9. Posloupnosti a součty, řady

Posloupnosti se tradičně studují v matematické analýze, nám se ale budou některé pojmy a výsledky hodit i zde. Uvedeme si proto poznatky relevantní pro diskrétní matematiku, ale často je jen zacitujeme, protože některé důkazy by bez analytických metod byly těžké až nemožné. Tam kde to rozumně jde, důkazy provedeme, ale čtenáři určitě pomůže, když už bude něco z analýzy znát. Na druhou stranu tady o posloupnostech probereme věci, které se v typických kursech diferenciálního počtu nedělají, ale velice se hodí v computer science.

9a. Posloupnosti

Posloupnosti jsou užitečným vyjadřovacím nástrojem v situacích, kdy nám přicházejí čísla jedno po druhém a je potřeba je zpracovat. Začneme formální definicí, ale rychle od ní utečeme k užitečnější představě.

! **Definice.**
Posloupnost je libovolné zobrazení z nějaké množiny $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$ do $\mathbb{R}$, kde $n_0 \in \mathbb{Z}$.

By a **sequence** we mean any mapping from a set $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$ into $\mathbb{R}$, where $n_0 \in \mathbb{Z}$.

! Takto se posloupnosti definují tadičně, protože se potřebujeme odkázat na nějakou známou matematickou strukturou. V praxi je ovšem chápeme jinak.

Vezměme si nějaké takové zobrazení T. U posloupností jsou podstatné především hodnoty, což jsou čísla $T(n_0)$, $T(n_0+1)$, $T(n_0+2)$, ... Takže ten správný pohled na posloupnost je, že jde o reálná čísla jdoucí jedno za druhým (pořadí je důležité), bude jednodušší si je prostě značit jako a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, ...

Budeme tedy posloupnosti zapisovat jako $\{a_k\}_{k=n_0}^{\infty}$, někdy jen $\{a_k\}$. Není to množina, ale uspořádaná množina, což znamená, že na pořadí záleží a mohou se opakovat prvky. Jedno a_k značí **člen** posloupnosti.

Někteří autoři pro zvýraznění uspořádanosti používají značení $(a_k)_{k=n_0}^{\infty} = (a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots)$, které pěkně naznačuje, že jde do značné míry o zobecnění vektorů na situaci s nekonečně mnoha souřadnicemi, ale zdá se, že je méně rozšířené, proto se budeme držet složených závorek.

! **Příklad 9a.a:** Uvažujme posloupnost danou formálně $T(n) = (-1)^n$ pro $n \geq 0$. Její hodnoty jsou $T(0) = (-1)^0 = 1$, $T(1) = (-1)^1 = -1$, $T(2) = (-1)^2 = 1$, ..., takže je to posloupnost $\{1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$. Tuto posloupnost jsme zadali jako zobrazení, abychom viděli, jak by se to dělalo, ale normálně by se zadala jinak. Možností je více, nejtypičtější je předpis $\{(-1)^k\}_{k=0}^{\infty}$, někdy se používá i předpis „$a_k = (-1)^k$ pro $k \geq 0$“, pak tedy $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, ...

Této posloupnosti se říká **alternující posloupnost**.
△

! Když posloupnost zadáme předpisem pro její k-tý člen, říkáme tomu **explicitní definice** posloupnosti. Níže ještě ukážeme definici rekurzí. Je důležité poznamenat, že u posloupnosti jsou důležité hodnoty, takže na zápise až tak nezáleží. Asi nepřekvapí, že zápisy $\{(-1)^k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{(-1)^i\}_{i=0}^{\infty}$ nebo třeba $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ dávají totéž, ale flexibilita zápisu jde ještě dále.

Podívejme se na následující posloupnosti:
$a_n = 2n + 13$, $n \geq -6$ dává posloupnost $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$, zatímco
$b_n = 2n - 1$, $n \geq 1$ dává posloupnost $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$, čili je to tatáž posloupnost, i když vzorce vypadají jinak. Můžeme si tedy dovolit vzoreček pro posloupnost různě měnit, hlavní je, aby hodnoty zůstávaly stejné. Často bývá jeden určitý zápis lepší z hlediska praktických výpočtů. Tím se vracíme k tomu, že posloupnost je určena svými členy, vzoreček je jen pohodlný způsob, jak ty členy určit, ale není tím podstatným.

Často se posloupnosti „zadají“ tím, že se napíše několik prvních členů a pak se předpokládá, že posloupnost pokračuje „stejným způsobem“. My budeme částečný výpis členů používat jen pro ilustrační účely, protože nám například $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ či $\{1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$ umožňují získat o dotyčné posloupnosti dobrou představu, ale nebudeme takto posloupnosti definovat. Ono totiž není jasné, co to je ten „stejný způsob“.

! **Příklad 9a.b:** Uvažujme posloupnost začínající $\{-6, 6, -6, 6, \dots\}$. Jaká je to posloupnost? Uvažujme následující vzorce:

• $a_k = 6 \cdot (-1)^k$ pro $k = 1, 2, \dots$ neboli $\{6 \cdot (-1)^k\}_{k=1}^{\infty}$ dává $\{-6, 6, -6, 6, -6, 6, \dots\}$. Toto si asi lidé představí jako „stejné pokračování“.

Je ovšem také možné použít třeba $a_k = 6 \cdot (-1)^k$ pro $k = 13, 14, 15, \dots$, dostáváme stejnou posloupnost, jen jiným zápisem.

• $b_k = 8k^3 - 12k^2 - 8k + 6$ pro $k = -1, 0, 1, \dots$ neboli $\{8k^3 - 12k^2 - 8k + 6\}_{k=-1}^{\infty}$ dává $\{-6, 6, -6, 6, 90, 294, \dots\}$. I toto je přirozené pokračování, protože z matematického pohledu není polynom nijak horší než mocnina $6 \cdot (-1)^k$.

• $c_k = \begin{cases} -6(k/2)!, & k \text{ sudé;} \\ 6, & k \text{ liché} \end{cases}$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$. Pak máme $\{-6, 6, -6, 6, -12, 6, \dots\}$.

Dá se vymyslet nekonečně mnoho vzorečků, které dávají různé posloupnosti začínající stejně, členy $-6, 6, -6, 6$. Z matematického hlediska je tedy oblíbená otázka z testů inteligence „jaký je další člen“ poněkud srandovní, z pohledu posloupností je správných řešení nekonečně mnoho.

Pro naši teorii z toho vyplývá jednoznačný závěr, že definovat posloupnosti vypsáním „začátku“ není možné.

△

! Pro účely diskrétní matematiky se vyplatí definovat také **konečné posloupnosti** $\{a_k\}_{k=n_0}^{m_0}$. Ty pak slouží jako jeden z možných matematických modelů pro řetězce znaků čili slova. Vzhledem k tomu, že u počítačů pracujeme výhradně s konečnými řetězci znaků, má vůbec smysl zabývat se nekonečnými posloupnostmi? Ano, ze dvou důvodů. Za prvé, jsou situace, kdy nevíme dopředu, kolik znaků budeme mít ke zpracování. Je pak možné pracovat s množinou konečných posloupností všech možných délek, ale prodloužením na nekonečné posloupnosti si někdy ušetříme formální komplikace například u operací.

Druhý důvod je ten, že nás často zajímá otázka dlouhodobých trendů, pak nám přechod na nekonečné posloupnosti nabízí mocné nástroje.

Je evidentní, že představa posloupnosti jako nekonečného sledu objektů je velice obecná, například asi bude užitečné uvažovat posloupnosti znaků nějaké abecedy. Naše nástroje však fungují hlavně na posloupnosti s číselnými členy, na ty se tu zaměříme. Začneme tím, že si představíme několik základních posloupností, které se často vyskytují.

Příklad 9a.c: Jedna z nejslavnějších posloupností je ta, která se v Evropě objevila v roce 1202 v knize Liber abaci čili Kniha o počítání, díky které se do Evropy dostal indo-arabský systém zápisu čísel. Její autor, snad nejlepší středověký matematik zvaný Fibonacci, se v ní zmínil také o posloupnosti zadané následujícím induktivním předpisem:

(0) $F_1 = 1$, $F_2 = 1$.

(1) Pro $n \geq 2$ je $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Někdy se ještě dává $F_0 = 0$. Této posloupnosti se říká Fibonacciho posloupnost (a jejím členům Fibonacciho čísla, $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$). V kapitole o rekurzivních vztazích (viz příklad) si povíme víc o tom, jak k ní přišel, zmínku si ale zaslouží, že již před 6. stoletím n.l. ji používali hindští učenci při práci s přízvuky v poezii.

Rekurzivní zadávání posloupností je velice populární a z kapitoly o indukci víme, že je to korektní způsob. Pro praktické použití ale bývá často nepříjemný a dáváme přednost přepisu do explicitního vyjádření. Problémem je, jak jej najít, ne vždy to umíme, někdy to dokonce ani není možné. Částečně se tomu budeme věnovat právě v kapitole o rekurentních vztazích. Pro Fibonacciho posloupnost tam odvodíme vzorec, jehož správnost teď dokážeme, jak jinak než indukcí, jmenovitě její modifikovanou verzí s návratem o dva kroky.

Tvrdíme, že vzorec $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\bigr)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\bigr)^n$ splňuje podmínky (0) a (1).

(0): $f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 = F_1$;

$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\bigr)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\bigr)^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{6-2\sqrt{5}}{4} = 1 = F_2$.

(1) Zvolíme libovolné $n \geq 2$ a předpokládáme, že F_n a F_{n-1} jsou opravdu dány příslušným vzorcem, tedy $F_n = f_n$ a $F_{n-1} = f_{n-1}$. Pak podle definice F_{n+1} a indukčního předpokladu dostaneme

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} = f_n + f_{n-1} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\bigr)^n - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\bigr)^n + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\bigr)^{n-1} - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\bigr)^{n-1} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\bigr)^{n-1}\bigl[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\bigr] - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\bigr)^{n-1}\bigl[\tfrac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\bigr] = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\bigr)^{n-1}\tfrac{3+2\sqrt{5}}{2} - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\bigr)^{n-1}\tfrac{3-2\sqrt{5}}{2} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\bigr)^{n-1}\tfrac{6+4\sqrt{5}}{2} - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\bigr)^{n-1}\tfrac{6-4\sqrt{5}}{2} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\bigr)^{n-1}\bigl(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\bigr)^2 - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\bigr)^{n-1}\bigl(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\bigr)^2 \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\bigr)^{n+1} - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\bigl(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\bigr)^{n+1} = f_{n+1}. \end{aligned}$$

Uf. Takže to funguje.

Ještě se k této posloupnosti vrátíme, viz příklad či příklad , také příklad .

△

! **Definice.**
Uvažujme posloupnost $\{a_k\}_{k=n_0}^{\infty}$.
Řekneme, že je to **aritmetická posloupnost** (**arithmetic sequence**), jestliže existují $a, d \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $a_k = a + dk$ pro všechna $k = n_0, n_0 + 1, \dots$
Řekneme, že je to **geometrická posloupnost** (**geometric sequence**) jestliže existují $a, q \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $a_k = aq^k$ pro všechna $k = n_0, n_0 + 1, \dots$.

! **Příklad 9a.d:** Posloupnost $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ všech lichých přirozených čísel je aritmetická, protože se dá zapsat jako $a_k = 2k + 1$ pro $k \in \mathbb{N}_0$.

Konstantní posloupnost $\{1, 1, 1, 1, \dots\}$ je aritmetická, protože se dá zapsat jako $a_k = 0k + 1$ pro $k \in \mathbb{N}_0$. Je ovšem také geometrická, protože se dá zapsat jako $a_k = 1^k$ pro $k \in \mathbb{N}_0$.

Alternující posloupnost z úplně prvního příkladu je také geometrická.

$\triangle$

Bývá tradiční indexovat tyto posloupnosti od nuly. Nikterak se tím neomezujeme, každou aritmetickou a geometrickou posloupnost lze takto upravit. Například posloupnost $\{13^7, 13^8, 13^9, \dots\}$ je přirozené zapsat jako $a_k = 13^k$ pro $k \geq 7$ a v mnoha situacích to bude nejlepší. Jsou ale situace (v kapitole), kdy potřebujeme indexování od nuly, pak použijeme třeba toto: Číslo $a = 13^7$ se dá vytknout ze všech členů, pak vidíme, že naši posloupnost popisuje také vzorec $b_k = 13^7 \cdot 13^k$ pro $k \in \mathbb{N}_0$.

Obecně lze psát u aritmetické posloupnosti $a_k = (a + n_0 d) + d(k - n_0)$, u geometrické zase $a_k = (aq^{n_0})q^{k-n_0}$ a zavedením nového indexu $n = k - n_0$ už indexujeme od nuly.

Jak už jsme naznačili, v mnoha situacích nezáleží na začátku indexace, pak ji nebudeme uvádět a píšeme $\{a_k\}_k$, popřípadě jen $\{a_k\}$ (když ve vzorci nebude jiné písmenko, takže bude index jasný). Budeme používat frázi „pro všechna k“ a myslet tím „pro všechna k z množiny indexů dotyčné posloupnosti“.

Aritmetické a geometrické posloupnosti poznáme snadno.

! **Fakt 9a.1.**
Uvažujme posloupnost $\{a_k\}_k$.
Je to geometrická posloupnost právě tehdy, když existuje $q \in \mathbb{R}$ takové, že $\frac{a_{k+1}}{a_k} = q$ pro všechna k.
Je to aritmetická posloupnost právě tehdy, když existuje $d \in \mathbb{R}$ takové, že $a_{k+1} - a_k = d$ pro všechna k.

Například lichá čísla mají mezi sebou vždy rozdíl 2, proto tvoří aritmetickou posloupnost. Když je ale postupně dělíme, $\frac{3}{1}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{5}$, ... , tak nedostáváme totéž, není to proto posloupnost geometrická. Naopak v tom příkladě s 13^k máme vždy $\frac{13^8}{13^7} = 13$, $\frac{13^9}{13^8} = 13$, $\frac{13^{10}}{13^9} = 13$, ... , je to tedy posloupnost geometrická.

! Tento fakt nás inspiruje k následujícím ekvivalentním definicím:.

Rekurzivní definice aritmetické posloupnosti:

(0) $a_0 = a$.

(1) $a_{k+1} = a_k + d$ pro $k \in \mathbb{N}_0$.

Rekurzivní definice geometrické posloupnosti:

(0) $a_0 = a$.

(1) $a_{k+1} = a_k \cdot q$ pro $k \in \mathbb{N}_0$.

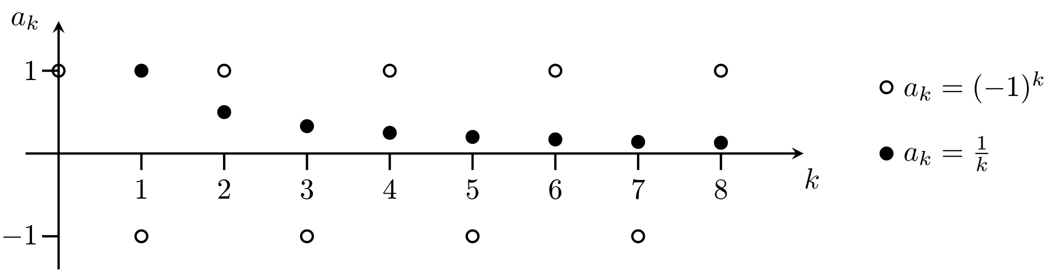
Snadno dokážeme indukcí, že tato definice souhlasí s naší původní definicí. Ukážeme to v rámci tréninku pro tu geometrickou, přesně řečeno dokážeme pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ vlastnost $V(k)$: k-tý člen takto rekurzivně dané posloupnosti splňuje $a_k = a_0 q^k$.

(0) $k = 0$: $a_0 = a_0 \cdot q^0$.

(1) Nechť $k \in \mathbb{N}_0$, předpokládáme $a_k = a_0 q^k$. Pak podle rekurzivní definice platí $a_{k+1} = a_k \cdot q = a_0 q^k \cdot q = a_0 q^{k+1}$. Důkaz hotov.

! Další důležité typy posloupností jsou posloupnosti s mocninami $\{k^a\}$, například $\{k^3\}_{k=1}^{\infty} = \{1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots\}$, a faktoriál jako posloupnost $\{k!\}_{k=1}^{\infty} = \{1, 2, 6, 24, 120, 720, \dots\}$.

Někdy pomůže si posloupnosti znázornit, jsou to vlastně zobrazení, čili máme k dispozici klasický graf. Na následujícím obrázku ukazujeme posloupnosti $\{(-1)^k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\left\{\frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$.



Vlastnosti, které dále probereme, jsou na takovém grafu pěkně vidět.

U posloupností se dá studovat mnoho vlastností. Z hlediska praktického použití je docela zajímavá monotonie. Porovnáváme každý člen posloupnosti s tím bezprostředně následujícím, tedy člen a_k s členem a_{k+1}.

! **Definice.**
Uvažujme posloupnost $\{a_k\}$. Řekneme, že je tato posloupnost
- **rostoucí** (**increasing**), jestliže $a_k < a_{k+1}$ pro všechna k;
- **klesající** (**decreasing**), jestliže $a_k > a_{k+1}$ pro všechna k;
- **neklesající** (**non-decreasing**), jestliže $a_k \le a_{k+1}$ pro všechna k;
- **nerostoucí** (**non-increasing**), jestliže $a_k \ge a_{k+1}$ pro všechna k;
- **monotonní** (**monotone**), jestliže splňuje jednu z vlastností výše;
- **ryze monotonní** (**strictly monotone**), jestliže je rostoucí nebo klesající.

