11. Kombinatorika (Počítání)

Kombinatorika je nauka o uspořádání věcí, její důležitou součástí je schopnost věci spočítat. Dnešní podobu lze vystopovat do 17. století a vzhledem k tomu, že počítání hraje zásadní roli v pravděpodobnosti, tak asi nepřekvapí, že významným impulsem tehdy byly záležitosti ohledně sázení. Čtenář se pravděpodobně již s některými kombinatorickými věcmi setkal, možná se dokonce učil rozeznávat variace od kombinací, s opakováním či bez. Tyto znalosti jsou bezesporu užitečné, ale mají jedno významné omezení: Mnoho situací se do těchto jednoduchých škatulek nevejde. Dlouhodobě výhodnější je tedy rozumět základním principům a umět si pomocí nich rozmyslet i komplikované situace. Jinými slovy, tato oblast rozhodně není algoritmická, není to ten typ příkladů, kde se stačí naučit dostatečný počet vzorečků a úspěch je zaručen. Spíše je to umění, kde hodně záleží na dobrém pochopení základů, zkušenostech a invenci.

Zde do této oblasti spíš jen nahlédneme. Nejprve se podíváme na jednodušší situace, které v zásadě odpovídají oněm permutacím/variacím/kombinacím probíraným často na střední škole. V další kapitole zajdeme trochu dále. Protože u kombinatoriky záleží více než obvykle na zkušenostech, ukážeme víc než obvykle příkladů a cvičení.

11a. Základní principy

Začneme třemi základními principy, jejichž aplikací se dá v zásadě vyřešit většina běžných situací. Nebudeme je formulovat jako věty, už proto, že v nich nebudeme vždy používat přesnou matematickou terminologii. Vždy uvedeme dvě verze, jednu používající jazyka počítání, druhou používající jazyka množin.

! **11a.1. Sčítací princip**

• Jestliže je možné jistý proces rozdělit na dva disjunktní případy, kdy si proces vždy vybere právě jeden z těchto případů, první případ je možno provést n_1 způsoby a druhý n_2 způsoby, pak je proces možno provést $n_1 + n_2$ způsoby.

Zobecnění: Jestliže je možno jistý proces rozdělit na N případů, kdy si proces vždy vybere právě jeden z těchto případů, a i-tý případ je možno provést n_i způsoby, pak je proces možno provést $\sum_{i=1}^{N} n_i$ způsoby.

• Uvažujme množinu M objektů. Jestliže existuje rozklad $M = \bigcup_{i=1}^{N} M_i$ (tedy M_i jsou navzájem disjunktní), pak $|M| = \sum_{i=1}^{N} |M_i|$.

Toto asi nevyžaduje bližšího komentáře, už od dětství víme, že když si hromádku rozdělíme na více menších, tak je stačí posčítat zvlášť a pak výsledky sečíst. V kapitole 11b se podíváme na situaci, kdy množiny M_i nejsou disjunktní.

! **11a.2. Násobící princip**

• Předpokládejme, že jistý proces lze rozložit do dvou po sobě následujících fází. Jestliže je první fázi možné udělat vždy n_1 způsoby a druhou vždy (nezávisle na výsledku první fáze) n_2 způsoby, pak je celý proces možno udělat $n_1 \cdot n_2$ způsoby.

Zobecnění: Je-li N fází, každá vždy n_i způsoby, pak je celý proces možno provést $\prod_{i=1}^{N} n_i$ způsoby.

• Uvažujme množinu M počítaných objektů. Jestliže je $M = M_1 \times M_2$, pak $|M| = |M_1| \cdot |M_2|$.

Všimněte si, že druhé vyjádření není tak univerzální jako to první, nutí nás totiž vybírat do druhé fáze stále tytéž objekty, zatímco první vyjádření připouští také možnost, že si v závislosti na výsledku první fáze měníme množinu voleb v druhé fázi; jediná podmínka je, že musí mít vždy stejnou velikost. I to by se dalo vyjádřit matematicky, ale bylo by to komplikovanější, zatímco my se zde snažíme o uchopení základních myšlenek. Přidáme ještě jeden princip, asi nejvíce samozřejmý a možná nejméně používaný z těch tří, ale někdy vysoce užitečný.

! **11a.3. Doplňkový princip**

• Předpokládejme, že jistý proces lze provést dvěma způsoby, speciálním a nespeciálním. Pak je počet speciálních způsobů roven počtu všech způsobů provedení sníženým o počet nespeciálních způsobů provedení.

• Uvažujme množinu M počítaných objektů. Pak pro $M_1 \subseteq M$ platí $|M_1| = |M| - |M - M_1|$.

Teď si všechny tyto principy ukážeme v akci.

! Příklad 11a.a: V obchodě mají 6 různých druhů USB flashek. Čtyři kamarádi si je tam jdou koupit, každý jednu. Podíváme se na tuto situaci blíže.

a) Kolika způsoby mohou vejít do obchodu, pokud musí po jednom?

Jde o proces, který lze rozdělit na čtyři fáze. Jako prvního vstupujícího si můžeme vybrat ze čtyř. Tato volba ovlivní, kdo konkrétně může být zvolen jako druhý vstupující, ale neovlivní zásadní parametr: Pro druhého si vždy vybíráme ze tří kandidátů. Opět nezávisle na tom, kdo šel první a druhý, si pro třetího vybíráme ze dvou (i když pokaždé jiných, ale vždy dvou). Na čtvrté místo pak už je jen jedna volba. Je vidět, že jde přesně o situaci z násobícího principu, proto počet způsobů je $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$.

Tomuto typu situace, kdy jen měníme pořadí určité množiny objektů, říkáme permutování, a každému jejich konkrétnímu uspořádání říkáme permutace. Obecný vzorec evidentně bude, že existuje $n!$ permutací n různých objektů.

Poznámka: Pokud nemusí po jednom, jde o řádově těžší problém, viz příklad 11a.l.

b) Vešli do obchodu. Kolika různými způsoby si mohou vybrat flashky za předpokladu, že od každého druhu je jich dostatečný počet a zajímá nás, kdo si vybral jakou?

Kamarády můžeme očíslovat a nechat je vybírat jednoho po druhém. Každý z nich má na výběr ze šesti typů, jde tedy zase o násobící princip a odpověď zní $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$.

Zde to lze vidět i přes kartézský součin: V okamžiku, kdy kamarády očíslujeme, se vlastně ptáme na množství vektorů o čtyřech souřadnicích, které lze vytvořit, když máme 6 voleb pro každou souřadnici.

Formálně situaci, kdy záleží na tom, kdo si co vybere, říkáme „záleží na pořadí“ výběru. Tomu, že se tentýž druh může vyskytnout vícekrát, říkáme „volba s opakováním“. Naše úvahy tedy vedou ke konstatování, že když vybíráme k-krát z n různých objektů, s opakovaním a na pořadí záleží, pak je počet možných výsledků n^k.

c) Kolika různými způsoby si mohou vybrat flashky tak, aby měli každý jinou?

Zase jde o proces, který lze rozložit do fází. První kamarád má na výběr 6 možností. Tím ovšem omezí výběr druhého, ale ať už si první vybere cokoliv, druhý má na výběr vždy pět možností. Podobně pak třetí má jen čtyři a čtvrtý tři, konkrétní možnosti se vždy liší podle toho, co si vybrali ti předtím, ale důležité je, že počty jsou stejné. Je tedy $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ možných výběrů dle zadání.

Jak by se takový výsledek dal zapsat kompaktně a ještě tak, aby se v něm objevily parametry 6 a 4? Takto:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}.$$

Obecně když vybíráme k-krát z n různých objektů, na pořadí záleží a bez opakování, pak je to možné provést $\frac{n!}{(n-k)!}$ způsoby.

d) Kolika různými způsoby si mohou vybrat flashky tak, aby se některá opakovala?

