4c.8:** Například $3 \prec_L 2 \prec_L 10 \prec_L 30 \prec_L 90 \prec_L 60$ nebo $2 \prec_L 10 \prec_L 3 \prec_L 30 \prec_L 60 \prec_L 90$ nebo dle velikosti nebo ...
**4c.9:** Třeba $(23,23) \prec_L (23,13) \prec_L (23,3) \prec_L (13,23) \prec_L (3,23)$
nebo $(23,23) \prec_L (13,23) \prec_L (3,23) \prec_L (23,13) \prec_L (23,3)$
nebo $(23,23) \prec_L (13,23) \prec_L (23,13) \prec_L (3,23) \prec_L (23,3)$ nebo ...
**4c.10:** (i), (ii), (vii).
Re: (vii): V množině je omezená velikost jmenovatele, proto uvažované body nejsou husté, ale jednotlivé body množiny jsou od sebe vzdáleny. Protože $p,q > 0$, jde o kladná čísla a nemohou utéci do mínus nekonečna. Pro libovolné $K > 0$ je množina $\{(p,q) \in \mathbb{N}^2;\ q < 100 \wedge p \le Kq\}$ konečná, mezi odpovídajícími zlomky $\frac{p}{q}$ tedy vždy najdeme nejmenší.
**4c.11:** $\Longrightarrow$: Nechť $\preceq$ lineární. Zvolme $a,b \in A$. Pak $a \preceq b$ (potom $b \preceq^{-1} a$) nebo $b \preceq a$ (potom $a \preceq^{-1} b$), každopádně jsou $a,b$ porovnatelné pomocí $\preceq^{-1}$.
$\Longleftarrow$: Obdobně.
**4c.12:** (i): $(a,a),(a,b)$; (ii): $(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)$; (iii): $(a,a),(a,b),(a,c),(b,a)$.
**4c.13:** 0,0001,001,01,010,0101,011,11
**4c.14:**
(i):




(ii):




## 4d. Bonus: Další pojmy okolo uspořádání

Když jsme hledali nejmenší a největší prvky, měli jsme dva problémy. Jednou překážkou byl nedostatek vzájemné porovnatelnosti, ten jsme vyřešili pojmem lineárního zobrazení. Druhý problém nastal, když nám množina „utíkala“ jako třeba $\mathbb{Z}$ při porovnávání pomocí $\le$. Zatím jsme to řešili tak, že jsme se omezili na konečné množiny, teď utíkání zkusíme obecně pojmenovat a pak zakázat; uvídíme, jestli dostaneme něco rozumného.

**Definice.**
Nechť $(A,\preceq)$ uspořádaná množina. Řekneme, že je **fundovaná** (**well-founded**), jestliže neexistuje „nekonečná klesající posloupnost“, tj. nekonečná posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ prvků z $A$ taková, že $a_{i+1} \prec a_i$ pro všechna $i$.

Problémem pro fundovanost jsou tedy posloupnosti typu $a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ \cdots \succ a_i \succ a_{i+1} \succ \cdots$. Pomocí tranzitivity dostáváme, že pro všechna $j > i$ máme $a_j \prec a_i$, ostrá nerovnost také znamená, že jde o navzájem různé prvky. U konečných množin nekonečně mnoho různých prvků nemáme, z toho hned vyplývá, že konečné uspořádané množiny jsou automaticky fundované.

Není pravda, že pokud zabráníme takovým posloupnostem, tak automaticky dostáváme existenci nejmenších prvků, tedy dobré uspořádání, protože může zlobit ta porovnatelnost.

**Příklad 4d.a:** Uvažujme uspořádanou množinu $(\mathbb{Z}, \preceq)$, kde $x \preceq y$ jestliže $x = y$ nebo $|x| < |y|$.
Tvrdíme, že je to částečné uspořádání, které je well-founded, ale není lineární, tím spíše ne dobré.
Reflexivita je jasná, tranzitivita v zásadě také, jak je na tom antisymetrie? Předpokládejme, že $x \preceq y$ a $y \preceq x$. Kdyby nebylo $x = y$, tak by z definice muselo platit $|x| < |y|$ a $|y| < |x|$, což není možné. Máme tedy uspořádání.
Uvažujme teď nějakou nekonečnou posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ ze $\mathbb{Z}$ takovou, že $a_{i+1} \preceq a_i$ pro všechna $i$. Tvrdíme, že nemůže nastat případ, že by všechna ta srovnání byla ostrá, tedy $\prec$. Uvažujme množinu $M = \{|a_i|;\ i \in \mathbb{N}\}$. To je neprázdná podmnožina $\mathbb{N}_0$, což je vzhledem k $\leq$ dobře uspořádaná množina. Existuje tedy $j$ takové, že $|a_j|$ je nejmenší prvek z $M$. To znamená, že $|a_j| \leq |a_i|$ pro všechna $i$. Tvrdíme, že $a_i = a_j$ pro všechna $i > j$.
Z tranzitivity máme pro $i > j$ relaci $a_i \preceq a_j$, teď jsou dvě možnosti. Jedna je $|a_i| < |a_j|$, ale to nejde, takže musí platit ta druhá, $a_i = a_j$.
Dokázali jsme, že $(\mathbb{Z}, \preceq)$ nemá nekonečné klesající posloupnosti, je tedy fundovaná.
Proč není lineárně uspořádaná? Protože třeba prvky 13 a $-13$ tímto uspořádáním neumíme porovnat.
△