Základní pojmy jsou rostoucí a klesající, které nutí posloupnost jít buď pořád nahoru, nebo pořád dolů (proto je v definici obecný kvantifikátor, kontrolujeme všechny dvojice, aby nám někde posloupnost neposkočila špatným směrem). Druhé dva pojmy rovněž nutí posloupnost jít stále jedním směrem, ale (někdy) také může zůstat stějná. Podíváme-li se na naše příklady, tak jsou skoro všechny monotonní, buď rostoucí (lichá čísla, 13^k) nebo klesající (viz $\frac{1}{k}$), měli jsme i konstantní posloupnost, která je zároveň nerostoucí i neklesající. Jedinou výjimkou je hned první příklad alternující posloupnosti, ta monotonní není.

Příklad 9a.e: Vyšetříme monotonii posloupnosti $\left\{\frac{1}{2k-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$. První členy jsou $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots\right\}$, máme tedy podezření, že klesá. Dokážeme, že posloupnost $\left\{\frac{1}{2k-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ je klesající, podle definice.

Vezměme libovolné $k \in \mathbb{N}$. Platí $a_k > a_{k+1}$? Vyzkoušíme:

$$a_k > a_{k+1} \iff \frac{1}{2k-1} > \frac{1}{2(k+1)-1} \iff \frac{1}{2k-1} > \frac{1}{2k+1} \iff 2k+1 > 2k-1 \iff 2 > 0,$$

což je pravda. Všechny kroky v této úvaze jsou ekvivalentní, je tedy možné zpětně z pravdivého $2 > 0$ odvodit $a_k > a_{k+1}$, což dokazuje, že daná posloupnost je opravdu klesající. Mimochodem, všimněte si, že v důkazu jsme použili kladnost k, bez této znalosti by nešlo přejít od $\frac{1}{2k-1} > \frac{1}{2k+1}$ k $2k+1 > 2k-1$.
△

Poznamenejme, že v definici monotonie se testuje pro všechna k, čili to je zrovna případ, kdy záleží na tom, kde s indexy začneme. Například posloupnost $\{k^2 - 5k + 5\}_{k=1}^{\infty} = \{1, -1, -1, 1, 5, 11, 19, \dots\}$ není monotonní, protože na začátku klesne (tudíž nemůže být rostoucí či neklesající), a později zase vzroste (takže nemůže být ani klesající či nerostoucí). U stejného vzorce ale můžeme začít později, pak $\{k^2 - 5k + 5\}_{k=2}^{\infty}$ už je neklesající a $\{k^2 - 5k + 5\}_{k=3}^{\infty}$ je rostoucí.

! Dalším důležitým pojmem je limita. Odpovídá na otázku, co se s členy posloupnosti děje, když po ní jdeme stále dál a dál. Například u posloupnosti $\left\{\frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ se zdá, že se členy zmenšují k nule, zatímco u posloupnosti lichých čísel se členy stále bez omezení zvětšují, intuitivně bychom řekli, že jdou do nekonečna. Vymyslíme si pojmy, které takovéto chování vystihnou. Posloupnost jde do nekonečna, pokud dříve či později vyleze nad libovolně velkou zvolenou mez a zůstane nad ní. Jde k nule, jestliže pokaždé, když si zvolíme nějaku malou toleranci okolo nuly, tak do ní ta posloupnost dřív či později vleze a zůstane tam, blízko u nuly. Všimněte si, že teď nás vlastně ani nezajímá, co posloupnost dělá na začátku, ptáme se na její „konec“. Můžeme si tedy dovolit vynechat specifikaci, kde index začíná. Formální definice je kapku technická, ale jen upřesňuje to, co jsme si zde nastínili.

! **Definice.**
Nechť $\{a_k\}$ je posloupnost.
Řekneme, že tato posloupnost jde do nekonečna, popřípadě že má limitu nekonečno, značeno $\lim(a_k) = \infty$ popřípadě $a_k \to \infty$, jestliže

pro každé $K > 0$ existuje k_0 tak, aby $a_k > K$ pro všechna $k \geq k_0$.

Řekneme, že tato posloupnost jde k nule, popřípadě že konverguje k nule, popřípadě že má limitu rovnou nule, značeno $\lim(a_k) = 0$ popřípadě $a_k \to 0$, jestliže

pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k_0 tak, aby $|a_k| < \varepsilon$ pro všechna $k \geq k_0$.

Let $\{a_k\}$ be a sequence.

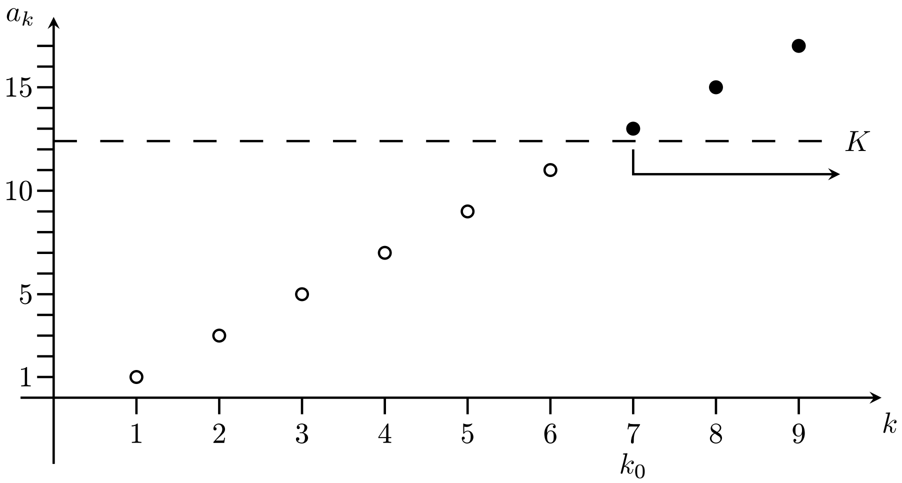
We say that it goes to infinity, or that its limit is infinity, denoted $\lim(a_k) = \infty$ or $a_k \to \infty$, if

for all $K > 0$ there is k_0 such that $a_k > K$ for all $k \geq k_0$.

We say that it goes to zero, or that it converges to zero, or that its limit is zero, denoted $\lim(a_k) = 0$ or $a_k \to 0$, if

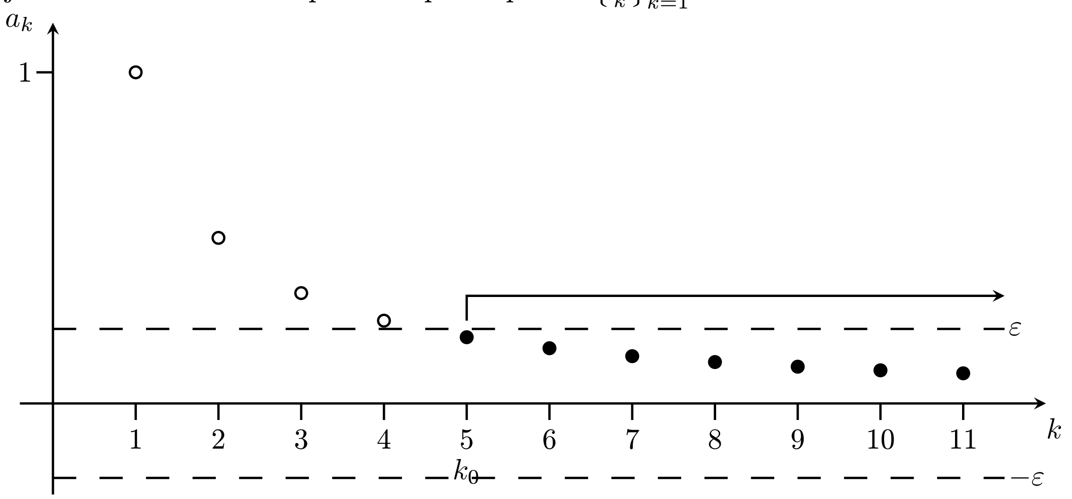
for all $\varepsilon > 0$ there is k_0 so that $|a_k| < \varepsilon$ for all $k \geq k_0$.

Ukážeme si význam definice na obrázku, nejprve nekonečnou limitu na příkladu posloupnosti $\{2k-1\}_{k=1}^{\infty}$ (kladná lichá čísla).



Kdykoliv nám někdo zadá hodnotu K (to je hladina, kterou máme překonat a již nad ní zůstat), dokážeme najít „odřezávací index“ k_0 takový, že pokud ignorujeme část posloupnosti před tímto indexem, tak již její zbývající členy zůstanou nad K.

Teď si ilustrujeme nulovou limitu na příkladu posloupnosti $\left\{\frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$.



Kdykoliv nám někdo zadá hodnotu ε, tak se po nás chce splnění podmínky $|a_k| < \varepsilon$, tedy $-\varepsilon < a_k < \varepsilon$. Jinými slovy, hodnoty posloupnosti mají zůstat mezi hladinami danými ε a $-\varepsilon$, ovšem nikoliv všechny. Pro libovolně zadanou hodnotu ε musíme být schopni najít „odřezávací index“ k_0 takový, že pokud ignorujeme část posloupnosti před tímto indexem, tak již její zbývající členy zůstanou v cílové oblasti. Z obrázku se zdá, že to půjde. V definici je u epsilonu „prokaždítko“, takže bychom správně měli nechat protihráče, ať na nás zkouší všechny možné epsilony, ale zdá se, že stejně vždycky dokážeme odříznout začátek posloupnosti tak, aby její zbytek byl již v daném pruhu, jen pro hodně malá ε budeme muset odříznout větší začátek.

S definicí limity nebudeme příliš pracovat, bylo ale dobré se nad ní zamyslet, protože ilustruje důležitý princip. V mnoha situacích (například v příští kapitole) nás bude zajímat, jak daná posloupnost vypadá „na konci“ (v nekonečnu). Prakticky se to dělá tak, že ignorujeme začátek oné posloupnosti a na zbytku již dotyčná věc skoro platí (například posloupnost je skoro nula). Kolik posloupnosti odřízneme záleží na tom, jaké „skoro“ zrovna potřebujeme.

Čtenáře asi napadne, že konstantní posloupnost $\{1,1,1,\dots\}$ evidentně míří k 1, a definice limity se v analýze opravdu dělá obecněji, není třeba jít jen do nuly. Zde ale potřebujeme jen nulu a nekonečno, tak se na ně budeme soustředit. Je také zjevné, že ne každá posloupnost má limitu, například ta alternující posloupnost $\{1,-1,1,-1,1,-1\}$ na své cestě nikam nesměřuje a limitu nemá, to je život.

Ze zkušenosti s čísly si asi tipneme, že $k\to\infty$, $k^2\to\infty$, $13^k\to\infty$, ale naopak $\frac{1}{k}\to 0$ či $\frac{1}{13^k}\to 0$. Pokud v tom cítíte jakousi dualitu mezi nekonečnem a nulou, tak máte opravdu.

Fakt 9a.2.
Pro každou posloupnost $\{a_k\}$ platí: $|a_k|\to\infty$ právě tehdy, když $\frac{1}{a_k}\to 0$.
Ekvivalentně, $a_k\to 0$ právě tehdy, když $\frac{1}{|a_k|}\to\infty$.

To známe; když dělíme malinkými čísly, dostáváme veliké výsledky, a také naopak. V další části pro nás bude důležité umět limity nejpopulárnějších posloupností, což je většinou snadné. Všimněte si, že $2^k\to\infty$, zatímco $\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{2^k}\to 0$. U geometrické posloupnosti tedy záleží na velikosti základu. Uděláme si oficiální tvrzení.

Fakt 9a.3.
(i) Nechť $a>0$. Pak $k^a\to\infty$.
(ii) Jestliže $q>1$, pak $q^k\to\infty$.
Jestliže $|q|<1$, pak $q^k\to 0$.
(iii) $k!\to\infty$.
(iv) $k^k\to\infty$.
(v) Nechť $b>0$. Pak $[\ln(k)]^b\to\infty$.

Vidíme, že většina výrazů utíká do nekonečna, v příští kapitole je budeme mezi sebou navzájem porovnávat a ptát se, kdo utíká do nekonečna rychleji. Nejprve ale jedna poznámka.

Ve Faktu jsme použili přirozený logaritmus, ale v computer science se často dává přednost logaritmům jiným, třeba dvojkovému. I pro ně platí tvrzení z Faktu, protože máme přepis $\log_a(k)=\frac{1}{\ln(a)}\ln(k)$. Pak také máme rovnost $[\log_a(k)]^b=\frac{1}{\ln^b(a)}[\ln(k)]^b$, takže se při změně základu jen modifikuje rychlost růstu konstantou, při libovolném základě $a>1$ logaritmus pořád utíká do nekonečna.

Cvičení

Cvičení 9a.1 (rutinní)**:** Jsou dány následující posloupnosti rozličnými předpisy pro $k\in\mathbb{N}$. Najděte vždy prvních řekněme deset členů.
(i) (0) $a_1=1$, $a_2=-1$, $a_3=1$, (1) $a_{k+1}=a_k-a_{k-2}$;
(ii) $a_k=\lfloor\sqrt{k}\rfloor$;
(iii) a_k je počet písmen v číslovce označující k;
(iv) a_k je největší celé číslo, jehož binární zápis má k bitů;
(v) a_k je největší n takové, že $n!\le k$.

Cvičení 9a.2 (dobré, poučné)**:** Najděte alespoň tři různá pravidla pro definici posloupnosti tak, aby její první tři členy byly
(i) $1,2,4$; (ii) $1,2,3$.
Pro každé takové pravidlo dopočítejte další dva členy.

Cvičení 9a.3 (dobré)**:** Pro následující seznamy celých čísel najděte jednoduchý vzorec či pravidlo, který je generuje, a pomocí něj odhadněte další člen.
(i) $1,0,1,1,0,0,1,1,1,0,0,0,1,\dots$;
(ii) $1,2,2,3,4,4,5,6,6,7,8,8,\dots$;
(iii) $1,0,2,0,4,0,8,0,16,0,\dots$;
(iv) $7,11,15,19,23,27,31,35,39,43,\dots$;
(v) $1,-3,9,-27,81,-243,729,\dots$;
(ix) $3,6,11,18,27,38,51,66,83,102,\dots$;
(x) $1,8,27,125,216,\dots$;
(xi) $2,3,7,25,121,721,5041,40321,\dots$;
(xii) $2,16,54,128,250,432,686,\dots$;
(xiii) $1,10,11,100,101,110,111,1000,1001,1010,1011,\dots$;

(vi) $15, 8, 1, -6, -13, -20, -27, \dots$;
(vii) $3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \dots$;
(viii) $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots$;
(xiv) $0, 2, 8, 26, 80, 242, 728, 2186, 6560, 19682, \dots$;
(xv) $1, 3, 15, 105, 945, 10395, 125125, 2027025, 34459425, \dots$;
(xvi) $2, 4, 16, 256, 65536, 4294967296, \dots$.

Cvičení 9a.4 (rutinní)**:**
Odhadněte, které z následujících posloupností jsou monotonní, a svůj odhad dokažte.
(i) $\left\{\frac{k-1}{k+1}\right\}_{k=1}^{\infty}$; (iii) $\left\{\frac{3}{k!}\right\}_{k=2}^{\infty}$; (v) $\left\{\frac{2k-5}{3^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$;
(ii) $\left\{\frac{k-4}{2^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$; (iv) $\left\{\frac{2^k}{k!}\right\}_{k=1}^{\infty}$; (vi) $\{2k+(-1)^k\}_{k=1}^{\infty}$.

Cvičení 9a.5 (drsné^2)**:** Dokažte, že posloupnost 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4 (každé k je přesně k-krát) je dána vzorcem $a_n = \lfloor\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\rfloor$.