Při přímém útoku jde o dosti komplikovanou úlohu, která nezapadá do žádného z principů. Řekněme, že necháme prvního vybrat. Kolik voleb má ten druhý? To záleží na tom, jestli se rozhodne volbu prvního opakovat nebo ne. Tím se situace rozpadne na dva disjunktní případy (sčítací princip), ale nebude to tak jednoduché, protože ti další už se opakovat nemusí, ale také mohou, navíc není vyloučeno, že se některá flashka objeví až třikrát či čtyřikrát. Pokud bychom to tedy chtěli prozkoumat, vzniká mnoho křižovatek a situace se brzy stává nepřehlednou. Budeme proto hledat alternativu, přesto je užitečné poznamenat, že někdy je třeba se s takovouto situací poprat, vrátíme se k tomu blíže v příkladu 11a.l.

Další možný přístup je z pohledu flashky, kdy si řekneme, která se vybere vícekrát, tím se nám situace rozdělí na šest případů. Hlavním problémem zde je, že tyto případy nejsou disjunktní, protože se může stát, že se vyberou dvě různé flashky opakovaně. Sčítací princip proto nelze aplikovat. Opět je užitečné poznamenat, že pokud bychom nenalezli lepší alternativu a museli tuto situaci dořešit, pak to lze udělat pomocí pokročilých metod z příští kapitoly, jmenovitě by se použil princip inkluze a exkluze.

Tím se dostáváme k optimálnímu řešení. Klíčem je všimnout si, že opakování výběru flashek je přesně opak k situaci, kdy se žádná neopakuje, takže lze použít doplňkový princip a výsledky z částí b) a c). Počet možných výběrů dle zadání je tedy $6^4 - \frac{6!}{2!} = 1296 - 360 = 936$.

Všimněte si, že tato metoda je sice příjemná, ale nelze na ni spoléhat. Co kdybychom měli kamarádů více a zeptali bychom se, kolik výběrů opakuje dvě a více flashek? Opakem by pak byly výběry, kde se opakuje nejvýše jedna flashka, obě úlohy by tedy nezapadaly do žádné standardní situace a vyžadovaly by individuální přístup. Jinými slovy, ačkoliv jsme teď první dva postupy zavrhli, jsou situace, kdy se vyplatí umět je dotáhnout do konce, protože už nebude snadná alternativa.

e) Kolika způsoby si mohou vybrat flashky tak, aby se žádná neopakovala, když je nám jedno, kdo má kterou?

Interpretace: Vyberou si flashky, a protože je chtějí platit dohromady, vysypou je před prodavače na jednu hromádku. Kolik různých hromádek, ve kterých se flashky neopakují, může prodavač vidět?

Vymyslet to přímo je poněkud komplikovanější, protože k tomu, abychom mohli použít násobící princip, nám chybí rozlišení na fáze. Proto je asi nejjednodušší si tam pořadí uměle dodat a pak jej zase odebrat. Když se tedy budeme soustředit i na to, v jakém pořadí jsou flashky na tu hromádku pokládány, pak jde o problém z části c) a víme, že takovýchto možností je $\frac{6!}{2!}$. Označme si množinu těchto výběrů pracovně M, jde o množinu uspořádaných čtveřic.

Když si pak pořadí odmyslíme, tak nastane problém, protože mnohé (dokonce všechny) situace jsme započítali vícekrát. Například volby $(1,3,5,2)$ a $(3,2,5,1)$ se v okamžiku, kdy na pořadí výběru nezáleží, smrsknou do jedné možnosti $\{1,2,3,5\}$ (použili jsme množinu, ať zdůrazníme irelevanci pořadí). Je v tom nějaká pravidelnost? Ano, uspořádané výběry se smrskávají na jeden neuspořádaný vždy po stejných počtech. Je to dobře vidět, když se na to podíváme z druhé strany: Každá hromádka čtyř různých flashek nám dá $4! = 24$ permutací neboli 24 uspořádaných výběrů. To znamená, že množina uspořádaných výběrů se přirozeně rozpadá do skupinek (disjunktních) o velikosti $4! = 24$ a každá z těchto skupinek výběrů pak dává jen jednu hromádku. Počet různých hromádek je tedy roven počtu těchto skupin výběrů, což je $\frac{\frac{6!}{2!}}{4!} = \frac{360}{24} = 15$.

Zase to budeme chtít zapsat pomocí vstupních dat 6 a 4, dostaneme $\frac{6!}{4!(6-4)!}$.

Situace, kdy vybíráme k-krát z n různých objektů, bez opakovaní a také bez pořadí, je v kombinatorice velice častá a vyplatí se ji naučit rozpoznávat. Rovněž se bohatě vyplatí pamatovat si příslušný vzorec $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, aby si ho člověk nemusel pořád znovu vymýšlet, na rozdíl od vzorců z b) a c) už není zjevný na první pohled. Budeme se mu ještě v této kapitole věnovat.

Užitečné je také spojení mezi situacemi c) a e), které jsme tu odvodili. Funguje totiž v obou směrech, takže pokud si člověk pamatuje situaci z této části, může pomocí ní řešit příklady typu c). Postupuje se pak naopak: Chceme-li rozdělit rozdílné flashky mezi kamarády, pak nejprve rozhodneme, které jim vůbec dáme, to je první fáze s $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ možnostmi, a vybrané flashky pak mezi ně v nějakém pořadí rozdáme neboli je permutujeme, to je druhá fáze s $k!$ možnostmi. Podle násobícího principu je celkový počet možností $\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$, viz c).

f) Kolik různých hromádek může prodavač vidět, když už není žádná podmínka na opakování, takže se mohou i nemusí opakovat?

Jinými slovy, kolika způsoby je možno vybrat čtyři flashky, když je povoleno opakování a na pořadí nezáleží?

Toto je nejtěžší situace z těch základních a selský rozum těžko pomůže, pokud už člověk dopředu neví, co má dělat.

Hlavním problémem tady je, že když zkusíme jednu konkrétní hromádku rozdělit mezi kamarády ve snaze zopakovat postup z části e), tak už to nedopadne vždy stejně. Je pořád pravda, že hromádka $\{1,2,3,5\}$ dává $4! = 24$ různých výběrů pro kamarády, ale hromádka $\{1,1,1,2\}$ už dá jen čtyři různé výběry (kdo dostane dvojku?) a hromádka $\{6,6,6,6\}$ už dokonce jen jeden (každý si vezme šestku). To znamená, že když si množinu M všech výběrů flashek kamarády rozdělíme do skupin podle toho, jaké pak vytvoří hromádky, tak ty skupiny nebudou vždy stejně velké, jinými slovy, počet těchto skupin nezjistíme pomocí velikosti M a dělení jako v části e).

Je to tedy slepá ulička a je na to třeba jít jinak. Tato situace je z těch základních s přehledem nejméně intuitivní, většina lidí nad ní raději moc nepřemýšlí a rovnou si pamatuje příslušný vzorec, což vám doporučujeme. Pro odvážné přijde jeho odvození.

Klíčová úvaha vypadá následovně: Když na pořadí nezáleží, tak si ty flashky můžeme vždy seřadit podle nějakého kritéria, třeba podle toho, jak jsme si je očíslovali. Dostáváme tak hromádky typu $\{1,1,1,1\}$, $\{1,1,3,6\}$ atd. Každý takovýto výběr je tedy jednoznačně určen rozhodnutím, kolik míst mezi těmi čtyřmi zaberou jedničky, kolik dvojky, kolik trojky a podobně. To se dá realizovat následovně. Vytvoříme si ukazatele, které ukazují, kam až v té čtyřce míst půjdou jedničky, kam až půjdou dvojky a podobně, šestky ukončovat nemusíme, takže je celkem pět ukazatelů změn typu flashky. Pak ještě potřebujeme ukazatele na ta místa k obsazení, tedy celkem $(6-1)+4 = 9$ ukazatelů. Tvrdíme, že těmito ukazateli se již výběry jednoznačně určí.