Dobré uspořádání je definováno pomocí existence nejmenších prvků. Pro fundovaná uspořádání existuje alternativní charakterizace podobného typu.

**Věta 4d.1.**
Nechť je $(A, \preceq)$ částečně uspořádaná množina. Toto uspořádání je fundované právě tehdy, když pro každou neprázdnou podmnožinu $M \subseteq A$ existuje $\min(M)$.

**Důkaz** (poučný, náznak)**:** 1) $\Longrightarrow$: Předpokládejme, že $\preceq$ je fundované. Nechť $M$ je neprázdná podmnožina $A$. Vezměme libovolné $a_1 \in M$. Pokud je to minimální prvek, jsme hotovi. Pokud ne, musí existovat $a_2 \in M$ splňující $a_2 \prec a_1$. Pokud je to minimální prvek, jsme hotovi. Pokud ne, musí existovat $a_3 \in M$ splňující $a_3 \prec a_2$. Pokračujeme tak dále, a protože není možná nekonečná klesající posloupnost, tak se tento proces musí zastavit, tedy najdeme minimální prvek $M$.
2) $\Longleftarrow$: Fundovanost dokážeme sporem. Nechť existuje nekonečná klesající posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$. Označme $M = \{a_i;\ i \in \mathbb{N}\}$. To je neprázdná podmnožina $A$, proto podle předpokladu existuje její minimální prvek, třeba $a_i$. Máme $a_{i+1} \in M$, z minimality $a_i$ proto $a_i \preceq a_{i+1}$, což je ale ve sporu s $a_{i+1} \prec a_i$, viz Lemma 4b.4 (ii).
□

Možná máte pocit, že slova „proces musí zastavit“ nejsou zrovna korektním matematickým vyjádřením. A máte pravdu, korektní důkaz se musí dělat podrobněji a je citelně delší, dokonce dojde na axiom výběru, takže je to úrovní znatelně výš než toto skriptum. Však jsme v úvodu důkazu vyhrožovali, že je to jen náznak. Ten základní nápad ale myslím stál za přečtení, s podobnou myšlenkou se ještě potkáme v kapitole o indukci.

Teď ukážeme, že když se postaráme o porovnatelnost a zakážeme utíkání, už nejmenší prvky najdeme.

**Věta 4d.2.**
Uvažujme částečně uspořádanou množinu $(A, \preceq)$.
Tato množina je dobře uspořádaná právě tehdy, když je lineárně uspořádaná a fundovaná.

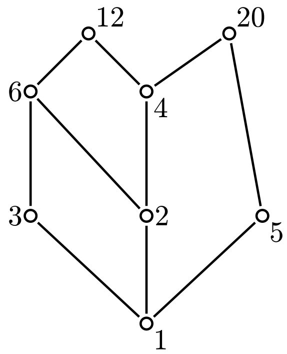
**Důkaz** (poučný)**:** 1) $\Longrightarrow$: Podle Faktu 4c.13 víme, že dobře uspořádané množiny jsou automaticky lineárně uspořádané, tedy pro všechny neprázdné podmnožiny poskytují nejmenší prvky, což jsou podle Věty 4c.2 (iii) minima.
2) $\Longleftarrow$: Nechť $M$ je neprázdná podmnožina $A$. Podle předchozí věty nám fundovanost dává minimální prvek této množiny. Protože je uspořádání lineární, tak je podle Věty 4c.7 toto minimum i nejmenším prvkem.
□

Pojem fundovanosti se dá použít i pro relace, které nejsou částečnými uspořádáními. Zejména populární je tento pojem pro ostrá uspořádání neboli přímo pro relace typu $\prec$, viz Věta 4b.5. Zajímavou souvislost s indukcí lze nalézt v poznámce za Větou 5a.13.