Řešení:
9a.1: (i): $1, -1, 1, 0, 1, 0, 0, -1, -1, -1, 0, 1, 2, 2, 1, -1, -3, -4, -3, 0, 4, 7, 7, 3, -4, -11, -14, -10, 1, 15$.
Nevidím pro tohle nějaký rozumný vzoreček, je to zajímavá posloupnost. Vzorec ale určitě existuje, viz kapitola .
(ii): $1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3$. (iii): $5, 3, 3, 5, 3, 4, 4, 3, 5, 5$.
(iv): $1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023$. (v): $1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3$.
9a.2: (i): Tak třeba A) $a_{k+1} = 2a_k$, pak $1, 2, 4, 8, 16$; B) $a_{k+1} = a_k + k$ pro $k \in \mathbb{N}$, pak $1, 2, 4, 7, 11$;
C) posloupnost všech přirozených čísel, která nejsou dělitelná třemi, pak $1, 2, 4, 5, 7$.
(ii): Tak třeba A) $a_k = k$ pro $k \in \mathbb{N}$, pak $1, 2, 3, 4, 5$, vzorec $a_{k+1} = a_k + 1$ dává totéž;
B) $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$, pak $1, 2, 3, 5, 8$; C) $a_k = k^3 + 2$ pro $k \geq -1$, pak $1, 2, 3, 10, 29$.
9a.3: (i): 1. (ii): 9. (iii): 32. (iv): 47, $a_{k+1} = a_k + 4$. (v): -2187, $a_{k+1} = a_k \cdot (-3)$. (vi): -34, $a_{k+1} = a_k - 7$. (vii): 384, $a_{k+1} = 2a_k$, $a_k = 3 \cdot 2^{k-1}$. (viii): 81, $a_{k+1} = k^2$. (ix): 123, $a_{k+1} = a_k + 2k + 1$, tedy symbolicky $+3, +5, +7, \dots$ (x): 343, $a_{k+1} = k^3$. (xi): 62881, $a_{k+1} = k! + 1$. (xii): 1024, $a_{k+1} = 2k^3$. (xiii): 1100, $a_{k+1} = a_k + 1$, ale binárně!. (xiv): 59048, $a_{k+1} = 3a_k + 2$. (xv): 654729075, $a_{k+1} = a_k \cdot (2k+1)$, symbolicky $\cdot 3, \cdot 5, \cdot 7, \dots$ (xvi): $1.844 \cdot 10^{19}$, $a_{k+1} = 2^{2^k}$.
9a.4: (i): rostoucí. Ekvivalentní úpravy pro libovolné $k \geq 1$:
$a_k < a_{k+1} \iff \frac{k-1}{k+1} < \frac{k}{k+2} \iff (k-1)(k+2) < k(k+1) \iff k^2 + k - 2 < k^2 + k \iff -2 < 0$ pravda.
(ii): není monotonní. $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 < a_2$ vzroste tedy už nemůže být klesající nebo nerostoucí.
$a_6 = \frac{1}{2^5} = \frac{4}{2^7}$, $a_7 = \frac{3}{2^7}$, $a_6 > a_7$ klesne, vyloučí rostoucí a neklesající.
(iii): klesající. Ekvivalentní úpravy pro libovolné $k \geq 2$:
$a_k > a_{k+1} \iff \frac{3}{k!} > \frac{3}{(k+1)!} \iff k+1 > 1 \iff k > 0$ pravda.
(iv): $\left\{2, 2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \dots\right\}$, nerostoucí.
$a_k \geq a_{k+1} \iff \frac{2^k}{k!} \geq \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \iff k+1 \geq 2 \iff k \geq 1$ pravda.
(v): $\left\{-1, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{5}{243}, \dots\right\}$ není monotonní, $a_1 < a_2$ vylučuje, aby byla klesající či nerostoucí, $a_4 > a_5$ vylučuje rostoucí a neklesající.
(vi): $\{1, 5, 5, 9, 9, 13, 13, 17, \dots\}$ neklesající. Ekvivalentní úpravy pro libovolné $k \geq 1$:
$a_k \leq a_{k+1} \iff 2k + (-1)^k \leq 2(k+1) + (-1)^{k+1} \iff (-1)^k \leq 2 + (-1)^{k+1} \iff (-1)^k + (-1)^{k+1} \leq 2$ pravda.
9a.5: Poslední výskyt čísla k je na místě posloupnosti daném $1 + 2 + \dots + k$. Proto je číslo k je rovno a_n pro n splňující $\frac{1}{2}(k-1)k + 1 \leq n \leq \frac{1}{2}k(k+1)$, tedy pro $k^2 - k + 1 \leq 2n \leq k^2 + k$. Vyřešíme pro k a dostaneme, že člen a_n je roven číslu $k \in \mathbb{N}$ splňujícímu $\sqrt{2n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \leq k \leq \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$. Pak si s tím trochu pohrejte, já například vidím $a_N = \left\lceil\sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right\rceil$ a $a_N = \left\lfloor\sqrt{2n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right\rfloor$, vzoreček ze cvičení je ale výrazně jednodušší, tak to chce k němu dojít.

9b. Porovnávání rychlosti růstu

V této kapitole budeme porovnávat rychosti růstu výrazů typu $[\ln(k)]^a$, k^b, q^k, $k!$ a k^k, které (pro $a, b > 0$, $q > 1$) jdou všechny do nekonečna, ale každý typ jinak rychle. Abychom viděli, odkud přišly naše definice, podíváme se na motivační příklad.

! **Příklad 9b.a:** Porovnáme rychlost růstu výrazů (posloupností) $k!$ a k^3. Začneme tabulkou s několika prvními hodnotami.

k:	1	2	3	4	5	6	7	8
k^3:	1	8	27	64	125	218	343	512
$k!$:	1	2	6	24	120	720	5040	40320

Vidíme, že zpočátku rostla rychleji třetí mocina, ale pak ji faktoriál předběhl a roste do nekonečna rychleji. Trocha experimentování s dalšími mocninami naznačí následující:

• Pro každý exponent $a > 0$ existuje index k_0 takový, že $k! > k^a$ pro $k \geq k_0$.

Budeme říkat, že pro „dostatečně velká“ k je faktoriál větší než mocniny.

V čem jsou tyto úvahy pro nás užitečné? Mají přímý dopad na rozhodování při výběru algoritmů. Většina algoritmů funguje tak, že je schopna přijmout vstupní data rozličných velikostí a délka trvání algoritmu pak nějakým způsobem závisí na této velikosti, většinou se to odhaduje podle toho, kolik operací musí algoritmus vykonat na splnění úkolu (podobně se počítá i nárok na paměť a podobně). U mnohých problémů dopředu přesně nevíme, jak velký datový soubor bude zpracováván, jen víme, že bude hodně veliký a že navíc časem i poroste. Pak přichází na scénu ono porovnání „pro velká k“.

Třeba v příkladě uvidíme, že počítání determinantu podle definice vyžaduje cca $k!$ operací, zatímco převod na trojúhelníkovou matici jen asi k^3. Pokud počítáme matice 2×2 a 3×3, pak vychází lépe ten faktoriál, což souhlasí, pro takto malé matice máme příjemná pravidla. Jestliže ale máme čekat velké matice, pak je verze s náročností k^3 výrazně lepším kandidátem.

Zde je ovšem zajímavá otázka: Vyplatí se investovat do nalezení programu s menší náročností, nebo do silnějšího počítače? Pokud počítač stokrát urychlíme, pak nebudeme porovnávat $k!$ s k^3, ale $\frac{1}{100}k!$ s k^3 neboli $k!$ s $100k^3$.

Položme si tedy otázku, o kolik větší je faktoriál než třetí mocnina, když k roste. To se nejlépe vidí z podílu. Pro $k \geq 4$ můžeme odhadovat:

$$\frac{k!}{k^3} = \frac{1 \cdot 2 \cdots (k-3)(k-2)(k-1)k}{k \cdot k \cdot k} \geq \frac{(k-3)(k-2)(k-1)k}{k \cdot k \cdot k} = \frac{k-3}{k}\,\frac{k-2}{k}\,\frac{k-1}{k} \cdot k.$$

Čtenář znalý analýzy již ví, že pro velké hodnoty k jsou podíly typu $\frac{k-a}{k}$ téměř rovny jedné. My nechceme na analýzu příliš spoléhat, proto dokážeme, že když je $k \geq 6$, tak jistě $\frac{k-3}{k} \geq \frac{1}{2}$:

$$k \geq 6 \implies 2k - 6 \geq k \implies 2(k-3) \geq k \implies \frac{k-3}{k} \geq \frac{1}{2}.$$

Pro tato k tedy máme $\frac{1}{2} \leq \frac{k-3}{k} \leq \frac{k-2}{k} \leq \frac{k-2}{k}$ a dostáváme odhad

$$\frac{k!}{k^3} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot k = \frac{1}{8}k.$$

Co to znamená? Že pokud se rozhodneme urychlit tu třetí mocninu nějakým faktorem A, tak dozajista

$$\frac{k!}{Ak^3} \geq \frac{1}{8A}k,$$

takže pokud si počkáme na dostatečně velké k, tak jistě bude podíl větší než 1 neboli $k! > Ak^3$. Jinými slovy, nejenže je faktoriál (pro velká k) větší než třetí mocnina, on je dokonce větší než libovolný násobek třetí mocniny (čím větší násobek, tím déle si musíme počkat, než faktoriál vyhraje, ale dočkáme se).

Z praktického hlediska to říká, že pokud si máme u úlohy, kde očekáváme narůstající objem vstupních dat, vybrat mezi urychlením algoritmu na lepší typ (třeba k^3 namísto faktoriálu) nebo urychlením počítače, tak je rozhodně výhodnější zlepšit algoritmus.

$\triangle$

Podívejme se ještě jednou na odhad, který jsme v příkladě odvodili. Zjistili jsme, že $k!$ je pro rostoucí k větší než libovolný násobek třetí mocniny. Nepřesně řečeno to znamená, že v nekonečnu je faktoriál nekonečně krát větší než k^3. Matematicky řečeno jsme ukázali, že pro libovolnou konstantu K dokážeme přejít k velkým hodnotám k tak, aby už $\frac{k!}{k^3} \geq K$. V řeči limit to znamená, že $\frac{k!}{k^3} \to \infty$, popřípadě že $\frac{k^3}{k!} \to 0$ (viz předchozí sekce).

Třetí mocnina samozřejmě není ničím výjimečná. Obdobným způsobem se ukáže, že pro libovolné $a > 0$ je faktoriál nekonečně krát větší než k^a, přesně řečeno $\frac{k!}{k^a} \to \infty$, viz cvičení .

Přesně takový vztah totální dominance jednoho výrazu nad druhým nás zajímá a dáme mu jméno. A protože vztah, který uvažujeme, je jakási totální nerovnost, zavedeme k ní i nerovnost opačnou. Samozřejmě to není třeba (stejně jako nám k porovnávání stačí jen směr $\geq$), ale občas to někomu přijde užitečné (tak jako $\leq$).

Z hlediska formálního budeme mluvit o posloupnostech. Není to nic divného, když se podíváme na chování algoritmu globálně, přes všechna možná k, tak dostáváme posloupnost hodnot. Pro zjednodušení se soustředíme na vzájemné srovnání dvou výrazů, které jdou do nekonečna, což pak znamená, že můžeme i předpokládat, že jsou kladné. Pokud by totiž nějaký výraz pro malá k dával záporné hodnoty, tak prostě počátek takovéto posloupnosti ignorujeme, stejně nás zajímá jen chování pro velká k.

! **Definice.**
Nechť $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ jsou posloupnosti kladných čísel splňující $a_k \to \infty$, $b_k \to \infty$.
Řekneme, že a_k je $o(b_k)$, psáno také $a_k = o(b_k)$, jestliže $\frac{a_k}{b_k} \to 0$ neboli $\frac{b_k}{a_k} \to \infty$.
Řekneme, že a_k je $\omega(b_k)$, psáno také $a_k = \omega(b_k)$, jestliže $\frac{a_k}{b_k} \to \infty$ neboli $\frac{b_k}{a_k} \to 0$.

Naše úvodní úvahy teď můžeme zachytit zápisem $k! = o(k^3)$ nebo také $k^3 = \omega(k!)$.

Toto značení pochází z oblastí fyziky, matematické analýzy a teorie čísel, hodně se také používá při analýze algoritmů. Čte se „a_k je malé ó b_k“, podobně s omegou. Nejen v diskrétní matematice je také velmi rozšířená fráze **posloupnost $\{a_k\}$ roste asymptoticky rychleji než posloupnost $\{b_k\}$**, také by šlo říct **asymptotický řád růstu a_k je větší než asymptotický řád růstu b_k** a další obdobné formulace. Když se objeví slova „asymptoticky“, „rychlost růstu“ či „řád růstu“ v nějaké podobě, tak jde s vysokou pravděpodobností právě o vztah $a_k = o(b_k)$.

Již z definice je jasné, že pojmy o a ω jsou duální,

• $a_k = o(b_k)$ právě tehdy, když $b_k = \omega(a_k)$.

Symbol ω je tedy používán výrazně méně. Všimněte si, že značka = zde neznamená klasickou rovnost, ale je to součástí specifického značení, je to jakási zkratka pro slovo „je“. Někteří autoři to vnímají jinak, berou $o(b_n)$ jako množinu všech posloupností $\{a_k\}$ splňujících $\lim\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = 0$. Pak to není jen součást značení, ale má to skutečný matematický význam a namísto našeho značení s „=“ píšou $a_k \in o(b_k)$.

Teď přichází na řadu prozkoumání vzájemného vztahu populárních výrazů. Než zformulujeme příslušné tvrzení, uděláme ještě jeden motivační příklad, abychom docenili praktický dopad takovýchto srovnání.

! **Příklad 9b.b:** Představme si, že máme počítač, který vykoná milion určitých kroků za sekundu (tedy jeden trvá tisícinu milisekundy), a zkoušíme na něm algoritmy, které pracují se vstupy o velikosti k. Každý algoritmus potřebuje na zpracování jiný počet kroků, podle toho, jakým vzorcem náročnost závisí na k. V tabulce si porovnáme několik typických náročností přepočítaných na čas.

Na začátku tabulky zvyšujeme k povlovně, od stovky dál zvyšujeme velikost dat vždy desetkrát. Mimochodem, velikost vstupních dat 10^8 není žádné přehánění, například při řešení klimatických modelů, proudění kolem letadel či podobných hrátkách s přírodou nejsou matice o tak velkých rozměrech ničím výjimečným.

Čas je udáván v milisekundách, pokud není řečeno jinak, pak je „s“ sekunda, „m“ minuta, „h“ hodina, „d“ den a „r“ rok.

Při prohlížení tabulky začneme nejprvedvěma řádky s tečkami, kde porovnáváme algoritmy s lineární a kvadratickou náročností. Porovnání časů potvrzuje naši zkušenost, že pro malá k zase tak velký rozdíl mezi přímkou a parabolou není, ale jak zvětšujeme proměnnou, tak se parabola odpíchne a uhání k nekonečnu výrazně rychleji; ke konci tabulky dobíhá lineární algoritmus pořád ještě v řádu minut, zatímco kvadratický už vyžaduje stovky let.

Mnoho algoritmů má lineární časovou náročnost, což v zásadě znamená, že zvětšíme-li velikost dat desetkrát, délka trvání se zvětší také desetkrát (přímá úměrnost). Příkladem budiž trvání kompilace videa v závislosti na jeho délce.

Kvadratickou náročnost zná každý z nás. V mozku-procesoru umíme rychle násobit čísla až po 9, pro násobení větších (k-ciferných) čísel máme algoritmus, který vyžaduje k^2 oněch jednoduchých násobení. Podobně to funguje i v počítači.

$k =$	5	10	15	20	30	50	100	1000	10000	10^5	10^6	10^7	10^8
$\ln(k)$:	0.0016	0.0023	0.0027	0.003	0.0034	0.004	0.0046	0.007	0.009	0.01	0.014	0.016	0.018
• k:	0.005	0.01	0.015	0.02	0.03	0.05	0.1	1	10	0.1s	1s	10s	1.7m
$k\ln(k)$:	0.008	0.023	0.04	0.06	0.1	0.2	0.46	6.9	92	1.1s	13s	2.7m	31m
$k^{1.585}$:	0.013	0.038	0.073	0.12	0.22	0.49	1.5	57	2.2s	1.4m	54m	1.4d	55d
$\frac{1}{100}k^2$:	0.0002	0.001	0.002	0.004	0.009	0.025	0.01	10	1s	1.7m	2.8h	11.6d	3.2r
• k^2:	0.025	0.1	0.2	0.4	0.9	2.5	10	1s	100s	28m	11.6d	3.2r	317r
2^k:	0.03	1	32	1s	18m	35.5r	10^{16}r	10^{287}r					
$\frac{1}{1000}k!$:	0.1	3	21m	77r	10^{16}r	10^{48}r	10^{141}r						

Teď se podíváme na zajímavé modifikace kvadratického růstu. Hned nad příslušným řádkem vidíme data pro jiný počítač, který se nám nemalými náklady podařilo stokrát urychlit. Jak se dá čekat, pro menší hodnoty k máme dokonce lepší výsledky než lineární případ, ale pro velká k se nakonec zase dostáváme k dlouhým běhům.

Ale násobení k-místných čísel se dá udělat i fintou, která sníží náročnost z k^2 na přibližně $k^{1.585}$, viz příklad . Jak ukazuje příslušný řádek tabulky, i zde na začátku prohráváme se stokrát urychleným kvadratickým růstem, ale podle očekávání nakonec menší mocnina vychází výrazně rychleji i při použití původního pomalého počítače.

Kvadratickou náročnost vyžaduje také uspořádání seznamu o k položkách pomocí vzájemného porovnávání. Zde existují populární alternativy, například merge-sort, který má náročnost jen $k\ln(k)$ (viz cvičení). Příslušný řádek je hned pod řádkem lineárním a vidíme, že se až tak moc neliší (u obou mluvíme na konci tabulky o minutách), takže to je opravdu dost dobré, na hlavu porážíme urychlený kvadrát i mocninu $k^{1.585}$.

Pro úplnost jsme přidali několik situací jiného typu. Na prvním řádku je algoritmus logaritmické náročnosti, což je velice nenáročný růst. Logaritmus pro velké k „uvadá“ a roste čím dál pomaleji, takové algoritmy máme nejraději, třeba binární vyhledávání, viz příklad .

Naopak dole máme řádek s geometrickou náročností a tisícnásobně urychlený faktoriál. V obou případech jsme tabulku ani nedokončili, ono to ostatně nemá smysl v okamžiku, kdy vyskakují délky běhu programu mnohonásobně překračující dosavadní trvání vesmíru. To už jsou hodnoty, kde ani miliarda-násobné urychlení počítače nic nesvede. Jsou problémy, ve kterých faktoriál jako náročnost vyskočí, například počítání determinantu matice podle definice, tabulka ukazuje, že od těch raději ruce pryč (determinant se dá urychlit na mocninu, viz příklad). Podobně nepříjemné jsou i geometrické náročnosti, například lámání šifry RSA závisí na délce zvoleného klíče zhruba geometrickým způsobem, díky čemuž je tato šifra (zatím) bezpečná, jen málo informací si svou hodnotu uchová desítky let, které jsou zatím třeba na vyluštění i na těch nejsilnějších počítačích. V okamžiku, kdy výkon počítačů vzroste natolik, že šifra přestane být bezpečnou, stačí díky rychlému růstu náročnosti nepatrně zvětšit délku klíče a počítače už zase čelí výpočtům na dekády.
△

Potvrdímes si oficiálně, co jsme z příkladu vytušili.

! **Věta 9b.1.**
(i) Nechť $a,b>0$ a $q>1$. Pak platí
$$[\ln(k)]^a \text{ je } o(k^b),\;\; k^b \text{ je } o(q^k),\;\; q^k \text{ je } o(k!) \text{ a } k! \text{ je } o(k^k).$$
(ii) Jestliže $0<a<b$, pak $[\ln(k)]^a$ je $o([\ln(k)]^b)$ a k^a je $o(k^b)$.
(iii) Jestliže $1<q<r$, pak q^k je $o(r^k)$.