Označíme-li písmenem T ukazatel typu a písmenem M ukazatel místa, tak například hromádka $\{1,1,1,1\}$ by se kódovala MMMMTTTTT, neboli první typ končí až po všech čtyřech místech, hromádka $\{1,1,3,6\}$ by se kódovala MMTTMTTTM (po dvou místech ukončíme jedničky a rovnou i dvojky, pak jedno místo trojek a ukončíme trojky, čtyřky i pětky) a hromádka $\{2,3,3,5\}$ by se kódovala TMTMMTTMT. Důležité je, že to funguje i naopak, kdykoliv si vezmeme nějaké pořadí pěti T a čtyř M, tak nám to dá určitou hromádku flashek.

Počet možných hromádek je tedy dán počtem možných uspořádání čtyř M a pěti T, což zjistíme snadno dalším trikem: Podíváme se na to tak, že z devíti míst se vybírají čtyři, nesmíme opakovat a na pořadí nezáleží, čili podle e) víme, že se to dá dělat $\frac{9!}{4!(9-4)!} = 126$ způsoby.

Poučení: Když vybíráme k-krát s opakováním z n různých objektů a bez pořadí, tak je to možno udělat $\frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!}$ různými způsoby.

△

Tímto příkladem jsme probrali klasické čtyři základní situace. Než si je shrneme, uděláme si užitečnou definici.

! **Definice**
Nechť $k \leq n \in \mathbb{N}_0$. Definujeme jejich **kombinační číslo** nebo **binomický koeficient** jako

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Čteme to „n nad k“.

Let $k \leq n \in \mathbb{N}_0$. We define their **binomial coefficient** or **combinatorial number** as $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. We read it “$n$ choose k”.

Ačkoliv to z definice nemusí být zjevné, ze způsobu, kterým jsme k tomuto číslu došli, hned vyplývá, že kombinační čísla jsou vždy přirozená čísla (viz také cvičení 11c.4).

Výraz z definice je nepraktický, protože faktoriály jsou velice drahé na výpočet. Proto bývá lepší nejprve zkrátit jeden z faktoriálů ze jmenovatele se začátkem faktoriálu v čitateli. Máme pak

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+2) \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (k+2) \cdot (k+1)}{(n-k)!}.$$

Samozřejmě vždy volíme tu variantu, která dá méně výsledných činitelů, tedy krátíme ten větší faktoriál ve jmenovateli. Při ručním výpočtu pak můžeme doufat v další krácení.

Příklad 11a.b: Spočítáme nějaké kombinační číslo, třeba

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{3!6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84.$$

△

Možná jste si všimli, že jakmile se kombinační číslo přepíše na zlomek, ztrácí se rozdíl mezi $k!$ a $(n-k)!$. Potvrdíme si to faktem a přidáme dvě další jednoduchá pozorování.

! **Fakt 11a.4.**
(i) Pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí $\binom{n}{0} = 1$.
(ii) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\binom{n}{1} = n$.
(iii) Nechť $k \leq n \in \mathbb{N}_0$. Pak platí $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Důkazy jsou tak snadné, že je s důvěrou necháme jako cvičení 11a.61. Další vlastnosti kombinačních čísel najde čtenář v kapitole 11c.

Shrneneme si čtyři základní situace, které jsme si rozmysleli v příkladě 11a.a.

! **Věta 11a.5.**
Uvažujme množinu o n různých prvcích.
(i) Je $n!$ způsobů, jak je seřadit (neboli je $n!$ permutací).
(ii) Jestliže na pořadí záleží a opakování není povoleno, pak je $\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$ různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.
(iii) Jestliže na pořadí záleží a opakování je povoleno, pak je n^k různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.
(iv) Jestliže na pořadí nezáleží a opakování není povoleno, pak je $\binom{n}{k}$ různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.
(v) Jestliže na pořadí nezáleží a opakování je povoleno, pak je $\binom{n+k-1}{k}$ různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.

Ony dva parametry, zda se opakuje a zda na pořadí záleží, patří k tomu hlavnímu, co určuje metodu zpracování kombinatorické situace. Je důležité umět situace (ii)–(iv) rozpoznat a přinejmenším pro ty dvě poslední znát příslušné vzorce. Někdo si pamatuje vzorce i pro první dvě z nich, ale jak už jsme viděli, dá se bez toho obejít. Výběrům „uspořádaným“, kde na pořadí záleží, se říká **variace**, zatímco výběrům „neuspořádaným“, kde na pořadí nezáleží, říkáme **kombinace**. Zde to nebudeme příliš používat. Shrneme si to v tabulce.

	bez opakování	s opakováním
s pořadím (variace)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
bez pořadí (kombinace)	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Teď se podíváme na některé aplikace těchto základních situací.

Příklad 11a.c: Kolik je možno vytvořit osmimístných hesel (password) skládajících se z písmen a číslic?
Každý znak je nezávislý jev, který je možno udělat $26 + 10 = 36$ způsoby, proto je možno vytvořit 36^8 hesel.
△

! **Příklad 11a.d:** Adam, Bára a Cirda chtějí do divadla, hodlají sedět hned v první řadě, kde je 13 sedadel. Kolika způsoby se tam mohou rozesadit?
Tato úloha je neřešitelná, protože nemáme dostatek informací. Jmenovitě, potřebujeme vědět, zda se každý spokojí s jedním sedadlem či jich bude chtít více, popřípadě zda by jim naopak nevadilo sedět jeden druhému na klíně třeba Cirda je ještě malý(á).

a) Pokud přidáme předpoklad, že každý chce své sedadlo (jedno), pak jde o výběr z 13 míst, bez opakování, na pořadí záleží (chceme vědět, kdo kde sedí), tedy $\frac{13!}{10!} = 13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716$.

b) Kdyby byli ochotni v nouzi i sdílet sedadlo(a), pak by šlo o výběr s opakováním, tedy $13^3 = 2197$.

c) Co kdyby chtěli sedět vedle sebe? Pak je třeba situaci rozložit na dva kroky. Nejprve vybereme trojici sedadel vedle sebe, kolik je možností? Vybíráme z bloků 1–3, 2–4, . . . , 11–13, těch je 11. Na vybrané trojmísto se pak rozesadí, to jsou permutace tří lidí. Je tedy celkem $11 \cdot 3! = 66$ možností.

d) Co kdyby chtěli sedět vedle sebe a s Cirdou uprostřed? Zase je 11 možností na trojku, ale pak už je dáno, kde sedí Cirda, jediná volba je, kdo sedí na levém a kdo na pravém konci, tedy 2 možnosti. Celkem je tedy $11 \cdot 2 = 22$ možností.
△

Příklad 11a.e: Kolik permutací písmen $ABCDEFGH$ obsahuje slovo $DECH$?
Toto se udělá jednoduchým trikem, prostě se $DECH$ vezme jako jeden celek, který se spolu s ostatními čtyřmi písmenky permutuje, takže celkem permutujeme pět věcí. Možností je tedy $5! = 120$.
△

Příklad 11a.f: Kombinatorika je zásadním nástrojem pro lidi zabývající se seriózně hraním karet.
Pro hráče bridge je základní úvaha, že ze standardního balíčku 52 karet je možno dostat 13 karet přesně

$$\binom{52}{13} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{13!} = 635013559600 \sim 6.4 \cdot 10^{11}$$

způsoby (vybíráme 13 z 52, bez opakování, na pořadí v ruce nezáleží).

Příznivce hry poker zase zajímá, že dostat z tohoto balíčku pět karet je možno $\binom{52}{5} = 2598960 \sim 2.6 \cdot 10^6$ způsoby.

△

Příklad 11a.g: Kolik různých balíčků bonbónů (ty jsou tam volně ložené) je možné vytvořit, když do balíčku vybíráme 10 bonbónů ze tří druhů, přičemž od každého druhu je k dispozici dostatek kusů?