Kromě maxim, nejmenších prvků a podobně jsou ještě další příbuzné pojmy. Toto je již mimo rámec skripta, protože tím začíná samostatný obor, tak jen naznačíme pár věcí jako lákadlo.

**Definice.**
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina, $M$ je její neprázdná podmnožina.
Prvek $m \in A$ se nazývá **horní mez** (**upper bound**) množiny $M$, jestliže $x \preceq m$ pro všechna $x \in M$.
Prvek $m \in A$ se nazývá **dolní mez** (**lower bound**) množiny $M$, jestliže $m \preceq x$ pro všechna $x \in M$.

**Příklad 4d.b:** Uvažujme množinu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 20\}$ uspořádanou dělitelností (viz příklad 4b.f). Měli jsme pro ni následující Hasseův diagram.




Podívejme se na množinu $M = \{4, 5, 6\}$. Číslo 1 dělí všechna čísla z $M$, je tedy dolní mez $M$. Neexistuje ale číslo z $A$ takové, že by jej dělila všechna čísla z $M$, proto tato množina nemá horní mez.
△

V Hasseově diagramu hledáme dolní meze tak, že vyjdeme ze všech prvků $M$ po spojnicích dolů a čekáme, zda se někde všechny cesty sejdou. Při hledání horní meze naopak hledáme prvek, ve kterém by se sešly cesty z prvků $M$ směrem nahoru.

Jak vidíme, existence mezí není zaručena, na druhou stranu jich může existovat i více. Je zde důležité si všimnout jednoho podstatného rozdílu oproti minimům a spol., při hledání mezí se díváme i mimo množinu $M$, tudíž již záleží na tom, jaká je nadmnožina, ve které pracujeme. Například v předchozím příkladě jsme nenašli horní mez, ale kdybychom tutéž množinu $M$ uvažovali třeba v uspořádané množině $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 20, 60\}, |)$, tak už by prvek 60 byl horní mezí pro $\{4, 5, 6\}$. Nelze tedy aplikovat trik, který nám celou dobu věrně sloužil, že stačí pracovat s uspořádanými množinami a umíme to již i s podmnožinami.

**Příklad 4d.c:** Uvažujme množinu $(\mathbb{N}, \leq)$. Pak libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$ splňující $n > 13$ je horní mezí množiny $M = \{3, 13\}$.
△

**Fakt 4d.3.**
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina a $M$ její neprázdná podmnožina.
Jestliže je $m$ největší prvek $M$, pak je to i jeho horní mez.
Jestliže je $m$ nejmenší prvek $M$, pak je to i jeho dolní mez.

Důkaz je jasný, například nejmenší prvek $m$ splňuje $m \preceq x$ pro všechna $x \in M$, což je přesně definice dolní meze. Souvislost mezi těmito dvěma pojmy lze vidět i jinak.

**Fakt 4d.4.**
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina a $M$ její neprázdná podmnožina.
Horní mez množiny $M$ existuje právě tehdy, pokud existuje nějaká nadmnožina $N \subseteq A$ množiny $M$ taková, že $N$ má největší prvek.
Dolní mez množiny $M$ existuje právě tehdy, pokud existuje nějaká nadmnožina $N \subseteq A$ množiny $M$ taková, že $N$ má nejmenší prvek.

**Důkaz** (poučný)**:** Dokážeme první tvrzení, druhé funguje symetricky.
1) Jestliže je $m$ horní mez množiny $M$, pak uvažujme $N = M \cup \{m\}$. Protože je $m$ horní mezí, platí $x \preceq m$ pro všechna $x \in M$, také $m \preceq m$, proto $x \preceq m$ pro všechna $x \in N$, také $m \in N$, tedy $m$ je největší prvek $N$.
2) Naopak nechť existuje množina $N$ taková, že $M \subseteq N$ a $N$ má největší prvek $m$. Pak pro libovolné $x \in M$ platí i $x \in N$ a $m$ je největší v $N$, tedy $x \preceq m$. $m$ je tedy horní mezí $M$.

□

Plyne z toho například to, že v konečných lineárně uspořádaných množinách vždy najdeme horní a dolní mez. Pokud horní a dolní meze existují, hledáme mezi nimi některé speciální.