Jaký tedy máme obrázek? Máme pět skupin výrazů, logaritmy $[\ln(k)]^a$, mocniny k^b, geometrické výrazy q^k, faktoriál $k!$ a obecnou mocninu k^k. Každý výraz z jedné z těchto skupin je pro velká k větší než jakýkoliv výraz ze skupin jmenovaných dříve, bez ohledu na konstanty. Takže například pokud si dostatečně dlouho počkáme, tak $(1.1)^k > Ak^{1000000}$ pro libovolnou volbu konstanty $A>0$.

V rámci každé skupiny pak o hierarchii rozhodují hodnoty parametru, třeba 3^k roste asymptoticky rychleji než e^k, což roste asymptoticky rychleji než 2^k, podobně k^7 roste asymptoticky rychleji než k^4 a to roste asymptoticky rycheji než $\sqrt{k}$.

Těmto vztahům se často říká „škála mocnin“ a její znalost umožní rychle porovnávat růsty různých výrazů. Důkaz jen naznačíme, aby měl čtenář představu.

Důkaz (náznak)**:** (i): Začneme zprava, budeme zkoumat podíly.

1) Pro $k>1$ máme shodný počet členů v čitateli i jmenovateli a můžeme je spárovat.
$$\frac{k^k}{k!}=\frac{k\cdot k\cdot k\cdots k}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}=\frac{k}{1}\,\frac{k}{2}\,\frac{k}{3}\cdots\frac{k}{k}\geq\frac{k}{1}\cdot 1\cdot 1\cdots 1=k.$$
Podíl tedy dosahuje libovolně velkých hodnot, proto $\frac{k^k}{k!}\to\infty$.

2) I zde rozdělíme podíl do párů, protože počty součinitelů souhlasí.
$$\frac{k!}{q^k}=\frac{1}{q}\cdot\frac{2}{q}\cdot\frac{3}{q}\cdots\frac{k-1}{q}\cdot\frac{k}{q}.$$
Teď je třeba si uvědomit, že q je konstantní, zatímco k se mění. Vidíme, že zlomky jsou vlastně pořád stejné, pro všechna k začínáme stejně, pokud k zvětšíme, tak se k součinu přidají nové členy na konec. Tyto nově přidávané členy jsou typu $\frac{k}{q}$, tedy jsou stále větší, zatímco začátek zůstává stejný. Jak je tento začátek velký?

Nejprve jsou zlomky, které jsou malé, jako $\frac{1}{q}$, ale dříve či později se čitatel zvětší natolik, že už budou výsledné zlomky typu $\frac{n}{q}$ větší než 1, časem dokonce dospějeme tak daleko, že budou větší než 2. My přesně víme, kdy se tak stane, až číslo v čitateli překročí $\lfloor 2q\rfloor$. Pokud tedy bude k větší než číslo $K=\lfloor 2q\rfloor$, tak výraz $\frac{k!}{q^k}$ vždy začíná výrazem $\frac{1}{q}\cdot\frac{2}{q}\cdots\frac{K-1}{q}\cdot\frac{K}{q}=A$, jehož hodnota závisí čistě na q. Tento výraz bude násoben dalšími zlomky typu $\frac{n}{q}$, které jsou ovšem všechny větší než 2 a je jich přesně $k-K$. Můžeme proto pro $k>K$ odhadovat
$$\begin{aligned}\frac{k!}{q^k}&=\frac{1}{q}\cdot\frac{2}{q}\cdots\frac{K}{q}\cdot\frac{K+1}{q}\cdots\frac{k-1}{q}\cdot\frac{k}{q}=A\cdot\frac{K+1}{q}\cdots\frac{k-1}{q}\cdot\frac{k}{q}\\&>A\cdot 2\cdots 2=A\cdot 2^{k-K}=\frac{A}{2^K}\cdot 2^k\to\infty.\end{aligned}$$

3) Vztahy $k^a = o(q^k)$ a $[\ln(k)]^b = o(k^a)$ se dokazují metodami matematické analýzy na pár řádcích. Je nicméně zajímavé, že existuje relativně elementární důkaz že k^a je $o(q^k)$, ukážeme si jej.

Nejprve odvodíme, že k je $o(2^k)$. Nechť je tedy $A > 0$ libovolné, ukážeme, že $2^k > Ak$ pro dostatečně velká k.

Označme $d_k = 2^k - Ak$. Protože $2^k \to \infty$, určitě existuje $K \in \mathbb{N}$ takové, že $2^k > A + 1$ pro $k \geq K$. Pro tyto k pak můžeme odhadovat

$$d_{k+1} = 2^{k+1} - A(k+1) = 2^k + 2^k - Ak - A = 2^k - Ak + 2^k - A = d_k + (2^k - A) > d_k + 1.$$

Co to znamená? Ať už je rozdíl $2^K - AK$ jakýkoliv, počínaje tímto indexem se s každým zvýšením k rozdíl zvětší alespoň o jedničku. To znamená, že dříve či později začnou být d_k kladné, tedy existuje k_0 takové, že pro $k \geq k_0$ je $d_k > 0$, tedy $2^k > Ak$.

Tento důkaz lze upravit pro libovolné q^k s $q > 1$, viz cvičení .

Pak už snadno dokážeme, že pro libovolné $a > 0$ máme

$$\frac{q^k}{k^a} = \frac{(q^{k/a})^a}{k^a} = \Big(\frac{(q^{1/a})^k}{k}\Big)^a \to \infty^a = \infty.$$

(ii): $\frac{k^b}{k^a} = k^{b-a} \to \infty$, neboť $b - a > 0$. Podobně pro logaritmy.

(iii): $\frac{r^k}{q^k} = \left(\frac{r}{q}\right)^k \to \infty$, neboť $\frac{r}{q} > 1$, je to zase geometrická posloupnost.

□

Teď si zavedeme další pojmy, které nám umožní přibližně porovnávat výrazy podle velikosti pro velká k. Definice jsou inspirovány praktickými požadavky. Jeden je, že srovnání by mělo být přibližné. Například je v zásadě jedno, jestli něco trvá 10 let nebo 10 let a 2 hodiny. Členy méně důležité tedy budeme chtít zanedbávat.

Druhý požadavek je, aby naše porovnávání ignorovalo situaci, kdy počítač několikrát urychlíme. To znamená, že pokud jeden výraz roste určitou rychlostí a druhý je stále řekněme přibližně dvakrát větší, tak chceme, aby definice řekla, že budou mít stejnou asymptotickou rychlost růstu.

Opět se omezíme na výrazy, které jdou do nekonečna.

!

Definice.
Nechť $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ jsou posloupnosti kladných čísel splňující $a_k \to \infty$, $b_k \to \infty$.
Řekneme, že a_k je $O(b_k)$, jestliže $\exists K > 0$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ aby $\forall k \geq k_0$: $a_k \leq K b_k$.
Řekneme, že a_k je $\Omega(b_k)$, jestliže $\exists L > 0$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ aby $\forall k \geq k_0$: $a_k \geq L b_k$.
Řekneme, že a_k je $\Theta(b_k)$ nebo že $a_k \asymp b_k$, jestliže $\exists K, L > 0$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ aby $\forall k \geq k_0$: $L b_k \leq a_k \leq K b_k$.

První pojem je odhad shora, kdy jakoby říkáme, že $a_k \leq b_k$, ale té b_k můžeme trochu pomoci vynásobením konstantou, aby se nad a_k dostala. Podobně funguje odhad zdola v druhém pojmu. Čteme a_k **je velké ó** b_k.

Třetí pojem je právě tím, kterým chceme říct, že se věci v zásadě rovnají. Čteme a_k **je téta** b_k, ale v diskrétní matematice (a dalších aplikacích) často slyšíme něco jako **asymptotická rychlost růstu** a_k **je** b_k.

Někteří autoři mají ty definice jinak, bez odřezávání s k_0, například takto:
• $a_k = \Theta(b_k)$ jestliže $\exists K, L > 0$ aby $\forall k$: $L b_k \leq a_k \leq K b_k$.
Dá se snadno ukázat, že takováto definice je vlastně stejná jako ta naše. Je snažší na čtení (a občas i na použití), ale neumožňuje odřezávání začátků, čímž se zase komplikuje hledání správného K či L. Níže to uvidíme na konkrétních příkladech.

Hned z definice vidíme, že platí následující:
• $a_k = O(b_k)$ právě tehdy, když $b_k = \Omega(a_k)$ [protože $a_k \leq K b_k \iff b_k \geq (1/K) a_k$],
• $a_k = \Theta(b_k)$ právě tehdy, když $a_k = O(b_k)$ a $a_k = \Omega(a_k)$, což je právě tehdy, když $a_k = O(b_k)$ a $b_k = O(a_k)$.
Má to smysl, dva výrazy se „skoro rovnají“ (rychlostí růstu), jestliže je jeden „skoro menší“ než druhý a také naopak.

Uvedeme si některé souvislosti mezi novými pojmy i předchozím srovnáním o a ω. Pokud má čtenář už trochu představu o významu rozličných srovnání, tak by mu následující tvrzení měla přijít přirozená.

Fakt 9b.2.
Uvažujme posloupnosti $\{a_k\}, \{b_k\}$ kladných čísel jdoucí do nekonečna.
(i) Jestliže $a_k = o(b_k)$, pak $a_k = O(b_k)$ a nemůže platit $a_k = \Omega(b_k)$ ani $a_k = \Theta(b_k)$.
(ii) Jestliže $a_k = \omega(b_k)$, pak $a_k = \Omega(b_k)$ a nemůže platit $a_k = O(b_k)$ ani $a_k = \Theta(b_k)$.
(iii) Nemůže platit zároveň $a_k = o(b_k)$ a $b_k = o(a_k)$.
(iv) Jestliže $a_k = \Theta(b_k)$, pak nemůže platit $a_k = o(b_k)$ ani $b_k = o(a_k)$.

Důkaz (poučný)**:** (i) Zvolme libovolné $K > 0$. Z předpokladu máme platnost $\frac{a_k}{b_k} \to 0$ a podle definice limity musí existovat k_0 takové, aby pro $k \geq k_0$ platilo $\frac{a_k}{b_k} < K$. Pro tato k pak máme i $a_k \leq K b_k$, což dokazuje $a_k = O(b_k)$.

Pokud by zároveň platilo $a_k = \Omega(b_k)$, tak pro nějaké $L > 0$ a k_0 platí $a_k \geq L b_k$ neboli $\frac{a_k}{b_k} \geq L$ pro všechna $k \geq k_0$, což ale znemožňuje splnění definicne $\frac{a_k}{b_k} \to 0$ pro $\varepsilon = L$.

(ii) Důkaz je obdobný.

(iii) Toto by znamenalo, že $\frac{a_k}{b_k} \to 0$ a zároveň $\frac{a_k}{b_k} \to \infty$, což je nemožné, jedna posloupnost nemůže mít dvě různé limity.

(iv) Z definice $a_k = \Theta(b_k)$ najdeme $K, L > 0$ a k_0 takové, že pro všechna (dostatečně velká) $k \geq k_0$ platí $L \leq \frac{a_k}{b_k} \leq K$. Jestliže ovšem pro všechna $k \geq k_0$ platí $\frac{a_k}{b_k} > L$, pak pro $\varepsilon = L$ není možné splnit podmínku z definice limity 0, tudíž neplatí, že $\frac{a_k}{b_k} \to 0$ neboli neplatí, že $a_k = o(b_k)$. Z $\frac{a_k}{b_k} < K$ pro všechna k zase vyloučíme $\frac{a_k}{b_k} \to \infty$ a neplatí $a_k = \omega(b_k)$ neboli neplatí $b_k = o(a_k)$.

□

Příklad 9b.c:

1) a) $k = o(k^2)$ neboli $k^2 = \omega(k)$.

b) Platí i $k = O(k^2)$, ale neplatí $k = \Omega(k^2)$ ani $k = \Theta(k^2)$.

Pojem Θ tedy „pozná“, že rychlosti k a k^2 nejsou souměřitelné.

Důkazy: a) $\frac{k^2}{k} = k \to \infty$, proto $k = o(k^2)$.

b) Platí $k \leq 1 \cdot k^2$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, proto lze zvolit $K = 1$, $k_0 = 1$ a máme $k = O(k^2)$.

Platí také $k = \Omega(k^2)$? Aby pro nějaké L platilo $k \geq Lk^2$ pro všechna (dostatečně velká) k, muselo by platit i $\frac{k}{k^2} \geq L$ pro všechna (dostatečně velká) k, ale to nejde, protože $\frac{k}{k^2} \to 0$, jinými slovy se tento podíl nakonec dostane pod jakoukoliv hladinu L, kterou zkusíme.

Nemůže proto platit ani $k = \Omega(k^2)$. Plyne to ostatně z části a) a Faktu výše.

2) a) $13k = \Theta(k)$.

b) $13k = O(k)$, $13k = \Omega(k)$, $k = O(13k)$, $k = \Omega(13k)$

c) Neplatí $13k = o(k)$ ani $13k = \omega(k)$.

Pojmy tedy dle našeho přání nepovažují násobení konstantu za podstatnou změnu rychlosti růstu.

Důkazy: a) Zvolíme $L = 1$ a $K = 13$, pak pro každé k máme $L \cdot k \leq 13k \leq K \cdot k$, stačí proto zvolit $k_0 = 1$. Zde tedy v pohodě projde i důkaz pomocí alternativní, neodřezávací definice.

b) plyne automaticky z a).

c) Protože $\frac{13k}{k} = 13$, tak neplatí ani $\frac{13}{k} \to 0$, ani $\frac{13k}{k} \to \infty$.

3) a) $100k + 50 = o(k^2)$.

b) $100k + 50 = O(k^2)$.

c) Neplatí $100k + 50 = \Theta(k^2)$.

d) $100k + 50 = \Theta(k)$. Neboli asymptotická rychlost růstu $100k + 50$ je k.

Nejprve pojmy správně poznaly, že všechny členy výrazu $100k + 50$ rostou výrazně pomaleji než k^2, nepomohlo jim ani násobení konstantou.

Pojem Θ pak ukázal, že umí zanedbávat nejen násobení číslem, ale také přítomnost méně důležitých členů, správně rozpoznal, že v daném výrazu je tím podstatným člen k.

Důkaz: a) $\frac{100k+50}{k^2} = \frac{100}{k} + \frac{50}{k^2} \to 0$.

b) Vyplývá automaticky z a), ale klidně ukážeme i přímý důkaz. Potřebujeme najít konstantu K takovou, aby $100k + 50 \leq Kk^2$ (pro velká k). Protože $k \leq k^2$, určitě máme $100k \leq 100k^2$, takže volba $K = 100$ by se postarala o první část, ale ještě bude zlobit ta druhá. Spravíme to navýšením K.

Určitě platí $50 = 50 \cdot 1 \leq 50k^2$, takže pokud přidáme k prvotní volbě $K = 100$ ještě padesátku, mělo by to stačit k pokrytí obou částí. Volíme tedy $K = 150$ a teď už opravdu pro všechna $k \in \mathbb{N}$ máme

$$100k + 50 \leq 100k^2 + 50k^2 = 150k^2 = Kk^2.$$

Vidíme, že jsme ani nemuseli odřezávat začátek posloupnosti, takže náš důkaz platí i pro alternativní definici pojmu $O(k^2)$.

Jako alternativu si ukážeme, že namísto zvětšování K lze použít možnost odřezávání, pokud pracujeme s definicí, která to povoluje. Víme, že k^2 je nekonečně krát větší než k, takže pokud si počkáme, tak určitě převáží přímo celý člen $100k$. Vidíme například, že pokud je $k \geq 100$, tak už máme $100k \leq k \cdot k = k^2$, takže by fungovala i volba $K = 1$ a odříznutí $k_0 = 100$.

Ještě se ale musíme postarat o tu padesátku. Jedna možnost je, že si prostě počkáme o něco déle. Trocha experimentování ukáže, že po dosazení $k = 101$ už opravdu platí $100k + 50 \leq k^2$, a dá se ukázat, že to platí i pro všechna následující k. Lze tedy zvolit $K=1$ a odřezávací bod $k_0=101$, pro všechna $k\geq k_0$ pak platí $100k+50\leq 1\cdot k^2$, to už ale není vidět tak jasně, muselo by se to dokázat analytickými metodami.

Nejjednodušší je často kombinovat oba přístupy, přes odřezávání a přes zvětšování pomocí K. Už jsme viděli, že pro $k\geq k_0=100$ máme $100k\leq k^2$, pro takováto k ale také evidentně máme $50\leq 100=k\leq k^2$. Můžeme tedy zvolit $K=2$ a odhadovat, že pro $k\geq 100=k_0$ je

$$100k+50\leq k^2+k^2=2k^2=K\cdot k^2.$$

c) Protože $100k+50=o(k^2)$, tak už je vyloučeno $100k+50=\Omega(k^2)$ a tedy i $100k+50=\Theta(k^2)$ (viz Fakt výše).

d) Hledáme konstanty L,K tak, aby $L\cdot k\leq 100k+50\leq K\cdot k$ pro všechna či pro dostatečně velká k (podle verze definice Θ). Je jasné, že volba $L=1$ funguje pro všechna $k\in\mathbb{N}$. U horního odhadu zase zvolíme kombinaci přístupů přes odřezávání a přes zvětšování. Evidentně $50\leq k$, pokud se chytře omezíme na velká k, v tomto případě stačí zvolit $k_0=50$. Také máme (pro všechna k) odhad $100k\leq 100\cdot k$. Dáme to dohromady, pro $k\geq 50$ platí

$$13\leq k^2 \implies 100k+50\leq 100k+k=101k,$$

tedy stačí zvolit $K=101$.