Vybíráme desetkrát z tříprvkové množiny, výběr můžeme opakovat a na pořadí nezáleží, protože bonbóny se pak stejně budou v balíčku volně míchat. Je to ta nejobtížnější ze čtyř základních situací, proto si vzorec pamatujeme: Je možné udělat $\binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10} = \frac{12!}{10!2!} = \frac{12\cdot 11}{2} = 66$ různých balíčků.

△

Příklad 11a.h: Uvažujme binární řetězce o délce 8 (bajty).

a) Kolik jich je?

Pro každou pozici vybíráme nezávisle ze dvou hodnot 0 a 1, tedy $2^8 = 256$ řetězců.

b) Kolik z nich obsahuje přesně tři jedničky?

Zde vybíráme, na které pozice jedničky dáme, a na pořadí výběru nezáleží (říct, že jedničky mají být na pozicích 1, 2 a 6, vyjde nastejno jako říct, že mají být na pozicích 2, 6 a 1). Takže vybíráme z osmi míst, bez opakování a bez pořadí, tedy $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56$ řetězců.

c) Kolik z nich obsahuje nejvýše tři jedničky?

Toto je snadné, stačí posčítat možnosti pro žádnou, jednu, dvě či tři jedničky (jde o navzájem disjunktní situace):

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} = 1 + 8 + 28 + 56 = 93.$$

d) Kolik z nich obsahuje alespoň tři jedničky?

Podobný postup jako v c) vede na $\sum_{k=3}^{8} \binom{8}{k}$ řetězců. Zde ale bude jednodušší přejít k opačnému jevu neboli nejvíce dvěma jedničkám, dostaneme

$$2^8 - \left[\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2}\right] = 256 - 1 - 8 - 28 = 219.$$

e) Kolik z nich má stejně jedniček a nul?

Ty, které mají přesně čtyři nuly, $\binom{8}{4} = 70$ řetězců.

f) Kolik z nich má víc jedniček než nul?

Jedna možnost je spočítat $\binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 93$.

Alternativa: Všech řetězců je 256, z nich 70 má stejný počet, zbývá $256 - 70 = 186$ řetězců, které mají buď víc jedniček nebo víc nul. Mezi těmito situacemi je zjevná symetrie (kdykoliv máme řetězec s větším počtem jedniček, záměnou $0 \leftrightarrow 1$ získáme řetězec s více nulami), proto polovina tohoto počtu má víc jedniček, tedy $\frac{1}{2}186 = 93$.

△

Teď se podíváme na několik teoretických situací.

! Příklad 11a.i: Dokážeme, že jestliže je A konečná množina, pak $|P(A)| = 2^{|A|}$.

1) Pro usnadnění označme $|A| = n$. Podmnožiny vytváříme tak, že se u každého prvku z A rozhodujeme, zda jej vezmeme či ne. Takže vlastně vybíráme n-krát z dvouprvkové množiny $\{\text{ano}, \text{ne}\}$, odpovědi se mohou opakovat a na pořadí záleží (chceme vědět, o kterém prvku říkáme ano či ne). Počet možností je tedy 2^n.

Chceme-li to odvodit ze základních principů, pak prostě bereme postupně prvky A a u každého jsou dvě možnosti rozhodnutí, těchto fází je n, celý proces je proto podle násobícího principu možno provést $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ způsoby.

2) Aternativní řešení: Podmnožiny vznikají tak, že si z množiny vybereme několik prvků, na pořadí nezáleží, protože je pak dáváme do množiny, a opakovat nesmíme. Jde tedy o jasnou kombinační záležitost, chybí už jen zjistit, kolik prvků vlastně máme vybrat. Odpověď zní, že to není dáno, musíme vyzkoušet všechny možnosti. Takže nejprve vybereme nic (prázdná podmnožina), to se dá jedním způsobem, což je mimochodem $\binom{n}{0}$, pak vybíráme jeden prvek, celkem $\binom{n}{1}$ možností, pak dva prvky, celkem $\binom{n}{2}$, a tak dále, až po výběr celé množiny, což se dá jediným způsobem, což je mimochodem $\binom{n}{n}$. Když to sečteme, dostaneme všechny možné způsoby výběrů podmnožin: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Samozřejmě je to stejný výsledek jako u prvního řešení, viz Důsledek 11c.7.

3) Alternativní řešení: Indukce na $|M|$.

(0) Pro nulaprvkovou množinu $\emptyset$ existuje jedna podmnožina $\emptyset$, takže $2^0 = 1$ souhlasí.

(1) Předpokládejme, že vztah platí pro n-prvkové množiny. Mějme množinu M o $n+1$ prvcích, zvolme si jeden z prvků m. Každá podmnožina z M buď v sobě m nemá, pak je to vlastně podmnožina množiny $M-\{m\}$ o n prvcích, těch je podle indukčního předpokladu 2^n, nebo v sobě m má a pak je to vlastně $Y \cup \{m\}$ pro nějakou podmnožinu $Y \subseteq M-\{m\}$, takže podmnožin M obsahujících m je také 2^n. Jde o disjunktní možnosti, proto je celkem $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ podmnožin.
△

Příklad 11a.j: Nechť A, B jsou konečné množiny.

a) Kolik je zobrazení z A do B?

Každý prvek z A si může zcela svobodně vybrat, kam do B se pošle, což je $|B|$ možností. Vybíráme $|A|$-krát, celkový počet výběrů je tedy $|B|^{|A|}$.

Závěr: Existuje $|B|^{|A|}$ zobrazení z A do B.

b) Kolik je prostých zobrazení z A do B?

Teď každý prvek svou volbou omezí volbu prvků následujících. První prvek z A má na výběr $|B|$ možností, druhý už jen $|B|-1$, třetí už jen $|B|-2$ atd., ten poslední prvek má $|B|-|A|+1$ možností. Násobící princip tak dává celkem $|B| \cdot (|B|-1) \cdots (|B|-|A|+1)$ možností výběru.

Všimněte si, že když $|A| > |B|$, tak toto číslo dává nulu, což je naprosto správně, pak žádné prosté zobrazení neexistuje. Budeme-li chtít odpověď vyjádřit kompaktně pomocí fakoriálů, tak si na to budeme muset dát pozor.

Závěr: Jestliže $|B| \geq |A|$, pak je $\frac{|B|!}{(|B|-|A|)!}$ různých prostých zobrazení z A do B, jinak není žádné.

c) Počet zobrazení na se určuje obtížně a necháme jej do příští kapitoly, viz Věta 11b.3.

d) Víme, že u konečných množin jsou bijekce možné jen v případě, že $|A| = |B|$. Pak už bijekce souhlasí s prostými zobrazeními a lze použít výsledek z b).

Závěr: Jestliže $|A| = |B|$, tak je $|B|!$ bijekcí z A na B.

Není to žádné překvapení, u bijekce je každý prvek z B napojen na nějaký (jediný) prvek z A, takže se to celé redukuje na otázku, v jakém pořadí se napojí neboli na počet permutací.
△

Příklad 11a.k: Kolik má rovnice $x_1 + x_2 + x_3 = 13$ řešení splňujících $x_i \in \mathbb{N}_0$?

Pokud se budeme snažit nějak kombinatoricky přidělovat přirozená čísla do x_i, tak budeme mít velké problémy s uhlídáním jejich součtu. V případě malých čísel by ještě šel udělat rozbor všech případů (začít s $(0,0,13)$, $(0,1,12)$ a postupně se zkusit dopočítat k $(13,0,0)$, viz příklad 11a.v (ii) či algoritmus 11d.7), ale pro větší čísla to rozhodně není perspektivní, ono už zde s 13 by to bylo dost drsné.