**Definice.**
Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina, $M$ je její neprázdná podmnožina.
Jestliže existuje horní mez $M$, pak definujeme **supremum** množiny $M$, také zvané **nejmenší horní mez** (**least upper bound**), značeno $\sup(M)$ nebo $\mathrm{l.\,u.\,b.}(M)$, jako nejmenší prvek množiny $\{x \in A;\ x \text{ horní mez } M\}$, pokud existuje.
Jestliže existuje dolní mez $M$, pak definujeme **infimum** množiny $M$, také zvané **největší dolní mez** (**greatest lower bound**), značeno $\inf(M)$ nebo $\mathrm{g.\,l.\,b.}(M)$, jako největší prvek množiny $\{x \in A;\ x \text{ dolní mez } M\}$, pokud existuje.

Podobně jako u mezí, existuje-li největší prvek množiny $M$, pak je jejím supremem, symetricky nejmenší prvek je infimem. Proto nám linearita uspořádání zaručí existenci infim a suprem pro konečné množiny, jinak ale nemusí existovat.

**Příklad 4d.d:** Uvažujme $(\mathbb{N}, \leq)$. To je dokonce dobře uspořádaná množina, ale množina $M$ sudých přirozených čísel nemá ani horní mez, ani supremum.

**Příklad 4d.e:** Uvažujme množinu $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$ uspořádanou inkluzí. Nechť $\mathcal{M} = \{\{a\}, \{b\}\}$ je její podmnožina. Pak má tato množina horní meze $\{a, b, c\}$ i $\{a, b, d\}$, protože obě množiny z $\mathcal{M}$ jsou podmnožinami těchto dvou, ale $\mathcal{M}$ nemá supremum, protože ony dvě horní meze jsou neporovnatelné a tudíž neumíme najít nejmenší prvek množiny $\{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$.
△

Pro množiny, u kterých hledání suprem a infim není až tak velký problém, máme speciální jméno.

**Definice.**
Uvažujme uspořádanou množinu $(A, \preceq)$. Řekneme, že je to **svaz** (**lattice**), jestliže pro všechna $x, y \in A$ existují $\sup(\{x, y\})$ and $\inf(\{x, y\})$.

**Příklad 4d.f:** Množina $A = \{1, 2, 3, 4\}$ uspořádaná dělitelností není svaz, protože například $M = \{2, 3\}$ nemá v $A$ ani horní mez, natož supremum.
△

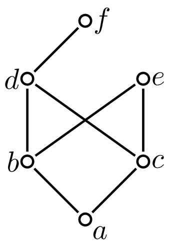
**Příklad 4d.g:** Nechť $U$ je množina, uvažujme $(P(U), \subseteq)$. Tato uspořádaná množina je svaz.
Stačí si rozmyslet, že jsou-li dány $M, N \in P(U)$, tedy jsou to podmnožiny $U$, pak $\inf(\{M, N\}) = M \cap N \in P(U)$ a $\sup(\{M, N\}) = M \cup N \in P(U)$.
Zkusíme třeba to infimum. Evidentně $M \cap N \subseteq M$ a $M \cap N \subseteq N$, takže je to dolní mez. Je největší? Nechť $P$ je jiná dolní mez. Pak splňuje $P \subseteq M$ a $P \subseteq N$, proto i $P \subseteq M \cap N$, což jsme přesně potřebovali.
△

**Příklad 4d.h:** Množina $\mathbb{N}$ uspořádaná dělitelností je svaz, $\sup(\{x, y\})$ najdeme jako nejmenší společný násobek, $\inf(\{x, y\})$ jako největší společný dělitel.
△

Svazy mají svou vlastní teorii a používají se třeba v práci s Booleovými algebrami či namátkou při modelování bezpečných informačních toků, kdy se zavádí uspořádání na různých stupních oprávnění.

## Cvičení

**Cvičení 4d.1** (rutinní)**:** Uvažujte uspořádanou množinu danou následujícím Hasseovým diagramem.




Najděte pro množinu $M = \{b, c\}$ její horní meze a supremum, dolní meze a infumum, pokud existují.

**Cvičení 4d.2** (rutinní)**:** Uvažujte množinu množin $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}$ uspořádanou relací býti podmnožinou (viz cvičení 4b.8).
Pro $\mathcal{M} = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ najděte horní meze a supremum, dolní meze a infimum, pokud existují.

**Řešení:**
**4d.1:** Horní meze $d, e, f$, supremum neex., dolní mez $a$, infimum $a$.
**4d.2:** Horní meze $\{1,2,3,4\}$ a $\{1,2,3,4,5\}$, supremum $\{1,2,3,4\}$, dolní meze $\emptyset$, $\{1\}$ a $\{2\}$, infimum neex.