4) a) $2k^2+13=\Theta(k^2)$.

b) Neplatí $2k^2+13=o(k^2)$ ani $2k^2+13=\omega(k^2)$.

Vidíme, že Θ „poznalo“, že o rychlosti růstu $2k^2+13$ rozhoduje výraz k^2.

Důkaz: a) Hledáme K,L tak, aby platil odhad $Lk^2\leq 2k^2+13\leq Kk$ pro všechna (velká) k. Je hned vidět, že $L=1$ bude fungovat pro všechna $k\in\mathbb{N}$, což mimochodem dokazuje, že $2k^2+13=\Omega(k^2)$ neboli $k^2=O(2k^2+13)$.

Teď hledáme K neboli vlastně chceme ukázat, že také $2k^2+13=O(k^2)$. Volba $K=2$ by nám zajistila dobrý odhad pro první část výrazu, u druhé bude nejednodušší si trošku počkat. Pro $k\geq 4$ totiž určitě máme

$$2k^2+13\leq 2k^2+k^2=3k^2,$$

takže stačí zvolit $k_0=4$ a $K=3$.

Pokud bychom nechtěli odřezávat, tak bychom odhadovali třeba takto: Protože $1\leq k^2$, tak určitě

$$2k^2+13=2k^2+13\cdot 1\leq 2k^2+13k^2=15k^2.$$

Volba $K=15$ tedy zaručí platnost potřebného odhadu pro všechna k.

b) Plyne to z a). Dá se také ukázat, že $\frac{2k^2+13}{k^2}\to 2$, takže tento podíl nemá ani limitu 0, ani limitu ∞. Proto neplatí $2k^2+13=o(k^2)$ ani $2k^2+13=\omega(k^2)$.

△

V praxi se ovšem $a_k=\Theta(b_k)$ obvykle dokazuje jinak než hledáním K,L. které by fungovaly. Východiskem je zkoumání podílu $\frac{a_k}{b_k}$. Pokud má limitu 0 či nekonečno, tak už víme, co to znamená. Pokud má limitu jinou, pak také dostáváme podstatnou informaci díky následujícímu důležitému tvrzení:

• Jestliže má $\frac{a_k}{b_k}$ nenulovou (a konečnou) limitu, tak $a_k=\Theta(b_k)$.

Na hledání limit nám analýza nabízí mocné nástroje, takže důkaz je pak často na jednom řádku. Například to, že $100k+50=\Theta(k)$ (viz příklad výše) se dokáže hravě výpočtem

$$\lim\Bigl(\frac{100k+50}{k}\Bigr)=\lim\Bigl(100+\frac{50}{k}\Bigr)=100+0=100.$$

Tento výsledek říká, že pro velké hodnoty k je $100k+50$ v zásadě stokrát větší než k, takže rostou řádově stejně rychle.

Klasický problém je, když nám někdo dá kombinaci různých typů a my máme rozhodnout, jak se chová celý výraz (jakou má asymptotickou rychlost růstu). Pak se použije následující trik: Jestliže se sčítají dvě části a ve vzájemném porovnávání jedna z nich prohraje, tak ji lze vynechat, aniž bychom tím pro velká k ovlivnili daný výraz. Formálně:

!

Fakt 9b.3.
Uvažujme posloupnosti $\{a_k\},\{b_k\}$ kladných čísel jdoucí do nekonečna.
Jestliže $b_k=o(a_k)$, pak $a_k+b_k=\Theta(a_k)$.

Indukcí to pak rozšíříme na více sčítanců, čímž dostaneme algoritmus pro hledání dominantního typu v kombinaci více členů.

! Příklad 9b.d: Jakou asymptotickou rychlost růstu má výraz $3^k-150k^{17}+\sqrt{k}-200\cdot e^k+\log_5(k)$?

Vidíme, že se ve výrazu sčítají členy ze tří kategorií: geometrické výrazy 3^k a e^k, mocniny $\sqrt{x}$ a k^{17} a logaritmus. Víme, že z těchto tří skupin rostou nejrychleji geometrické výrazy, proto lze podle Faktu výše ty ostatní ignorovat.

O dominanci se tedy poperou výrazy 3^k a e^k. V rámci jedné skuiny rozhoduje velikost parametru, zde $3 > e$ a je jasno.

Závěr: $3^k - 150k^{17} + \sqrt{k} - 200 \cdot e^k + \log_5(k) = \Theta(3^k)$.

Slovně, asymptotická rychlost růstu daného výrazu je 3^k. Někdy se také říká, že daný výraz je typu 3^k.

Zkuste si vzít nějaký počítací přístroj a dosadit do obou výrazů třeba $k = 10^6$, uvidíte, že se výsledné hodnoty moc neliší.

△

Jak tedy vypadá postup? Při hledání asymptotické rychlosti růstu daného výrazu se nejprve pohybujeme na úrovni kategorií, porovnáme ty, které jsou přítomny a pak se dále v úvahách omezíme jen na ty části výrazu , které patří do nejvyšší přítomné kategorie. Mezi nimi pak rozhodne velikost parametru, čímž se vybere tzv. „dominantní člen“, který určuje chování celého výrazu.

Příklad 9b.e:

a) $k^2 - 257k = \Theta(k^2)$.

b) $3^k + 7k^{527} - \pi(-2)^k = \Theta(3^k)$.

c) $20k! + 160k^{13} - 3^k = \Theta(k!)$.

△

Často srovnáváme jen mocniny, z výsledků výše pak okamžitě plyne následující závěr:

!

Důsledek 9b.4.
Jestliže je $p(k)$ polynom stupně n a $a_n > 0$, pak $p(k) = \Theta(k^n)$.

Stručně řečeno, pro velká k se polynom chová stejně jako jeho nejvyšší mocnina.

! Zdálo by se, že už dokážeme v pohodě vyhodnocovat rychlost růstu výrazů, ale není tomu tak, naše škála totiž nepostihuje všechny výrazy. Kam na ní například zapadne výraz $k\ln^3(k)$? Určitě $k\ln^3(k) = \omega(k)$, ale jak se ten výraz porovná třeba s $k^{1.01}$? Kam přijde na naší škále výraz $e^{\sqrt{k}}$ nebo $\ln(e^k + 13k)$?

Ve skutečnosti ona škála představuje jen malou část toho, co se může vyskytnout, na druhou stranu si s ní překvapivě často vystačíme. Když náhodou narazíme na něco, co do ní nepatří, pak hodně záleží na zkušenosti a intuici, protože univerzální metody pro zkoumání nejsou. Jako ukázku prozkoumáme dva výrazy.

Příklad 9b.f: Jaká je asymptotická rychlost růstu $k\ln(k)$?

Protože $\frac{k\ln(k)}{k} \to \infty$, tak určitě $k\ln(k)$ je $\omega(k)$.

My ale víme, že pro libovolné kladné a platí $\ln(k) = o(k^a)$, proto $k\ln(k)$ roste asymptoticky pomaleji než $k \cdot k^a = k^{1+a}$. Důkaz:

$$\frac{k\ln(k)}{k^{1+a}} = \frac{\ln(k)}{k^a} \to 0.$$

Dostáváme tedy zajímavý obrázek. Máme kategorii mocnin k^a, kterou si člověk intuitivně představuje jako souvislou, začneme malými mocninami, třeba $k^{0.13}$, a jak postupně mocninu zvyšujeme, dostáváme stále rychleji rostoucí mocniny. Teď jsme ale zjistili, že do té škály dokážeme zasunout výraz $k\ln(k)$, a to bezprostředně za k^1. Tak bezprostředně, že sebemenší zvýšení mocniny nám již dá něco, co dominuje výrazu $k\ln(k)$.

Ve skutečnosti je to ještě zajímavější. Za k je schována celá kategorie. Dá se totiž snadno dokázat, že pro všechna $b > 0$ máme $k\ln^b(k) = \omega(k)$, ale $k\ln^b(k) = o(k^a)$ pro libovolné $a > 1$. V rámci této vsunuté kategorie určujeme dominanci tradičně podle mocniny b.

△

Poznamenejme, že mnohé významné algoritmy mají právě náročnost $k\ln(k)$, takže znalost rychlosti růstu tohoto výrazu je vysoce užitečná.

Příklad 9b.g: Jaká je asymptotická rychlost růstu $e^{\sqrt{k}}$?

Výraz e^k patří do kategorie geometrických posloupností q^k. Všimněme si, že všechny tyto výrazy lze převést na exponenciálu, protože $q^k = e^{\ln(q)k}$. Tuto kategorii (kde bereme $q > 1$) si tedy můžeme představit jako množinu exponenciál e^{Ak} pro $A = \ln(q) > 0$.

Z toho bychom odhadli, že $e^{\sqrt{k}}$ do této kategorie nepatří, protože $\sqrt{k} = k^{1/2} = o(k)$, tudíž se dá čekat, že i $e^{\sqrt{k}} = o(e^{Ak})$. Dokážeme to: Pro $A > 0$ máme

$$\frac{e^{\sqrt{k}}}{e^{Ak}} = e^{\sqrt{k}-Ak} \to e^{-\infty} = 0 \quad \text{neboť} \quad \sqrt{k} - Ak \to -\infty.$$

Máme tedy $e^{\sqrt{k}} = o(q^k)$ pro $q > 1$. Nižší kategorií jsou mocniny k^a pro $a > 0$. Zkusíme tedy s nimi náš výraz provnat. Pokud čtenář zná analýzu, pak pomocí l'Hospitalova pravidla hravě dokáže, že $\frac{e^{\sqrt{k}}}{k^a} \to \infty$, což potvrzuje, že $e^{\sqrt{k}} = \omega(k^a)$. Tento výraz je tedy někde mezi kategorií mocnin a kategorií geometrických posloupností (exponenciál).

Protože se snažíme co nejméně záviset na jiném kursu, alespoň naznačíme, proč by ona limita měla jít do nekonečna. Nejprve si upravíme $\frac{e^{\sqrt{k}}}{k^a} = \frac{e^{\sqrt{k}}}{(\sqrt{k})^{2a}}$ a pak si označíme $m = \sqrt{k}$ (tedy používáme substituci). Dostáváme $\frac{e^{\sqrt{k}}}{k^a} = \frac{e^m}{m^{2a}}$. Když teď pošleme $k \to \infty$, tak také $m \to \infty$ a naše standardní škála nekonečen už odpoví, že $\frac{e^m}{m^{2a}} \to \infty$.

△

Dobrá zpráva je, že při běžné analýze algoritmů si v zásadě vystačíme s oněmi základními čtyřmi kategoriemi a $k\ln(k)$, což už všechno známe. Opravdu? To je otázka provokativní, a zaprovokujeme ještě víc. Umíme vůbec do těch výrazů dosadit číslo?

Kupodivu to není tak snadné, jak to vypadá. Zatímco mocniny a exponenciály zvládne v pohodě i obyčejná kalkulačka, dosazovat do faktoriálu velká čísla je adrenalinovým sportem. Například při výpočtu 1000000! bychom potřebovali udělat milion násobení, přičemž by se ke konci pracovalo s dost velkými čísly, i velké počítače by se řádně zapotily.

Jenže my vlastně nepotřebujeme přesnou hodnotu, stejně při analýze výrazů bereme všechno přibližně. Pak se nabízí několik velice užitečných odhadů pro faktoriál.

Fakt 9b.5.
Pro $k \geq 6$ platí $\frac{k^k}{3^k} < k! < \frac{k^k}{2^k}$.

Důkaz (rutinní s výjimkou)**:** Tou výjimkou je netriviální fakt, že zlomek $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$ je pro $k \in \mathbb{N}$ vždy mezi 2 a 3, na což jsou rozličné triky, které sem spíš nepatří, a dá se to najít v každé tlustší učebnici analýzy. Pro nás to znamená, že $\frac{1}{3} \leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \leq \frac{1}{2}$ neboli $3\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \geq 1$ a $2\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \leq 1$.

Dokážeme teď indukcí $V(n)$: $\frac{k^k}{3^k} < k!$.

(0) $V(6)$ říká $2^6 < 6!$, což určitě platí.

(1) Pro jisté (libovolné) $k \geq 6$ předpokládejme, že $\frac{k^k}{3^k} < k!$. Potřebujeme ukázat, že $\frac{(k+1)^{k+1}}{3^{k+1}} < (k+1)!$. Máme

$$(k+1)! = (k+1)\cdot k! > (k+1)\frac{k^k}{3^k} = \frac{3(k+1)k^k}{(k+1)^k}\frac{(k+1)^k}{3^{k+1}} = 3\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \frac{(k+1)^{k+1}}{3^{k+1}} \geq \frac{(k+1)^{k+1}}{3^{k+1}}.$$

Důkaz hotov.

Teď dokážeme indukcí $W(n)$: $k! < \frac{k^k}{2^k}$.

(0) $W(6)$ říká $6! < 3^6$, což určitě platí.

(1) Pro jisté $k \geq 6$ předpokládejme, že $k! < \frac{k^k}{3^k}$. Potřebujeme ukázat, že $(k+1)! < \frac{(k+1)^{k+1}}{2^{k+1}}$. Máme

$$(k+1)! = (k+1)\cdot k! < (k+1)\frac{k^k}{2^k} = \frac{2(k+1)k^k}{(k+1)^k}\frac{(k+1)^k}{2^{k+1}} = 2\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \frac{(k+1)^{k+1}}{2^{k+1}} \leq \frac{(k+1)^{k+1}}{2^{k+1}}.$$

Důkaz hotov.

□

Faktoriál je tedy někde mezi $\left(\frac{k}{3}\right)^k$ a $\left(\frac{k}{2}\right)^k$. Následující tvrzení říká, že když si místo 2 nebo 3 v tomto odhadu dáme e, tak už víceméně dostaneme faktoriál.

Věta 9b.6. (Stirlingův vzorec)
Pro velká k platí $k! \sim \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k$.

Je to výsledek těžký, ale stojí za to, ta aproximace je opravdu vynikající. Dokonce až neuvěřitelně. Normálně když člověk slyší, že něco je aproximační vzorec, tak čeká dobré aproximace pro větší čísla, řekněme v řádu stovek či tisíců, někdy si musí počkat ještě déle, ale tento vzorec se už trefuje hodně blízko dokonce od začátku. Ukážeme to v tabulce, kde jsme dali i procentuální chybu vzhledem k základu, která o přesnosti vypovídá nejvíce.

k :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30
$k!$:	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800	$2.433\cdot 10^{18}$	$2.653\cdot 10^{32}$
Stirling :	0.92	1.9	5.8	23.5	118	710	4980	39902	359536	3598696	$2.423\cdot 10^{18}$	$2.645\cdot 10^{32}$
chyba % :	8	5	3.3	2	1.7	1.4	1.2	1	0.9	0.8	0.4	0.3

Cvičení

Cvičení 9b.1 (dobré)**:** (i) Ukažte, že $k^2 < 2^k$ pro $k \geq 5$. Bude se vám hodit, že pro $k \geq 5$ je $k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2 > 0$.
(ii) Ukažte, že $k^3 < 2^k$ pro $k \geq 5$. Bude sevám hodit, že pro $k \geq 5$ je $k^3 - 3k^2 - 3k - 1 > 0$, což odůvodníme například takto:

$$k^3 - 3k^2 - 3k - 1 \geq k^3 - 3k^2 - 4k = k(k^2 - 3k - 4) = k(k-4)(k+1) > 0.$$

Cvičení 9b.2 (dobré)**:** Dokažte indukcí, že pro $k \geq 4$ platí $2^k < k!$.

Cvičení 9b.3 (poučné)**:** Dokažte, že pro každé $a > 0$ platí $\frac{k!}{k^a} \to \infty$.
Nápověda: Nejprve pro $a \in \mathbb{N}$ imitujte důkaz z příkladu .
Pro necelá a použijte srovnání nerovností.

Cvičení 9b.4 (poučné)**:** Dokažte, že pro libovolné $q > 1$ platí, že pro každé $A > 0$ existuje k_0 tak, aby $q^k > Ak$ pro $k \geq k_0$.

Cvičení 9b.5 (rutinní)**:** Seřaďte podle asymptotické rychlosti růstu výrazy $5k + \ln(k)$, $k^2 - 100k$, $k\ln(k)$, $2k^3$, $\sqrt{k}$.

Cvičení 9b.6 (rutinní)**:** Najděte asymptotické rychlosti růstu následujících výrazů.
(i) $\sqrt{k} + \log_2(k)$;
(ii) $k^3 + 13k^2 + 14$;
(iii) $2^k + k^2 + 2k$;
(iv) $2^k + k!$.

Cvičení 9b.7 (poučné)**:** Dokažte podle definice následující tvrzení:
(i) $100k^2 = O(k^4)$, $100k^2 = o(k^4)$;
(ii) $3k + 7 = \Theta(k)$;
(iii) $k^4 = o(k!)$;
(iv) $k + 3\sin(k) = \Theta(k)$.