Nejsnažší řešení spočívá v totální změně zorného úhlu. Nebudeme přidělovat čísla proměnným, ale proměnné číslům. Máme 13 jedniček a každá z nich si vybere, do které x_i půjde. Takže vybíráme třináctkrát ze tří možností x_1, x_2, x_3, evidentně s opakováním a na pořadí nezáleží, protože je jedno, které konkrétní jedničky jdou třeba do x_1, nás jen zajímá, kolik jedniček si tu $x_1$vybralo. Je to tedy zase ten nejméně intuitivní základní případ a pamatujeme si, že je celkem $\binom{3+13-1}{13} = \binom{15}{13} = 105$ možných řešení.

Tento trik se změnou přidělování je docela užitečný. Postup je možné také zajímavě modifikovat, třeba takto:

b) Kolik existuje řešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 = 13$ splňujících $x_i \in \mathbb{N}_0$ a také $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 3$, $x_3 \geq 2$?

Trik: Nejprve rozdělíme napevno 6 jedniček tak, aby už x_i nabyly svých minimálních nutných hodnot. Zbývajících 7 jedniček pak rozdělíme jako předtím (vybíráme pro každou ze tří proměnných), je tedy $\binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = 36$ takovýchto řešení.

Pro další varianty tohoto problému viz příklad 11b.d.
△

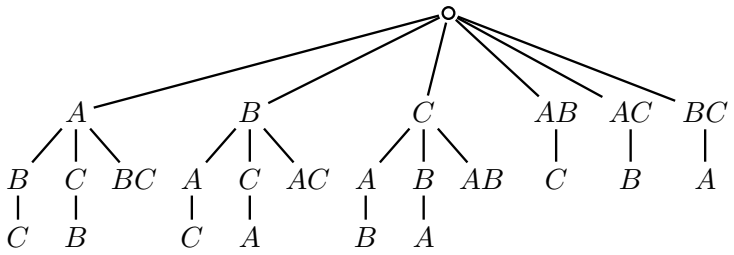
Mnoho kombinatorických situací ale takto přímočarých není, často je potřeba různé postupy kombinovat a nalézt správný přístup není snadné. Jako ilustraci teď ukážeme poněkud zajímavější příklady. Nejprve se ještě vrátíme k našim kamarádům a ukážeme jeden užitečný pohled na věc.

Příklad 11a.l (pokračování 11a.a)**:** Vrátíme se úplně na začátek, do situace, kdy kamarádi vcházejí do dveří. Kolika způsoby by mohli vejít, kdyby mohli vcházet nejen po jednom, ale také po dvou?

Tato otázka se vymyká základním čtyřem situacím, musíme se tedy vrátit k principům. Zkusme si to rozfázovat. Nejprve necháme vejít buď jednoho kamaráda (4 možnosti) nebo dvojici, což je výběr dvou ze čtyř bez opakování, $\binom{4}{2} = 6$ možností. Je tedy celkem 10 možností, kdo mohl vejít první, ale tím se proces zadrhne, protože nejsme schopni udat jednoznačný počet možností pro další fázi. Řekněme, že by jako druhý vešel jeden kamarád. Počet možností pro jeho výběr závisí na tom, z kolika vybíráme, ale to závisí na tom, co se stalo v prvním kole. Kdyby

na začátku vešel jeden, tak máme tři volby pro toho druhého, ale kdyby jako první vešli rovnou dva, tak zbývají už jen dvě volby pro toho, kdo vejde v druhé fázi. Není tedy splněna základní podmínka z násobícího principu, protože druhou fázi neprovádíme vždy stejným počtem možností.

V takové situaci se obvykle rozbor situace rozdělí na možnosti a každá se zkoumá samostatně, výsledky se pak dávají dohromady podle sčítacího principu. Množinu všech možností vstupu proto rozdělíme na podmnožinu těch, které začaly jedním člověkem, a na pomnožinu těch vstupů, které začaly dvojicí. Když ale v obou podmnožinách postoupíme dál, tak se rozpadnou i tyto podmnožiny na menší kousky, protože i pak máme možnost volby mezi jedním kamarádem či dvojicí. Situace se rychle stává nepřehlednou a v těchto situacích se vyplácí použít strom, který do úvah vnese řád, díky tomu je pak mimo jiné méně snadné nějakou možnost přehlédnout. Zkusme si nejprve udělat strom pro případ, že by kamarádi byli tři, označme si je A, B, C.

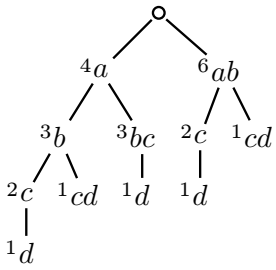


Každá cesta shora dolů (tzv. větev) značí jednu možnost, když tedy spočítáme jejich konce (tzv. listy), tak vidíme, že je celkem 12 možností vstupu. Je evidentní, že tato metoda není nejefektivnější, například za chvíli uvidíme, že pro čtyři kamarády by strom musel mít 66 listů, což už je docela dost. K úspornější práci se s výhodou používají pravidelnosti ve stromu.

Všimněte si, že tři levé části stromu mají stejnou strukturu, stačí tedy spočítat velikost jedné části a vynásobit třemi. Podobně mají i pravé části stejnou strukturu. Stačí tedy nakreslit strom nikoliv se všemi možnostmi, ale se všemi typy možností, a u každého typu pak zjistit, kolik skutečných výběrů reprezentuje. To se dá dělat více způsoby, ukážeme zde dva.

1) První způsob bude asi trochu těžší na vysvětlení, ale v praxi mi přijde rychlejší. Je založen na tom, že využívá násobícího a sčítacího pravidla coby pravidel pro pohyb ve stromu. Zhruba řešeno, kde je ve stromu pravidelnost, tam násobíme, kde je nepravidelnost, tam sčítáme, a to na libovolné úrovni. Ukážeme to na našem původním příkladě, tedy na čtyřech kamarádech vcházejících po jednom či po dvou.

Zakreslíme si možnosti vstupu, ale místo konkrétního kamaráda budeme dávat proměnné, jmenovitě a jako znak pro libovolného kamaráda, b jako znak pro libovolného kamaráda jiného než a, c jako libovolného kamaráda odlišného od a či b atd. V každém okamžiku výběru si zároveň ve stromu uděláme poznámku o tom, kolik možností volby v tom kterém místě máme.

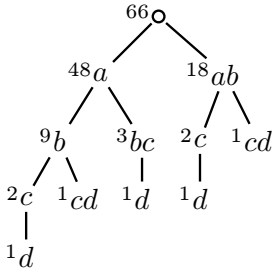


Jak se na to přišlo? Například první kamarád se vybíral ze čtyř možností, proto je nahoře vlevo u a čtyřka. Pokud šel po něm další kamarád, vybíral se ze tří (trojka u b), a když šli jako druzí dva, byly $\binom{3}{2} = 3$ možnosti (trojka u bc). Na druhou stranu pokud šla jako první dvojice, mohlo se to stát $\binom{4}{2} = 6$ způsoby (šestka u ab) a tak dále.

Celkový počet možností teď zjistíme tak, že procházíme strom zdola a aplikujeme násobící či sčítací pravidlo podle toho, jak to na různých místech stromu vypadá (pravidelně či nepravidelně). Vznikající čísla si zapíšeme do nové kopie našeho stromu, teď už čísla u větvení nepředstavují okamžitý počet možností, ale součet za celou část stromu níže. Dostáváme je takto.

Začneme tím d vlevo dole, tam je jedna možnost. Posuneme se nahoru, vidíme c, u něj dvojka, což říká, že ten úsek c—d je opakován dvakrát. Představíme si tedy, jakoby od c vedly dolů dvě stejné části, které obě mají o úroveň níže už jen jednu část. To je pravidelnost, kterou řeší násobící princip, proto celá tato část stromu se může stát $2 \cdot 1$ způsoby.

Poučení: Když od nějakého bodu výběru vede dolů jen jedna cesta, tak to znamená, že je pod ním několikrát opakovaný tvar, stačí tedy vynásobit velikost tohoto tvaru s číslem u výběrového bodu.



Posuneme se nahoru. Vidíme b, ale také vidíme, že k němu vedou zdola dvě cestičky. Je zde tedy nevyváženost, kterou řeší sčítací princip. Část stromu s vrcholkem c reprezentuje 2 možnosti a část označená cd má u sebe poznámku, že reprezentuje jednu kopii, tedy jednu možnost. Celkem tedy ty části stromu, které jsou pod zkoumaným b, reprezentují $2 + 1 = 3$ možnosti výběru. A tento (nevyvážený, ale již prozkoumaný) strom je u b zopakován třikrát (to je ta poznámka u b), tudíž zase násobící princip říká, že ten kus stromu, jehož typ začíná béčkem, představuje $3 \cdot 3$ možnosti.

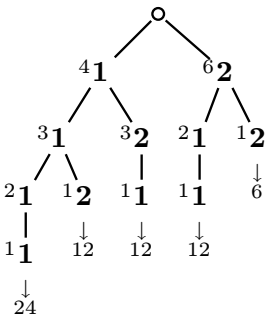
Od tohoto b se přesuneme nahoru a jsme u a, ale zase vidíme, že se k němu dostaneme i odjinud. Je tedy čas zapamatovat si, že b-část stromu se může stát 9 způsoby, a podívat se na tu druhou část. Zase začneme zdola, je tam d s jedničkou a nad tím bc s trojkou. Podle násobícího principu se tedy celá část může stát $3 \cdot 1 = 3$

způsoby. Když to sečteme, tak vidíme, že část stromu pod a reprezentuje $9+3=12$ možností, a tato část stromu je zopakována čtyřikrát (viz poznámka u a). To znamená, že celá áčková část stromu představuje $4 \cdot 12 = 48$ možností. Právě jsme se dozvěděli, že pokud půjde jako první jeden kamarád, tak se to může stát přesně 48 způsoby.

Stejným postupem doplníme počty v druhé části stromu, začneme zdola a skončíme číslem 18 u ab. Dohromady je tedy $48+18=66$ možností, jak mohou kamarádi vejít po jednom či po dvou.

2) Alternativní způsob funguje tak, že ony počty možností v jednotlivých uzlech nekompilujeme od listů ke kořeni, abychom tak dostali celkový počet, ale naopak shora dolů, kdy už nemusíme vybírat vhodné principy, ale prostě násobíme všechna čísla na konkrétní větvi, čímž se dozvíme, kolika způsoby se daný konkrétní typ vstupu mohl udát. Zde si ukážeme také jinou verzi stromu, kdy si nepíšeme symbolicky výběry, ale jenom to, kolik lidí v jednotlivých fázích vejde, my už si budeme pamatovat, že nesmí dojít k opakování.

Ona čísla u jednotlivých listů lze zjistit i přímo běžnými kombinatorickými metodami, bez pomocí částečných číslíček. Například větev úplně vlevo odpovídá situaci, kdy vstoupí po jednom, což se může stát 4! způsoby. Větev o jedno vpravo je situace, kdy vstoupí jeden, jeden a nakonec zbylí dva. Pro výběr prvního jsou 4 možnosti, pro výběr druhého už jen 3 a zbývající dvojice prostě vejde, celkem tedy $4 \cdot 3 = 12$ způsobů tohoto vstupu. Další větev popisuje pořadí jeden-dva-jeden, jsou 4 možnosti pro prvního, další dva se vybírají ze tří a na pořadí nezáleží, což jsou $\binom{3}{2} = 3$ možnosti, a poslední už na výběr nemá, zbyl jeden, celkem $4 \cdot \binom{3}{2} = 12$ způsobů. Takto se projdou všechny větve ve stromu.



Když čísla sečteme, dostáváme závěr, že čtyři kamarádi mohou vcházet po jednom či po dvou celkem 66 způsoby.

Ať už se to zkouší tak či onak, moc efektivně to pořád nevypadá. Stačí si představit, že by lidí bylo 150 a mohli by vcházet po jednom, dvou či třech, strom by se pak musel kreslit na lodní plachtu. Bohužel, pro situace tohoto druhu neexistuje nějaký vzorec, do kterého by se dalo dosadit, jde o jednu z obtížnějších kombinatorických situací. Je vidět, že v kombinatorice stačí malá změna v zadání, aby se úloha změnila ze snadné (vchází po jednom) na velice obtížnou (vchází i po dvou). Situace, pro které chybí vzoreček, jsou běžné, takže vypisování všech možností je legitimní metoda.

U větších problémů pak nezbývá, než použít počítač, namísto kreslení stromů napsat algoritmus, kterým by se všechny možnosti prošly a spočítaly. Pak je samozřejmě třeba dát velký pozor na to, aby program opravdu počítal všechny možnosti a každou jen jednou. Letmo se na to podíváme v kapitole 11d.

△

! Příklad 11a.m: Ve třídě je 150 kluků a 40 holek. Chtějí poslat čtyřčlennou delegaci k přednášejícímu.

a) Kolika způsoby ji mohou vybrat?

Vybírají čtyři ze $150+40$, na pořadí nezáleží a evidentně bez opakování, tedy počet možností je

$$\binom{190}{4} = \frac{190 \cdot 189 \cdot 188 \cdot 187}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 52602165.$$

b) Kolika způsoby ji mohou vybrat, jestliže v ní chtějí dva kluky a dvě holky?

Výběry kluků a holek jsou nezávislé, tvoří dvě fáze výběru, tedy je spojíme násobícím principem, každý z těch výběrů je bez opakování a bez pořadí, proto je odpověď

$$\binom{150}{2} \cdot \binom{40}{2} = \frac{150 \cdot 149}{2} \cdot \frac{40 \cdot 39}{2} = 8716500.$$

c) Kolika různými způsoby ji mohou vybrat, když chtějí dva kluky a dvě holky a navíc chtějí určit toho, kdo za ně bude mluvit?

Metoda 1: Nejprve vybereme delegaci, viz b), pak z ní vybereme mluvčího:

$$\binom{150}{2} \cdot \binom{40}{2} \cdot 4 = 34866000.$$

Metoda 2: Nejprve vybereme mluvčího, pak doplníme delegaci. Mluvčí bude buď kluk nebo holka, což ovlivní počty při dalším výběru, situace se tedy rozpadne na dva disjunktní případy, které spojíme sčítacím principem (bude tam nevyvážený strom). Vyjde

$$150 \cdot \binom{149}{1} \cdot \binom{40}{2} + 40 \cdot \binom{150}{2} \cdot \binom{39}{1} = 34866000.$$

d) Kolika různými způsoby ji mohou vybrat, když chtějí dva kluky a dvě holky a také dopředu určit, v jakém pořadí budou k prófovi vcházet?

Nejjednodušší je nejprve vytvořit delegaci a pak řešit pořadí neboli ji permutovat.

$$\binom{150}{2} \cdot \binom{40}{2} \cdot 4! = 209196000.$$

e) Kolika různými způsoby ji mohou vybrat, když chtějí dva kluky a dvě holky a také dopředu určit, v jakém pořadí budou k prófovi vcházet, přičemž nechtějí, aby šli dva kluci za sebou?

Zase je nejjednodušší vybrat delegaci a pak ji permutovat, teď ovšem nelze použít všechny permutace. Jak vyčíslíme ty povolené? Třeba tak, že nejprve bereme jen obecně kluky a holky a najdeme tři možnosti uspořádání: *hkhk*, *khkh* a *khhk*. Dvě holky a dva kluci se ovšem na ta místa h a k mohou dát v různých pořadích, čili celkový počet možností je

$$\binom{150}{2} \cdot \binom{40}{2} \cdot 3 \cdot 2! \cdot 2! = 104598000.$$

Poznámka: Jak bychom počet pořadí dělali, kdyby bylo holek 11 a kluků 7? Vypisování možných pořadí by bylo dost dlouhé, existuje nějaká obecná metoda? Jestliže nechceme, aby šli kluci za sebou, tak vždy mezi dvě holky můžeme ale nemusíme postavit kluka, lze také postavit kluka úplně na začátek či konec. To znamená, že z pozic mezi holkami (kterých je 10 plus dvě na konci, tedy dvanáct) vybíráme sedm míst pro kluky, je tedy $\binom{12}{7}$ možností seřazení, pokud nás nezajímají konkrétní osoby, jen pohlaví. Možností seřazení konkrétních osob pak je $\binom{12}{7} \cdot 11! \cdot 7!$, viz také cvičení 11a.39.

f) Kolika způsoby ji mohou vybrat, jestliže chtějí mít alespoň jednoho kluka a alespoň jednu holku?