Řešení:
9b.1: (i): (0) $k = 5$: $5^2 = 25 < 128 = 2^5$.
(1) $k \geq 5$, předpoklad $k^2 < 2^k$. Pak $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 = k^2 + k^2 = (k^2 + 2k + 1) + (k^2 - 2k - 1)$
$= (k+1)^2 + (k^2 - 2k - 1) > (k+1)^2$ dle vztahu z nápovědy.
Alternativa: převést na rozdíl. Předpoklad: $2^k - k^2 > 0$. Pak
$2^{k+1} - (k+1)^2 = 2 \cdot 2^k - k^2 - 2k - 1 = 2(2^k - k^2) + k^2 - 2k - 1 > 2 \cdot 0 + 0 = 0$.
(ii): (0) $k = 5$: $5^3 = 125 < 128 = 2^5$.
(1) $k \geq 5$, předpoklad $k^3 < 2^k$. Pak $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^3 = k^3 + k^3 = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (k^3 - 3k^2 - 3k - 1)$
$= (k+1)^3 + (k^3 - 3k^2 - 3k - 1) > (k+1)^3$ dle vztahu z nápovědy.
Alternativa: převést na rozdíl. Předpoklad: $2^k - k^3 > 0$. Pak
$2^{k+1} - (k+1)^3 = 2 \cdot 2^k - k^3 - 3k^2 - 3k - 1 = 2(2^k - k^3) + k^3 - 3k^2 - 3k - 1 > 2 \cdot 0 + 0 = 0$.
9b.2: (0) $k = 4$: $16 < 24$ platí.
(1) $n \geq 4$, předpoklad $2^k < k!$. Pak $(k+1)! = (k+1) \cdot k! > k \cdot 2^k = \frac{k}{2} \cdot 2^{k+1} > 2^{k+1}$, protože pro $k \geq 4$ určitě platí $\frac{k}{2} > 1$.
9b.3: Nechť $a \in \mathbb{N}$. Nejprve dokažte, že pro $k \geq a$ platí $\frac{k-a}{k} \geq \frac{1}{2}$. Pak
$\frac{k!}{k^a} = \frac{1 \cdot 2 \cdots (k-a) \cdots (k-1)k}{k \cdots k} \geq \frac{k-a}{k} \cdots \frac{k-1}{k} \cdot k \geq \left(\frac{1}{2}\right)^a \cdot k \to \infty$.
Pro obecné $a > 0$ je $k^a \leq k^{\lceil a \rceil}$.
9b.4: Pro $A > 0$ libovolné označíme $d_k = q^k - Ak$ a najdeme $K \in \mathbb{N}$ takové, že $q^k > \frac{A+1}{q-1}$ pro $k \geq K$ (neboť $q^k \to \infty$). Pro tyto k pak $(q-1)q^k - A > 1$ a
$d_{k+1} = q^{k+1} - A(k+1) = q^k + (q-1)q^k - Ak - A = q^k - Ak + (q-1)q^k - A = d_k + (q-1)q^k - A > d_k + 1$.
9b.5: Pořadí je $\sqrt{k}$, $5k + \ln(k)$, $k\ln(k)$, $k^2 - 100k$, $2k^3$.
9b.6: (i): $\Theta\big(\sqrt{k}\big)$; (ii): $\Theta(k^3)$; (iii): $\Theta(2^k)$; (iv): $\Theta(k!)$.
9b.7: (i): $100k^2 = o(k^4)$: $\frac{100k^2}{k^4} = \frac{100}{k^2} \to 0$. $100k^2 = O(k^4)$: plyne z předchozího nebo přímo: $K = 1$, $k_0 = 10$, pak $k \geq k_0 \implies k^2 \geq 100 \implies 100k^2 \leq k^2 \cdot k^2 = 1 \cdot k^4$.
(ii): $L = 1$, $K = 4$, $k_0 = 7$, pak $k \geq k_0 \implies 1 \cdot k \leq 3k + 7$ a $k \geq k_0 \implies 3k + 7 \leq 3k + k = 4k$.
(iii): Předpoklad $k \geq 5$, pak $\frac{k!}{k^4} = 1 \cdot 2 \cdot \cdot (k-5) \frac{k-4}{k} \frac{k-3}{k} \frac{k-2}{k} \frac{k-1}{k} k \geq \frac{k-4}{k} \frac{k-3}{k} \frac{k-2}{k} \frac{k-1}{k} k \to 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \infty = \infty$.
(iv): $L = \frac{1}{2}$, $K = 2$, $k_0 = 6$, pak $k \geq k_0 \implies k + 3\sin(k) \leq k + 3 \leq k + k = 2k$ a díky $3 \leq \frac{1}{2}k$ také $k \geq k_0 \implies k + 3\sin(k) \geq k - 3 \geq k - \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}k$.

9c. Sumy

Uvažujme nějakou konečnou posloupnost $\{a_k\}_{k=n}^m$. Znamená to, že máme nějaká čísla. Co s nimi můžeme dělat? Třeba sečíst. Abychom nemuseli pořád psát $a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m$, zavedeme pro to značení $\sum\limits_{k=n}^m a_k$. Má to jeden drobný zádrhel, tři tečky nejsou zrovna přesné matematické vyjádření. Pokud chceme sumu definovat řádně, musíme to udělat indukcí. Budeme definovat sumy libovolné velikosti, takže si na začátku rovnou vezmeme nekonečnou posloupnost.

! **Definice.**
Nechť $\{a_k\}_{k=n}^\infty$ je posloupnost. Definujeme

$$\sum_{k=n}^{n} a_k = a_n,$$

$$\sum_{k=n}^{m+1} a_k = \Big(\sum_{k=n}^{m} a_k\Big) + a_{m+1} \qquad \text{pro } m \geq n.$$

Pokud $m < n$, pak definujeme $\sum\limits_{k=n}^m a_k = 0$.

Názvosloví: **dolní mez** n, **horní mez** m, **sumační značení sigma** Σ, **sumační index** k.

! Co taková suma vlastně znamená? Reprezentuje určité číslo, které závisí na sčítané posloupnosti, na mezích, ale vůbec ne na k, to je jen pracovní proměnná, která plní svou roli uvnitř sumy, ven ale nepronikne. Je to pěkně vidět z těchto příkladů:

$$\sum_{k=1}^{4}(2k+1) = (2\cdot 1+1)+(2\cdot 2+1)+(2\cdot 3+1)+(2\cdot 4+1) = 3+5+7+9 = 24,$$

$$\sum_{k=13}^{15} a_k = a_{13} + a_{14} + a_{15},$$

$$\sum_{k=n}^{m} k^2 = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots + (m-1)^2 + m^2.$$

Jak vidíme, v žádném výsledku napravo k vůbec není, samozřejmě ale vidíme, že ostatní prvky sumy (členy posloupnosti, meze) tam už vidět jsou, na nich výsledek přirozeně závisí. Protože je k čistě interní a pracovní věc, můžeme si ji nazvat jak chceme, takže $\sum_{k=n}^m a_k = \sum_{i=n}^m a_i = \sum_{h=n}^m a_h = \ldots$

! Dokonce můžeme sumační index posouvat, to se někdy hodí. Funguje to jako standardní substituce: Když máme sumu s indexem k, tak si můžeme zvolit nový index, třeba i, který je s k svázán vzorcem typu $i = k + A$. Všechny výskyty k v sumě se pak musí nahradit i, ale přesně podle toho substitučního vzorce, takže namísto k píšeme $k = i - A$, meze se musí také změnit. Například dolní mez je dána podmínkou $k = n$, takže nejmenší hodnota i je $i = k + A = n + A$. Ukážeme příklad:

$$\sum_{k=3}^{7} a_k = \left|\begin{array}{c} i = k-2 \\ k = i+2 \\ k = 3 \mapsto i = 3-2 = 1 \\ k = 7 \mapsto i = 7-2 = 5 \end{array}\right| = \sum_{i=1}^{5} a_{i+2}.$$

Je to opravdu totéž? Porovnáme ty sumy:

$$\sum_{k=3}^{7} a_k = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7,$$

$$\sum_{i=1}^{5} a_{i+2} = a_{1+2} + a_{2+2} + a_{3+2} + a_{4+2} + a_{5+2} = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7.$$

Jaké operace budeme se sumami provádět? Jako inspiraci se podíváme na dva příklady s jednoduchými sumami, které si vždy přepíšeme do „dlouhého“ zápisu se všemi členy. Sumu můžeme chtít vynásobit číslem a pak zjednodušit pomocí distributivního zákona:

$$c\sum_{k=1}^{3} a_k = c(a_1 + a_2 + a_3) = ca_1 + ca_2 + ca_3 = \sum_{k=1}^{3}(ca_k).$$

Můžeme také chtít sumy sčítat, teď pro změnu použijeme komutativitu a asociativitu sčítání.

$$\sum_{k=1}^{3} a_k + \sum_{k=1}^{3} b_k = (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) = \sum_{k=1}^{3} (a_k + b_k).$$

Obecně platí, že když máme nějaký vztah se sumami, který nám není úplně jasný, tak se vyplatí zkusit si nějakou kratší sumu rozvinout do dlouhého zápisu a pak je většinou hned vidět, co se děje.

Výše zmíněné dva příklady nás inspirují k obecné definici. Má to ale háček. Pokud například zkusíme sečíst $\sum\limits_{k=1}^{2} a_k$ a $\sum\limits_{k=1}^{1} b_k$, nedokážeme už výsledný výraz $(a_1 + b_1) + a_2$ zapsat jednou sumou. Jinými slovy, abychom mohli sčítat, potřebujeme stejné meze u zúčastněných sum.

!

Definice.
Uvažujme sumy $\sum\limits_{k=n}^{m} a_k$, $\sum\limits_{k=n}^{m} b_k$ a $c \in \mathbb{R}$. Definujeme

$$c \cdot \Bigl(\sum_{k=n}^{m} a_k \Bigr) = \sum_{k=n}^{m} (c \cdot a_k),$$

$$\Bigl(\sum_{k=n}^{m} a_k \Bigr) + \Bigl(\sum_{k=n}^{m} b_k \Bigr) = \sum_{k=n}^{m} (a_k + b_k).$$

Všimněte si, že obě rovnosti lze číst oběma směry. První z nich při čtení zprava doleva říká, že ze sumy lze vytknout společný násobící faktor. Druhá při čtení zprava doleva říká, že sumu se členy, které umíme napsat jako součty (stejným způsobem), lze roztrhnout na dvě.

Pokud máme dvě sumy, potřebujeme je sečíst a jejich meze indexů nejsou stejné, pak jsou dvě možnosti. Jestliže mají obě sumy stejnou „délku“ (stejný počet členů), tak se dá u jedné z nich indexace posunout, aby už meze souhlasily. Pokud jsou počty členů různé, tak už posun nepomůže. Pokud je ale opravdu nutně potřebujeme sečíst do jedné sumy, budeme muset z té delší nějaké členy odtrhnout. To není problém, sumy se dají rozpojovat a spojovat, pokud indexace navazuje, třeba

$$\sum_{k=1}^{3} a_k + \sum_{k=4}^{5} a_k = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \sum_{k=1}^{5} a_k,$$

$$\sum_{k=12}^{27} c_k = \sum_{k=12}^{20} c_k + \sum_{k=21}^{27} c_k.$$

Posvětíme si to oficiálně:

!

Fakt 9c.1.
Nechť $\{a_k\}_{k=n_0}^{\infty}$ je posloupnost. Pro libovolné $m, n, p \in \mathbb{Z}$ splňující $n_0 \leq n \leq m \leq p$ platí

$$\sum_{k=n}^{p} a_k = \sum_{k=n}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{p} a_k.$$

Tuto rovnost je možné používat oběma směry, tedy rozdělovat sumu na části či sumy spojovat do jedné. Lze pak i odečítat, například $\sum\limits_{k=1}^{8} a_k - \sum\limits_{k=4}^{8} a_k = \sum\limits_{k=1}^{3} a_k$ (rozepište si to, pokud to ještě nevidíte).

Příklad 9c.a: Chceme sečíst $\sum\limits_{k=1}^{3} a_k$ a $\sum\limits_{k=2}^{6} b_k$. Nejprve v druhé sumě posuneme index tak, aby indexace začínala jedničkou, to zajistí substituce $i = k - 1$, pak nejmenší hodnota $k = 2$ přejde na novou dolní mez $i = 2 - 1 = 1$. Protože má druhá suma více členů, nebude nám ale souhlasit horní mez, tak členy navíc odebereme. Protože chceme sčítat, vrátíme se v druhé sumě od indexu i zpět k indexu k, abychom měli stejné písmenko. Není to nutné, ale méně to mate.

$$\sum_{k=1}^{3} a_k + \sum_{k=2}^{6} b_k = \sum_{k=1}^{3} a_k + \sum_{i=1}^{5} b_{i+1} = \sum_{k=1}^{3} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_{k+1} = \sum_{k=1}^{3} a_k + \sum_{k=1}^{3} b_{k+1} + b_5 + b_6 = \sum_{k=1}^{3} (a_k + b_{k+1}) + b_4 + b_5.$$

△

Je důležité umět se sumami hbitě pracovat, ale jak jsme právě viděli, jde vlastně o staré dobré algebraické triky, jen v novém kabátě, takže to snad nebude problém.

Dobrá otázka je, kolik je součet dané sumy. Pokud je krátká, tak vždycky můžeme sundat boty a začít sčítat na prstech, ale pro delší sumy či sumy s proměnnými mezemi je dobré znát nějaké vzorce. Začneme součtem asi nejužitečnější posloupnosti.

!

Věta 9c.2. (součet geometrické posloupnosti)
Uvažujme $q \in \mathbb{R}$. Pak

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1; \\ n+1, & q = 1. \end{cases}$$

Důkaz (poučný)**:** Označme $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$. Pak $q \cdot s_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$, proto $qs_n - s_n = q^{n+1} - 1$, tedy $(q-1)s_n = q^{n+1} - 1$. Jestliže je $q \neq 1$, můžeme vydělit a máme $s_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Kdyby $q = 1$, tak rovnou vidíme, že $\sum\limits_{k=0}^{n} 1 = 1 + 1 + \dots + 1$, sčítáme 1 celkem $(n+1)$-krát (opravdu? začínáme s indexem 0, tím to vyskočí o jedno, zkuste si pár sum), takže $s_n = n + 1$.

□

Tento základní vzorec pak umožní zpracovat i sumy obecnějších geometrických výrazů. Sčítat $\sum\limits_{k=0}^{n} aq^k$ je snadné, stačí to a vytknout a můžeme použít již známý vzorec. Zajímavější případ je, pokud indexace nezačíná nulou. Pak se dá s úspěchem použít vytýkací trik. Je velice snadný, jak uvidíme z následujícího příkladu, jako obvykle nám výrazně pomůže dlouhý zápis:

$$\sum_{k=13}^{16} aq^k = aq^{13} + aq^{14} + aq^{15} + aq^{16} = q^{13}(a + aq + aq^2 + aq^3) = q^{13} \sum_{k=0}^{3} aq^k.$$

Obecně dojdeme ke vzorci (pro $q \neq 1$)

$$\sum_{k=N}^{n} aq^k = q^N a \frac{1 - q^{n-N+1}}{1-q}.$$

Ukážeme si formální důkaz, použijeme v něm vytknutí společného násobku ze sumy a substituci:

$$\sum_{k=N}^{n} aq^k = \sum_{k=N}^{n} aq^N q^{k-N} = aq^N \sum_{k=N}^{n} q^{k-N} = \left| \begin{array}{c} i = k - N \\ k = 3 \mapsto i = N - N = 0 \\ k = n \mapsto i = n - N \end{array} \right| = aq^N \sum_{i=0}^{n-N} q^i = q^N a \frac{1 - q^{n-N+1}}{1-q}.$$

Dalším populárním typem výrazu, který často sčítáme, jsou mocniny.

Věta 9c.3. (součty mocnin)
Následující vzorce platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$:

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$;

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$;

(iii) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

(iv) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Důkaz (poučný)**:** Takovéto vzorce se evidentně dokazují matematickou indukcí, (ii) a (iii) máme jako cvičení v kapitole o indukci, (iv) si laskavý čtenář během 17 vteřin dodělá sám. Správná otázka ale zní, jak se na ty vzorce přijde. Tak (i) je snadné, prostě sčítáme n jedniček. Což takhle (ii)?

Vzorec pro tento součet vymyslel Gauss, když byl malé nechutně chytré dítě. Učitel jej nechal sečíst prvních 100 čísel, ať má od něj chvíli pokoj, takže byl notně překvapen, když mu malý Johann za chvíli hlásil výsledek. Jak na to přišel? Představme si takový součet, pro začátek pro sudé n:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n.$$

Všimněte si, že první a poslední číslo dají dohromady $n+1$. Také druhé číslo zleva a zprava dají dohromady $n+1$. Také třetí ... Takových dvojic je přesně $\frac{n}{2}$, takže součet je $\frac{n}{2}(n+1)$.

Co když je n liché? Pak máme $\frac{1}{2}(n-1)$ dvojic a prostřední číslo zůstane osamocené, je to číslo $\frac{1}{2}(n+1)$ (zkuste si to na nějakém příkladě). Celkový součet je tedy $\frac{1}{2}(n-1)(n+1)+\frac{1}{2}(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)$.

Jiný trik jak to vidět: Napíšeme si tu sumu dvakrát pod sebe, jednou jako $s=1+2+\cdots+(n-1)+n$, podruhé jako $s=n+(n-1)+\cdots+2+1$, když sečteme, dostaneme nalevo $2s$, napravo n dvojic se součtem $n+1$, teď už nemusíme rozlišovat mezi sudými a lichými n.

Někteří autoři tu příhodu s Gaussem považují za bajku, takže si ukážeme jiný postup.

Začíná takto: Víme, že $(k+1)^2-k^2=2k+1$. Co dostaneme, když takovéto členy začneme sčítat? Nejprve příklad:

$$\sum_{k=1}^{3}[(k+1)^2-k^2]=[2^2-1^2]+[3^2-2^2]+[4^2-3^2]=4^2-1^2.$$

Jinými slovy, všechny „prostřední“ členy se pokrátí. Obecně máme toto:

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^2-k^2]=(n+1)^2-1^2,$$

ale také

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^2-k^2]=\sum_{k=1}^{n}[2k+1]=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=2\sum_{k=1}^{n}k+n.$$

Proto

$$(n+1)^2-1=2\sum_{k=1}^{n}k+n \implies \sum_{k=1}^{n}k=\tfrac{1}{2}[(n+1)^2-1-n]=\tfrac{1}{2}n(n+1).$$

(iii): Podobný trik.