Zde se řešení rozpadnou na disjunktní případy podle počtu kluků a holek, vyjde

$$\binom{150}{1} \cdot \binom{40}{3} + \binom{150}{2} \cdot \binom{40}{2} + \binom{150}{3} \cdot \binom{40}{1} = 32250500.$$

Alternativa: Co kdybychom rovnou zkusili napevno vybrat holku a kluka a pak zbytek doplnit už bez ohledu na pohlaví? Dostali bychom $\binom{150}{1}\binom{40}{1}\binom{188}{2} = 105468000$. Vyšlo to jinak a znatelně více. To se občas u kombinatorických úloh stává, důležité je rozpoznat správné řešení a najít chybu v chybném. Zde je chyba v alternativním řešení, některé situace totiž počítáme dvakrát. Například pokud jsou ve výboru dva kluci A a B, tak jsme tuto situaci zahrnuli jednou, když jsme nejprve vybírali kluka A a pak doplňovali zbytek, podruhé jsme jako prvního dali B a pak A došel v rámci doplnění. Kdyby ještě k nim byly dvě holky, tak se tatáž situace dokonce započítala čtyřikrát. To je komplikace, na kterou je třeba u kombinatorických úloh dávat velký pozor. Vzhledem k tomu, že násobnost počítání není pořád stejným koeficientem (někdy čtyřikrát, v případě tři kluků či tří holek jen třikrát), nelze správnou odpověď z té špatné získat dělením. Tento přístup je tedy v tomto příkladě slepá ulička, někdy je ale myšlenka nejprve splnit povinné cenzum a pak libovolně doplnit zbytek užitečná, viz níže či třeba příklad 11a.k.

g) Kolika způsoby ji mohou vybrat, jestliže chtějí dva kluky a dvě holky, určitě má jít Bára ale Adam ne?

Opět vybíráme po fázích. Nejprve vybereme třeba kluky, ale Adam nesmí, vybíráme tedy ze 149. Pak vybereme holky, Báru určitě, pak na zbývající místo dobereme ještě jednu holku z ostatních 39. Celkem je tedy možností

$$\binom{149}{2}\binom{39}{1} = 430014.$$

K tomuto příkladu se vrátíme, viz příklad 11b.a.

△

! Příklad 11a.n: Ve školce je n kluků a n holek. Jdou na vycházku, učitelka je rozřadí do dvojic.

a) Kolika způsoby může děti seřadit?

Protože se blíže nespecifikuje, budeme předpokládat, že záleží na všem, tedy v jaké dvojici kdo jde i kdo je vlevo a vpravo. Jedna možnost řešení je postupně vybírat. Do první dvojice vpravo je $2n$ možností, do první dvojice vlevo pak je $2n-1$ možností, do druhé dvojice vpravo pak je $2n-2$ atd, možnosti se násobí (jde o fáze výběru) a dostaneme $(2n)!$.

Alternativa: Můžeme děti seřadit vedle sebe a pak dvojice odpočítávat postupně, čímž se celá věc redukuje na počet permutací dětí, což je $(2n)!$.

b) Kolika způsoby je učitelka může seřadit, jestliže jí záleží jen na tom, kdo je v které dvojici?

Zde vybíráme bez pořadí do první dvojice, tedy $\binom{2n}{2}$, pak do druhé dvojice, což je další fáze čili násobíme číslem $\binom{2n-2}{2}$, pak násobíme číslem $\binom{2n-4}{2}$ atd, dostáváme

$$\frac{(2n)(2n-1)}{2!} \cdot \frac{(2n-2)(2n-3)}{2!} \cdots \frac{2\cdot 1}{2!} = \frac{(2n)!}{2^n}.$$

Alternativa: Nejprve vybereme děti do dvojic, jako by na pořadí záleželo, což je $(2n)!$ možností. Pak postupně pořadí ve dvojicích „rušíme“, po zrušení u první dvojice se počet různých možností redukuje na polovinu, u druhé dvojice zrušení pořadí způsobí další redukci na polovinu atd.

c) Kolika způsoby může děti seřadit, jestliže je nám jedno, kdo je v které dvojici a zda vlevo a vpravo, zajímá nás jen, kdo je s kým?

Jedna možnost je nechat prvního vybrat, má $(2n-1)$ možností. Tím dvě děti odpadnou. Další si pak může vybrat z $(2n-3)$ možností, další dva odpadnou, další z $(2n-5)$ atd. Celkem je tedy počet dvojic

$$(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 3\cdot 1 = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1 \cdot \frac{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2} = \frac{(2n)!}{2n\cdot 2(n-1)\cdot 2(n-2)\cdots 2\cdot 1} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Vzorec jsme zkusili upravit tak, aby byl kompaktnější, zajímavé je, že se k té finální verzi dá také přijít přímo. Nejprve vybereme děti do dvojic podle a), pak zrušíme pozici ve dvojicích jako v b), nakonec zrušíme i pořadí

dvojic a máme to.

Mimochodem, číslu $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-3) \cdot (2n-1) = (2n-1)!!$ se říká dvojný faktoriál. Podobně se pro sudá čísla definuje $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2n-2) \cdot (2n) = (2n)!!$.

d) Kolika způsoby může děti seřadit, jestliže chce mít v každé dvojici kluka a holku a chce mít kluky za sebou a holky za sebou?

Zde je to snadné, nejprve dáme kluky nalevo a holky napravo a pak je nezávisle na sobě můžeme permutovat, to je $(n!)^2$ možností. Je ale také možné řadit holky vlevo a kluky vpravo, celkem je tedy $2(n!)^2$ možností.

e) Kolika způsoby může děti seřadit, jestliže chce mít v každé dvojici kluka a holku, ale neřeší, kdo je vlevo a kdo vpravo?

Zde bude nejjednodušší natvrdo vybrat řekněme chlapce vlevo a holky vpravo, což je $(n!)^2$ možností, oni už se pak seřadí ve dvojicích dle libosti.

f) Kolika způsoby může děti seřadit, jestliže chce mít v každé dvojici vlevo kluka a vpravo holku, ale neřeší, jak jdou dvojice za sebou?

Tady prostě stačí nastoupit kluky do řady a k nim přiřazovat holky, což dá $n!$ možností.

g) Kolika způsoby může děti seřadit, pokud je chce mít v zástupu a aby se střídali kluci s holkami?

Nezávisle srovnáme kluky a holky do zástupů, to dává $(n!)^2$ možností. Pak si jen vybereme, jestli půjdou $hkhk...$ nebo $khkh...$, tedy celkem $2(n!)^2$ možností.

h) Učitelka děti posadí na kolotoč řetízkáč. Kolika způsoby to lze udělat?

Toto je problém známý jako „problém kulatého stolu“. Jeho zásadním rysem je rotační symetrie, například pokud máme tři děti a sedí na kolotoči způsobem $\begin{smallmatrix} & A & \\ B & & C \end{smallmatrix}$, tak to po otočení kolotoče dá $\begin{smallmatrix} & C & \\ A & & B \end{smallmatrix}$ a také $\begin{smallmatrix} & B & \\ C & & A \end{smallmatrix}$. Jinými slovy, to, co bychom normálně považovali za tři rozdílná seřazení, je jen jedno.