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3-k^3]=(n+1)^3-1^3,$$

ale také

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3-k^3]=\sum_{k=1}^{n}[3k^2+3k+1]=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\cdot\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\tfrac{3}{2}n(n+1)+n.$$

Máme tedy

$$(n+1)^3-1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\tfrac{3}{2}n(n+1)+n \implies \sum_{k=1}^{n}k^2=\tfrac{1}{3}\big((n+1)^3-1-\tfrac{3}{2}n(n+1)-n\big)=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(iv): Podobný trik. Všimněte si, že při nalezení součtu $\sum k^2$ jsme potřebovali znát součet $\sum k$ a součet $\sum 1$. Teď si budeme hrát s $(k+1)^4-k^4$ a budeme potřebovat znát součty $\sum k^2$, $\sum k$ a $\sum 1$. Přenecháme to čtenáři, pokud se ještě nudí, může si zkusit nalézt $\sum k^4$.

□

Gaussův trik je užitečný, protože díky němu získáme okamžitě také součet sumy, která má ustřihnutý začátek: $\sum\limits_{k=m}^{n}k=\frac{1}{2}(n-m+1)(n+m)$. Samozřejmě to lze vždy získat rozdílem dvou sum, třeba

$$\sum_{k=m}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{m-1}k^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\tfrac{1}{6}(m-1)m(2m-1).$$

Alternativní způsob, jak najít uzavřené vzorce pro rozličné součty, čtenář najde v kapitole , viz příklad a cvičení .

Příklad 9c.b:

$$\sum_{k=50}^{150}k=\sum_{k=1}^{150}k-\sum_{k=1}^{49}k=\tfrac{1}{2}150\cdot151-\tfrac{1}{2}49\cdot50=25\cdot(3\cdot151-49)=10100.$$

△

Ještě jednu sumu se naučíme sčítat, a to aritmetickou.

Věta 9c.4. (součet aritmetické posloupnosti)
Uvažujme čísla $a,d\in\mathbb{R}$. Pak
$$\sum_{k=0}^{n}(a+dk)=(n+1)a+\frac{1}{2}n(n+1)d.$$

Důkaz (rutinní)**:** Toto je snadné,
$$\sum_{k=0}^{n}(a+dk)=\sum_{k=0}^{n}a+d\sum_{k=0}^{n}k=(n+1)a+\frac{1}{2}n(n+1)d.$$
□

Trochu jiný (a obecnější) výsledek lze dostat zase pomocí Gaussova triku. Zkuste si na několika příkladech ověřit, že jestliže $\{a_k\}$ je libovolná aritmetická posloupnost, pak zase napsáním dvou kopií pod sebe, jen v opačném pořadí, dostáváme dvojice se stále stejným součtem. Dostáváme tak vzorec $\sum\limits_{k=N}^{n}a_k=\frac{1}{2}(n-N+1)(a_N+a_n)$.

Se sumami se dají dělat zajímavé věci. Jedna je možnost sčítat přes indexy, které netvoří souvislou posloupnost od dolní meze k horní. Pokud si zvolíme konečnou množinu $M\subseteq\mathbb{Z}$, můžeme definovat $\sum\limits_{k\in M}a_k$. Význam je zjevný, například volba $M=\{13,23\}$ dává $\sum\limits_{k\in M}a_k=a_{13}+a_{23}$. Pro úplnost ještě zadefinujeme, že $\sum\limits_{k\in\emptyset}a_k=0$.

Ještě zajímavější to je, pokud je součástí sumy další suma. Ty se dají vždy rozbalit, někdy to jde lépe zevnitř, jindy zvenčí.

Příklad 9c.c: a) U výrazu $\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{3}i^2j$ to vyjde v zásadě nastejno. Nejprve ukážeme postup, kdy začneme rozepisovat vnější sumu, pak postup, kdy začneme zevnitř.
$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}i^2j=\sum_{j=1}^{3}1^2j+\sum_{j=1}^{3}2^2j=(1^2\cdot1+1^2\cdot2+1^2\cdot3)+(2^2\cdot1+2^2\cdot2+2^2\cdot3)=30,$$
$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}i^2j=\sum_{i=1}^{2}(i^2\cdot1+i^2\cdot2+i^2\cdot3)=\sum_{i=1}^{2}6i^2=6\cdot1^2+6\cdot2^2=30.$$

b) U následující sumy je rozvíjení zvenčí výrazně snažší, protože pak se dozvíme, jaké jsou vlastně meze vnitřní sumy. Pokud začneme zevnitř, budeme muset sčítat $\sum_j j$ s proměnnými mezemi.
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i}^{3}(i+j)&=\sum_{j=1}^{3}(1+j)+\sum_{j=2}^{3}(2+j)+\sum_{j=3}^{3}(3+j)\\&=[(1+1)+(1+2)+(1+3)]+[(2+2)+(2+3)]+[(3+3)]=24\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i}^{3}(i+j)&=\sum_{i=1}^{3}\Big[i\cdot\sum_{j=i}^{3}1+\sum_{j=i}^{3}j\Big]=\sum_{i=1}^{3}\Big[i\cdot(3-i+1)+\frac{1}{2}(3-i+1)(i+3)\Big]=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(9i-3i^2+12)\\&=\frac{1}{2}\Big[9\sum_{i=1}^{3}i-3\sum_{i=1}^{3}i^2+12\sum_{i=1}^{3}1=\frac{1}{2}\Big[9\cdot\frac{1}{2}\cdot3\cdot4-3\cdot\frac{1}{6}\cdot3\cdot4\cdot7+12\cdot3\Big]=\frac{1}{2}\cdot48=24.\end{aligned}$$

c) Pokud ale vnější suma nemá konkrétní meze, pak rozvíjením zvenčí stejně nic nezískáme, ani to dokonce nejde (když nevíme konkrétně, jaké indexy vnější suma používá). Pak nezbývá než se s tím poprat zevnitř.
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}1&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}j=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}i(i+1)=\frac{1}{2}\Big[\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i\Big]\\&=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\Big]=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).\end{aligned}$$
△

Posloupnosti je možné také násobit. Neformálně jsme to už dělali v kapitole .

!

Definice.
Nechť $\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$ je posloupnost. Definujeme

$$\prod_{k=n}^{n} a_k = a_n,$$

$$\prod_{k=n}^{m+1} a_k = \Big(\prod_{k=n}^{m} a_k\Big) \cdot a_{m+1} \qquad \text{pro } m \geq n.$$

Pokud $m < n$, pak definujeme $\prod\limits_{k=n}^{m} a_k = 1$.

Takže například $\prod\limits_{k=3}^{7} a_k = a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7$. Toto značení je velice pohodlné hlavně v případě, kdy je počet činitelů dán obecně, například můžeme psát $n! = \prod\limits_{k=1}^{n} k$. Všimněte si, že díky definici prázdného součinu jako jedničky tento vzorec funguje i pro $n = 0$.

Cvičení

Cvičení 9c.1 (rutinní)**:** Spočítejte následující sumy přímým výpočtem, bez použití vzorců.

(i) $\sum\limits_{k=1}^{5}(k+1)$; (iv) $\sum\limits_{k=0}^{8}(2^{k+1}-2^k)$; (vii) $\sum\limits_{k=0}^{4}(3k+2)$;

(ii) $\sum\limits_{i=0}^{4}(-3)^i$; (v) $\sum\limits_{k=0}^{4} 3\cdot 2^k$; (viii) $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=2}^{i}(i-j)$;

(iii) $\sum\limits_{k=1}^{10} 13$; (vi) $\sum\limits_{k=0}^{8}(1+(-1)^k)$; (ix) $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=i}^{4} j$.

Cvičení 9c.2 (rutinní)**:** Spočítejte následující sumy pomocí vhodných vzorců.

(i) $\sum\limits_{k=0}^{25}\left(\frac{1}{2}\right)^k$; (iv) $\sum\limits_{k=23}^{32}\left(\frac{3}{2}\right)^k$; (vii) $\sum\limits_{k=100}^{200}(2k+1)$;

(ii) $\sum\limits_{k=3}^{33} 2^k$; (v) $\sum\limits_{k=0}^{12}(3^k-2^k)$; (viii) $\sum\limits_{i=1}^{10}\sum\limits_{j=i}^{20} 12$;

(iii) $\sum\limits_{k=10}^{100} 10^k$; (vi) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^k$; (ix) $\sum\limits_{i=1}^{10}\sum\limits_{j=1}^{i} 12j$.

Cvičení 9c.3 (rutinní)**:** Slučte následující sumy do jedné.

(i) $3\sum\limits_{k=-2}^{7} k + \sum\limits_{i=-2}^{7}(1-i)$; (iii) $\sum\limits_{i=-2}^{10} i^2 - \sum\limits_{j=1}^{13} j^2$;

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{123}\frac{1}{n} + \sum\limits_{j=1}^{123}\frac{j-1}{j}$; (iv) $\sum\limits_{i=3}^{13} i - \sum\limits_{m=0}^{13} m^2$.

Cvičení 9c.4 (dobrý, poučný)**:** Dokažte, že pro libovolné $k, m \in \mathbb{N}_0$ platí

$$(x^{(m-1)k} + x^{(m-2)k} + \dots + x^{3k} + x^{2k} + x^k + 1)(x^k - 1) = x^{km} - 1.$$

Nápověda: Zapište si ten levý polynom jako sumu, pak roznásobte ten pravý a sjednoťte sumy.
Všimněte si, že pro $k = 1$ dostáváte $(x^m - 1) = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)$, zobecnění známého vzorce $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

Řešení:

9c.1: (i): $2+3+4+5+6 = 20$; (ii): $1-3+9-27+81 = 61$; (iii): $13+13+\dots+13 = 10\cdot 13 = 130$;
(iv): $(2^1-2^0)+(2^2-2^1)+(2^3-2^2)+(2^4-2^3)+(2^5-2^4)+(2^6-2^5)+(2^7-2^6)+(2^8-2^7)+(2^9-2^8) = 2^9-1 = 511$;
(v): $= 3(1+2+4+8+16) = 3\cdot 31 = 93$; (vi): $2+0+2+0+2+0+2+0+2 = 10$; (vii): $2+5+8+11+14 = 40$;
(viii): $\sum\limits_{j=2}^{1}(1-j) + \sum\limits_{j=2}^{2}(2-j) + \sum\limits_{j=2}^{3}(3-j) + \sum\limits_{j=2}^{4}(4-j) = 0+0+(1+0)+(2+1+0) = 4$;
(ix): $\sum\limits_{j=1}^{4} j + \sum\limits_{j=2}^{4} j + \sum\limits_{j=3}^{4} j + \sum\limits_{j=4}^{4} j = (1+2+3+4)+(2+3+4)+(3+4)+4 = 30$.

9c.2: (i): $\dfrac{1-(\frac{1}{2})^{26}}{1-\frac{1}{2}} = 2\big(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{26}\big) = 2 - \frac{1}{2^{25}}$; (ii): $2^3\sum\limits_{k=0}^{30} 2^k = 2^3\frac{1-2^{31}}{1-2} = 2^3(2^{31}-1) = 17179869176$

nebo $\sum\limits_{k=0}^{33} 2^k - 2^0 - 2^1 - 2^2 = \frac{1-2^{34}}{1-2} - 1 - 2 - 4 = 2^{34} - 8 = 17179869176$;

(iii): $10^{10} \sum\limits_{k=0}^{90} 10^k = 10^{10} \frac{1-10^{91}}{1-10} = 10^{10} \frac{1}{9}(10^{91} - 1)$; (iv): $\bigl(\frac{3}{2}\bigr)^{23} \sum\limits_{k=0}^{9} \bigl(\frac{3}{2}\bigr)^k = \bigl(\frac{3}{2}\bigr)^{23} \dfrac{1-(\frac{3}{2})^{10}}{1-\frac{3}{2}} = 2\bigl(\frac{3}{2}\bigr)^{23}\Bigl(\bigl(\frac{3}{2}\bigr)^{10} - 1\Bigr)$;

(v): $\sum\limits_{k=0}^{12} 3^k - \sum\limits_{k=0}^{12} 2^k = \frac{1-3^{13}}{1-3} - \frac{1-2^{13}}{1-2} = \frac{1}{2}(3^{13} - 1) + 2^{13} - 1 = 805352$; (vi): $\dfrac{1}{1-\frac{4}{5}} = 5$;

(vii): $2\Bigl(\sum\limits_{k=1}^{200} k - \sum\limits_{k=1}^{99} k\Bigr) + \sum\limits_{k=100}^{200} 1 = 2\bigl(\frac{1}{2}200 \cdot 201 - \frac{1}{2}99 \cdot 100\bigr) - (200 - 100 + 1) \cdot 1 = 30199$;

(viii): $\sum\limits_{i=1}^{10} (20 - i + 1) \cdot 12 = 12\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{10} 21 - \sum\limits_{i=1}^{10} i\Bigr) = 12\bigl(10 \cdot 21 - \frac{1}{2}10 \cdot 11\bigr) = 1860$;

(ix): $\sum\limits_{i=1}^{10} 12 \sum\limits_{j=1}^{i} j = \sum\limits_{i=1}^{10} 12\frac{1}{2}i(i+1) = \sum\limits_{i=1}^{10} 6i^2 + \sum\limits_{i=1}^{10} 6i = 6 \cdot \frac{1}{6}10 \cdot 11 \cdot 21 + 6 \cdot \frac{1}{2}10 \cdot 11 = 5640$.

9c.3: (i): $= 3\sum\limits_{k=-2}^{7} k + \sum\limits_{k=-2}^{7} (1-k) = \sum\limits_{k=-2}^{7} (3k + 1 - k) = \sum\limits_{k=-2}^{7} (2k+1)$.

(ii): $= \sum\limits_{n=1}^{123} \frac{1}{n} + \sum\limits_{n=1}^{123} \frac{n-1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{123} \bigl(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\bigr) = \sum\limits_{n=1}^{123} 1 = 123$.

(iii): $= \left|\begin{array}{c} j = i+3 \\ i = j-3 \\ i = -2 \mapsto j = 1 \\ i = 10 \mapsto j = 13 \end{array}\right| = \sum\limits_{j=1}^{13} (j-3)^2 - \sum\limits_{j=1}^{13} j^2 = \sum\limits_{j=1}^{13} [(j-3)^2 - j^2] = \sum\limits_{j=1}^{13} (9 - 6j)$.

(iv): $= \left|\begin{array}{c} m = i-2 \\ i = m+2 \\ i = 3 \mapsto m = 1 \\ i = 13 \mapsto m = 11 \end{array}\right| = \sum\limits_{m=1}^{11} (m+2) - \sum\limits_{m=1}^{13} m^2 = \sum\limits_{m=1}^{11} (m+2) - \Bigl(\sum\limits_{m=1}^{11} m^2 + 12^2 + 13^2\Bigr)$

$= \sum\limits_{m=1}^{11} (m + 2 - m^2) - 12^2 - 13^2$.

9c.4:

$$\Bigl(\sum_{i=0}^{m-1} x^{ik}\Bigr)(x^k - 1) = \Bigl(\sum_{i=0}^{m-1} x^{ik}\Bigr)x^k - \sum_{i=0}^{m-1} x^{ik} = \sum_{i=0}^{m-1} x^{(i+1)k} - \sum_{i=0}^{m-1} x^{ik} = \sum_{j=1}^{m} x^{jk} - \sum_{i=0}^{m-1} x^{ik}$$

$$= x^{mk} + \sum_{j=1}^{m-1} x^{jk} - \sum_{i=1}^{m-1} x^{ik} - x^{0\cdot k} = x^{mk} - 1.$$

9d. Řady

Tato kapitola je silně doplňková. Čtenář ji bude potřebovat v zásadě jen tehdy, pokud bude chtít řešit rekurentní rovnice pomocí generujících funkcí (kapitola).

Jedna z věcí, kterou s čísly běžně děláme, je jejich sečtení. Když máme nekonečnou posloupnost, tak máme čísel nekonečně mnoho, nicméně to neodradí odhodlaného průkopníka od pokusu sečíst i je. Zjevně to ale nebude nic lehkého, počínaje filosofickou otázkou, zda vůbec lze v konečném čase, který nám v životě zbývá, provést nekonečně mnoho sčítání.

Matematická analýza k tomuto problému přistupuje tradičním způsobem, snažíme se vyjít od toho, co umíme. Myšlenka je jednoduchá, začneme prostě čísla postupně sčítat a díváme se, jak se chovají obdržené mezivýsledky. Pokud se po čase v zásadě přestávají měnit, tak usoudíme, že jsme se dostali k číslu, které představuje součet úplně všech členů dotyčné posloupnosti.

Definice.
Nechť $\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$ je posloupnost. Pro $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n$ definujeme **částečné součty** jako $s_N = \sum\limits_{k=n}^{N} a_k$.

Řekneme, že **řada** $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ **konverguje** k číslu A, značeno $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k = A$, jestliže $\lim\limits_{N\to\infty}(s_N) = A$. Jinak řekneme, že dotyčná řada **diverguje**.

Pokud $\lim\limits_{N\to\infty}(s_N) = \infty$, pak značíme $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k = \infty$.

Let $\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$ be a sequence. For $N\in\mathbb{N}$, $N\geq n$ we define **partial sums** by $s_N=\sum\limits_{k=n}^{N}a_k$.

We say that the **series** $\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k$ **converges** to a number A, denoted $\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k=A$, if $\lim\limits_{N\to\infty}(a_N)=A$. Otherwise we say that the series **diverges**.

Příklad 9d.a: 1) Uvažujme řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty}0=0+0+0+0+\cdots$.

Tipneme si, že by součet měl vyjít 0. Pozná to naše definice?

Vezměme $N\in\mathbb{N}$, příslušný částečný součet pak je $s_N=\sum\limits_{k=1}^{N}0=0+0+\cdots+0=0$ (sčítáme N nul). Když pošleme N do nekonečna, tak evidentně $s_N\to 0$, a proto podle definice zkoumaná řada konverguje, navíc $\sum\limits_{k=1}^{\infty}0=0$.

2) Uvažujme řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty}1=1+1+1+1+\cdots$.

Tipneme si, že by součet měl vyjít ∞. Pozná to naše definice?

Vezměme $N\in\mathbb{N}$, příslušný částečný součet pak je $s_N=\sum\limits_{k=1}^{\infty}1=1+1+\cdots+1=N$ (sčítáme N jedniček). Když pošleme N do nekonečna, tak evidentně $s_N\to\infty$, a proto podle definice zkoumaná řada diverguje, navíc $\sum\limits_{k=1}^{\infty}1=\infty$.

3) Uvažujme řadu $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k=(-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots=1-1+1-1+\cdots$.

Tady není jasné, co čekat, zeptáme se definice. Nejdříve se podíváme na pár částečných součtů pro inspiraci.

$$s_2=\sum_{k=0}^{2}(-1)^k=(-1)^0+(-1)^1+(-1)^2=1-1+1=1,\qquad s_3=\sum_{k=0}^{3}(-1)^k=1-1+1-1=0,$$

$$s_4=\sum_{k=0}^{4}(-1)^k=1-1+1-1+1=1,\qquad s_5=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k=1-1+1-1+1-1=0.$$

A teď obecně. Vezměme $N\in\mathbb{N}$, příklady a zamyšlení naznačují, že příslušný částečný součet pak je $s_N=\sum\limits_{k=0}^{N}(-1)^k=0$ pro N liché a $s_N=1$ pro N sudé. Posloupnost $\{s_N\}=\{1,0,1,0,1,0,\dots\}$ nemá limitu, tudíž ani příslušná řada nemůže konvergovat. Závěr je, že $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ diverguje.

Na rozdíl od předchozího příkladu teď nemáme součet nekonečno, takže už k tomu není co dodat.

4) Uvažujme řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$.

Jak vypadají částečné součty?

$$s_2=\sum_{k=1}^{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{3}{4},\qquad s_3=\sum_{k=1}^{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}=\tfrac{7}{8},$$

$$s_4=\sum_{k=1}^{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}=\tfrac{15}{16}.$$

Odhadneme, že pro $N\in\mathbb{N}$ platí $s_N=\frac{2^N-1}{2^N}=1-\frac{1}{2^n}$. Dokážeme to matematickou indukcí:

(0) Pro $N=1$: $s_1=\sum\limits_{k=1}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2^1}$.

(1) Vezměme libovolné $n\in\mathbb{N}$ a předpokládejme, že $s_N=1-\frac{1}{2^N}$. Pak

$$s_{N+1}=\sum_{k=1}^{N+1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k=\sum_{k=1}^{N}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k+\frac{1}{2^{N+1}}=1-\frac{1}{2^N}+\frac{1}{2^{N+1}}=1-\frac{2-1}{2^{N+1}}=1-\frac{1}{2^{N+1}}.$$

Máme potvrzeno, že $s_N=1-\frac{1}{2^N}$, a protože $2^N\to\infty$, dostáváme $\lim(s_N)=1-0=1$.

Závěr: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ konverguje a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1$.

5) Uvažujme řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$.

Jak vypadají částečné součty?

$$s_2 = \sum_{k=1}^{2} \tfrac{1}{k} = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}, \qquad s_3 = \sum_{k=1}^{3} \tfrac{1}{k} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{11}{6},$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^{4} \tfrac{1}{k} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{25}{12}, \qquad s_5 = \sum_{k=1}^{5} \tfrac{1}{k} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} = \tfrac{137}{60}.$$

Nevím jak vy, ale já v tom nic pěkného nevidím. Je to tím, že rozumné vyjádření pro s_n opravdu neexistuje, tahle řada je docela drsná. Zajímavým vtipným trikem, popřípadě snadným analytickým výpočtem se dá ukázat, že tato řada diverguje a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.

△

První tři příklady ukazují možné chování řad. Řady konvergují či divergují, a ty divergující mohou divergovat zajímavě (nasčítat se do nekonečna či mínus nekonečna) nebo nějakou oscilací, kdy už o výsledku sčítání nejde říct vůbec nic.

Čtvrtý příklad ukazuje, že konvergovat mohou i jiné řady než ta triviální nulová. V této souvislosti je dobré připomenout jeden výsledek zmatematické analýzy, že nutnou podmínkou konvergence řady je, aby její jednotlivé členy jako posloupnost šly k nule. Pak už je jasné, proč v případech 2) a 3) máme divergenci. Není to ale podmínka postačující, jak ukazuje příklad 5).

Ve skutečnosti je to tak, že konvergentní řady jsou ty, jejichž členy jdou k nule a to dostatečně rychle, přičemž význam „dostatečně" závisí mimo jiné i na tom, jaká se v řadě vyskytují znaménka. Porovnejme následující známé výsledky z analýzy:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \text{ konverguje},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots \text{ konverguje.}$$

Rychlost klesání členů posloupnosti $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ ještě není dostatečná k tomu, aby je šlo sečíst se zdárným výsledkem (konvergentní řada). Pokud ale u každého druhého členu změníme znaménka, tak už se tato čísla rozumně nasčítají, mimochodem, výsledek je $\ln(2)$. Členy posloupnosti $\left\{\frac{1}{k^2}\right\}$ klesají k nule tak rychle, že i když jim necháme plusy a posčítáme je, dostaneme rozumný výsledek.

Rozpoznat konvergenci řady je značně náročný problém a nejsou pro to jednoduché mechanismy. Analýza nabízí celou řadu nástrojů, ale nebudeme to zde potřebovat. Ukážeme si jeden typ řady, který umíme zvládnout, vraťme se na chvíli k příkladu 4). Můžeme si všimnout, že vlastně sčítáme geometrickou posloupnost, a pro částečný součet jsme měli výsledek, podle Věty máme $\sum\limits_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ pro $q \neq 1$. Ověřte si, že to souhlasí s výsledkem, který jsme tam odvodili—pozor na odlišný začátek indexace, řadě v příkladě 4) chyběl první člen $k = 0$ neboli jednička.

Když v tom vzorci pošleme $N \to \infty$, dostaneme obecný výsledek. Z něj se dá odvodit ještě jeden, který se bude hodit, tak jej přidáme.

Věta 9d.1.
(i) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ pro $|q| < 1$;
(ii) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1)q^k = \frac{1}{(1-q)^2}$ pro $|q| < 1$.

Řadám typu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ říkáme **geometrická řada** a jsou velice užitečné. Všimněte si mimochodem, že první čtyři příklady výše spadají do této kategorie.

Operace s řadami.

S řadami se dá manipulovat podobně jako se sumami. Můžeme posouvat indexy substitucí, můžeme řady sčítat a násobit číslem.

Definice.
Uvažujme řady $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$, nechť $c \in \mathbb{R}$. Definujeme operace

$$c\Bigl(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Bigr) = \sum_{k=0}^{\infty}(ca_k),$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k).$$

Tato definice je čistě formální, je to návod, jak sestavovat nové řady pomocí určitých pravidel. Někdo nám dá dvě řady, rozhodneme se je sečíst, tak si z obou vytáhneme koeficienty, po dvou sečteme a z výsledků sestavíme novou řadu. Dobrá otázka zní, co se děje se součty řad, když s nimi provádíme tyto operace. Mají součty nově vyrobených řad něco společného se součty řad původních?

Obecně to je občas zajímavé. Pokud například sečteme dvě řady, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1$ a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)$, které divergují, dostaneme řadu novou $\sum\limits_{k=1}^{\infty} [+1(-1)] = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 0$, která již konverguje. Pokud ale pracujeme čistě s konvergentními řadami, pak už věci fungují tak, jak bychom řádi, součet vzniklé řady se dá odvodit přirozeným způsobem z informace o řadách, se kterými jsme začali.

Věta 9d.2.
Uvažujme konvergentní řady $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = A$ a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = B$, nechť $c \in \mathbb{R}$. Pak konvergují i řady $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (ca_k) = cA$ a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = A + B$.

9d.3 Mocninné řady

Připomeňme geometrickou řadu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$, pro jejíž součet máme vzorec. Dá se na to nahlížet tak, že vlastně máme řadu s parametrem q a podle toho, co dosadíme, dostáváme buď číslo (řada konverguje), nebo se dozvíme, že takové dosazování k číslu nevede. Když se s q omezíme na interval $(-1,1)$, dostáváme předpis, který každému q přiřadí jisté číslo—jinými slovy, vznikla nám funkce. Protože bývá zvykem značit proměnnou jako x, můžeme napsat, že máme funkci $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$, jejíž definičním oborem je interval $(-1,1)$, kde dokonce pro ni máme i pohodlnější vyjádření: $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Není důvod se omezovat jen na sčítání výrazů x^k, může chtít sčítat třeba $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{tg}(k)}{x^2+k}$ pro různé hodnoty (volby) čísla x a položit si dvě zásadní otázky: Pro která x tak dostaneme konvergentní řadu? A když se na taková x omezíme, dokážeme pro součet řady najít rozumný vzorec?

Řady funkcí jsou vysoce náročná oblast matematické analýzy nabízející velice málo jednoduchých odpovědí. Je to tím, že funkcí je strašně hodně a s velice rozličným chováním, takže když se jich navíc pokoušíme sčítat nekonečně mnoho, dá se čekat spousta různých problémů. V takovýchto nepřehledných situacích se matematici tradičně zaměří na určitou menší skupinku objektů s pěkným chováním, které by zároveň byly užitečné. V teorii řad funkcí je takovouto klíčovou skupinou skupina řad, které by šlo lidově označit za polynomy nekonečného stupně.

Definice.
Pojem **mocninná řada** (**power series**) označuje libovolnou řadu ve tvaru $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, kde a_k, $k \in \mathbb{N}_0$ jsou pevně zvolená čísla (**koeficienty řady**) a x je proměnná.

Dvě mocninné řady jsme už viděli, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ (zde jsou všechny koeficienty $a_k = 1$) a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$.

Poznámka: Správně bychom měli říct „mocninná řada se středem v 0“, protože v analýze se hovoří obecně o mocninných řadách se středem c ve tvaru $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$. Pro naše účely by tato větší obecnost nic nepřinesla, je proto rozumné se zaměřit na nejjednodušší verzi.
$\triangle$

Je-li dána mocninná řada, zásadní otázka zní: Pro které hodnoty x bude po dosazení výsledná řada (teď už s reálnými čísly) konvergovat? Vždycky je možné najít alespoň jedno x, pro které to vyjde: Dosadíme-li do libovolné mocninné řady $x=0$, dostáváme $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 0 = 0$.

Ta otázka tedy ve skutečnosti zní, zda existují i jiná x, která dávají konvergentní řadu. Analytici dokazují, že množina takovýchto x je velice pěkná, vždy se jedná o interval kolem počátku. Je to tedy interval s krajními body $-\varrho$ a ϱ, tomuto číslu se říká poloměr konvergence řady.

Například již víme, že řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ konverguje pro $x\in(-1,1)$, má tedy poloměr konvergence $\varrho=1$. Všechna $\varrho\geq 0$ jsou možná, například existuje řada, pro kterou $\varrho=\infty$, tedy řada, která konverguje pro všechna reálná x, naopak jsou řady s $\varrho=0$, takové konvergují jen na intervalu $\langle 0,0\rangle=\{0\}$, tedy kromě povinné nuly už jiné x dosadit rozumně nelze.

Operace s mocninnými řadami.

Mocninné řady jsou také řady, takže je umíme sčítat a násobit číslem. Jak to dopadne?

$$c\Bigl(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\Bigr) = \sum_{k=0}^{\infty} c a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (c a_k) x^k,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k x^k + b_k x^k) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k.$$

Vidíme, že vznikají zase mocninné řady. U nich se nové koeficienty získají násobením či sečtením koeficientů původních řad, přesně jako u operací s polynomy. Jak tomu bude s výsledky u konvergujících řad?

Pokud výchozí řada/řady konvergují s poloměrem konvergence $\varrho>0$, tak už jejich součtem není jen číslo, ale funkce na určitém intervalu. Odpovídají si funkce na obou stranách rovností výše? Naštěstí ano, jinak by ta teorie moc užitečná nebyla.

Věta 9d.4.
Uvažujme mocninné řady $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, nechť $c\in\mathbb{R}$. Předpokládejme, že obě konvergují na nějakém intervalu I a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x)$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k = g(x)$ na I. Pak mocninné řady $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (c a_k) x^k$ a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k+b_k) x^k$ také konvergují na I a platí tam $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (c a_k) x^k = c f(x)$ a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k+b_k) x^k = f(x)+g(x)$.

Příklad 9d.b: Již víme, že $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ pro $x\in(-1,1)$. Dá se ukázat, že pro x z tohoto intervalu platí také vztah $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k = -\ln(1-x)$. Nemůžeme ale tyto dvě řady rovnou sečíst, protože nemají stejnou indexaci.

Pokud bychom se rozhodli vyřešit problém posunem indexu u druhé řady, nastane problém jinde:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} x^k = \left|\begin{matrix} i=k-1 \\ k=i+1 \\ k=1 \mapsto i=1-1=0 \end{matrix}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} x^k + \sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{1}{i+1} x^{i+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \bigl(x^k + \tfrac{1}{k+1} x^{k+1}\bigr).$$

V sumě se nám sešly rozdílné mocniny, takže výslednou řadu nelze upravit do tvaru mocninné řady. To není dobré, proto indexy sjednotíme jinou z oblíbných metod, prostě z té první řady vynecháme její první člen (daný idexem $k=0$), protože v druhé také není.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} x^k = \Bigl(x^0 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k\Bigr) + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} x^k = x^0 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} x^k = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \bigl(\tfrac{1}{k}+1\bigr) x^k.$$

Vznikla opravdu mocninná řada a podle věty výše konverguje přinejmenším na intervalu $(-1,1)$, kde je jejím součtem funkce $\frac{1}{1-x} - \ln(1-x)$.
△

Daná mocninná řada se dá modifikovat i více způsoby než jen vynásobením číslem. Shrneme si populární úpravy.

Věta 9d.5.
Uvažujme mocninnou řadu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, která konverguje na nějakém intervalu I a platí tam $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x)$. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $N \in \mathbb{N}_0$. Pak na vnitřku intervalu I konvergují i následující řady:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k x^k = c \cdot f(x);$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c^k a_k x^k = f(cx);$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+N} = x^N f(x);$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = f'(x).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k = x f'(x).$$

Druhý vztah je vlastně obyčejná substituce za proměnou: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c^k a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (cx)^k$, u třetího vztahu zase stačí vytknout:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+N} = \sum_{k=0}^{\infty} x^N a_k x^k = x^N \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = x^N f(x)$$

Zajímavý je čtvrtý vztah. Všimněte si, že vznikne zderivováním původní rovnosti $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x)$, přičemž nalevo namísto derivování celé řady derivujeme jen její členy. Zapsáno formálně, $\Big[\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k\Big]' = \sum\limits_{k=0}^{\infty} [a_k x^k]'$. Podobně lze ukázat, že řady lze takto i integrovat, viz nějaká kniha o analýze.

Celkové poučení z této věty se dá shrnout tak, že pokud máme řady konvergující na otevřeném intervalu, tak s nimi můžeme v zásadě zacházet jako s polynomy (sčítat, vynásobit mocninou, derivovat člen po členu atd). Tyto triky se nám budou hodit v kapitole

Příklad 9d.c: Víme, že $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ na intervalu $(-1,1)$.

Když tuto rovnost zderivujeme napravo i nalevo, dostáváme (čteno zprava)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \Big[\frac{1}{1-x}\Big]' = \Big[\sum_{k=0}^{\infty} x^k\Big]' = \sum_{k=0}^{\infty} [x^k]' = \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \left| \begin{array}{c} i = k-1 \\ k = i+1 \\ k=1 \mapsto i=0 \end{array} \right| = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) x^i.$$

Při přechodu na nový řádek jsme použili pozorování, že pro $k=0$ vychází $0 \cdot x^{-1} = 0$, tudíž lze tento člen a tento index z řady vynechat.

Jaký je závěr? Pomocí známého vzorce pro součet geometrické řady jsme dokázali vzorec (ii) z Věty .
△

Pokud pro nějakou funkci najdeme mocninnou řadu, která ji má jako svůj součet, tak říkáme, že jsme danou funkci rozvinuli v mocninnou řadu. Nejpopulárnější rozvoje jsou tyto:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots,\ x\in(-1,1);$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots,\ x\in\mathbb{R};$$

$$\sin(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,\ x\in\mathbb{R};$$

$$\cos(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots,\ x\in\mathbb{R};$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,\ x\in(-1,1\rangle.$$

Další rozvoje se dají získat z těchto pomocí úprav z věty výše.

Příklad 9d.d: Najdeme rozvoje pro následující funkce:

$$\frac{x}{1-x}=x\cdot\frac{1}{1-x}=x\cdot\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+1}=\sum_{i=1}^{\infty}x^i;$$

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\Big|y=-x\Big|=\frac{1}{1-y}=\sum_{k=0}^{\infty}y^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^{2k}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots;$$

$$\operatorname{arctg}(x)=\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int(-1)^kx^{2k}\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+C.$$

Nevíme, která hodnota C je správná, tak zkusíme dosadit nějaké konkrétní x do levé i pravé strany a uvidíme. Třeba volba $x=0$ dává $\operatorname{arctg}(0)=\sum 0+C$ neboli $0=C$. Máme tedy

$$\operatorname{arctg}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots.$$

Pokud dosadíme $x=1$, dostáváme $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ neboli $\pi=4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\cdots$, což je východisko pro některé populární metody výpočtu čísla π s libovolnou přesností.

△