Kulatý stůl se dá v zásadě řešit dvěma přístupy. Jednak je možné jej „rozříznout“, vyřešit problém v jedné řadě a poté tu řadu zase slepit, celkový počet se pak ale musí vydělit číslem $2n$, protože to je přesně počet protočení řetízkáče (stolu). V případě našich dětí je můžeme posadit do řady $(2n)!$ způsoby, takže na řetízkovém kolotoči to bude $\frac{(2n)!}{2n} = (2n-1)!$ způsoby.

Druhá varianta je, že někam natvrdo posadíme Pepíčka, protože když se kolotoč točí, tak někdy na té pozici určit bude. Zbývá pak rozesadit ostatní, což je $(2n-1)!$ možností.

i) Kolika způsoby je možné posadit děti na řetízkový kolotoč tak, aby se střídali kluci s holkama?

Posadíme Pepíčka, tím je dáno, kde budou sedět kluci, tak je tam rozmístíme, to je $(n-1)!$ možností. Na zbývající místa dáme holky, celkem $n!(n-1)!$ způsobů.

△

! Příklad 11a.o: 10a.x Uvažujme čísla $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, kde $n \geq 11$. Vybereme z nich pět různých. Kolika způsoby je možné to udělat, aby bylo druhé největší číslo nejvýše 10?

Ukážeme dvě řešení, jedno bude snažší (používá standardní přístup), druhé obtížnější (vyžaduje představivost) ale s mnohem lepším tvarem výsledku.

1) Dřevorubecké řešení: Většinou pomůže zaměřit se na omezení, v tomto případě na druhé nejvyšší číslo. Kolika způsoby jej můžeme vybrat? Největší možnost je 10 a nejmenší 4, protože se pod něj ještě musí vejít další tři. Celkem je tedy 7 možností ($10-4+1$, pozor) pro jeho výběr. Teď vybereme další čísla.

Začneme největším. To musí být nad tím již vybraným, takže máme drobný problém, potřebujeme znát pozici již vybraného čísla. To ukazuje, že je třeba zavést parametr, budeme tedy dále předpokládat, že vybrané druhé největší číslo je k. Největší číslo pak vybíráme z rozsahu $k+1$, $k+2$ až n, celkem tedy $n-(k+1)+1 = n-k$ možností pro jednu konkrétní volbu k.

Teď tento výběr ještě doplníme o tři nejmenší, ty musí být pod číslem k, tedy vybíráme tři čísla z rozmezí $\{1, 2, \ldots, k-1\}$, bez opakování a najednou, tedy na pořadí nezáleží, což je $\binom{k-1}{3}$ možností. Pro jednu konkrétní volbu k pro druhé největší číslo tedy máme celkem $(n-k)\binom{k-1}{3}$ možností výběru. Pro jinou hodnotu k dostáváme zcela odlišné výběry (liší se přinejmenším pozicí druhého největšího čísla), jde tedy o rozklad na disjunktní množiny. Celkový počet možností tedy dostaneme sečtením možností pro jednotlivá k.

Závěr: Je možno udělat $\sum_{k=4}^{10} (n-k)\binom{k-1}{3}$ výběrů dle zadání.

Komentář: Tento postup nebyl příliš elegantní, ale často je jediný možný, takže se mnohdy smíříme s výsledkem v neuzavřeném tvaru. Zároveň jsme si připomněli několik užitečných triků. Teď už se ale podívejme na druhé řešení.

2) Elegantní řešení. Základem je následující zjednodušující úvaha. Není třeba situaci řešit ve třech krocích, ale ve dvou, nejprve vybereme čtyři nejmenší čísla a pak to největší. Když ta čtyři nejmenší vezmeme 1 až 10, tak máme

zajištěno, že druhé největší nepřekročí desítku. Poznamenejme, že opravdu je třeba to páté brát jako největší, protože když jej budeme brát bez omezení, tak bychom se mohli dostat vícekrát ke stejnému výběru (například $1,2,5,6$ a pak 9 dává stejný výběr jako $1,2,5,9$ a pak 6). Tím se ale dostáváme k problému, že když už ty čtyři vybereme najednou, tak neumíme zjistit, jak velké je to největší, abychom tak dostali možnosti pro výběr pátého, ještě většího.

To je problém podstatný a mnohý řešitel by v teď tuto cestu asi vzdal, ale existuje cesta, jak z toho ven. Onen výběr pátého čísla totiž v zásadě funguje dvojím způsobem. Pokud je i páté číslo v rozmezí do deseti, pak prostě stačí vybrat pět čísel z množiny $\{1,\dots,10\}$ a víc není třeba řešit. Druhá možnost je, že to páté číslo je větší než 10, pak ale zase přesně víme, jak jej můžeme vybrat.

Výběry tedy rozdělíme do dvou možností podle pozice největšího čísla. Pokud je nejvýše 10, pak jde vlastně o výběr pěti čísel z 10 možností. Pokud je největší číslo větší než 10, pak můžeme udělat onen dvoustupňový výběr, nejprve vybereme čtyři čísla z deseti možných a pak dobereme páté z rozmezí 11 až n, celkem $\binom{10}{4}(n-10)$ možností.

Závěr: Je možno udělat $\binom{10}{5}+\binom{10}{4}(n-10)$ výběrů dle zadání.

△

Teď si předvedeme několik teoretičtějších příkladů.

! Příklad 11a.p: Mějme množinu A o n prvcích.

a) Kolik je uspořádaných dvojic, které lze z prvků A vyvořit?

Zde se ptáme na velikost množiny $A\times A$ a tudíž je odpověď jasná, n^2.

b) Kolik je neuspořádaných dvojic různých prvků, které lze z prvků A vytvořit?

Odpovíme třemi způsoby.

1) Nejprve spočítáme všechny uspořádané dvojice různých prvků. To je snadné, stačí vzít všechny dvojice z části a) a odečíst dvojice stejných prvků, kterých je n. Je jich tedy $n^2-n=n(n-1)$.

Dvě uspořádané dvojice typu $(a,b),(b,a)$ vždy dají jednu neuspořádanou $\{a,b\}$, proto je počet neuspořádaných dvojic různých prvků roven $\frac{1}{2}n(n-1)$.

2) Další možný pohled na věc je, že neuspořádané dvojice jsou prostě jen dvouprvkové podmnožiny A, jinými slovy vytahujeme dva prvky z n, na pořadí nezáleží a bez opakování, což dává $\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{1}{2}n(n-1)$.

3) Zkusíme to ještě jinak, podíváme se na to z pohledu jednotlivých prvků A. První prvek se může dostat do dvojice s $n-1$ dalšími prvky. Druhý prvek už v započítané dvojici s prvním prvkem je, takže se může nově družit s dalšími $n-2$ prvky. Třetí prvek už je započítán ve dvojici s prvními dvěma, může tedy přidat dalších $n-3$ dvojic. Předposlední prvek ještě neměl započítánu dvojici s posledním a tím to končí, poslední už má všechny dvojice započítány. Celkem je dvojic

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\sum_{k=1}^{n-1}k=\tfrac{1}{2}n(n-1),$$

použili jsme Větu 9c.3 (ii).

c) Kolik je neuspořádaných dvojic prvků, které lze z prvků A vytvořit?

I zde je možné použít několik přístupů. Asi nejjednodušší je využít předchozí práce. Víme už, že je $\frac{1}{2}n(n-1)$ neuspořádaných dvojic s různými členy, dvojic typu $\{a,a\}$ je evidentně n, celkem je tedy $\frac{1}{2}n(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ neuspořádaných dvojic.

Druhá možnost je aplikovat postup b)3). První prvek A se může družit s n možnými prvky (i se sebou), druhý už je s prvním započítán, zbývá $n-1$ možností atd, poslední má ještě nezapočítanou možnost družit se sám se sebou. Celkem je to

$$n+(n-1)+\cdots+2+1=\sum_{k=1}^{n}k=\tfrac{1}{2}n(n+1).$$

Naopak obtížné by bylo zkusit adaptovat postup z b)1). Z části a) víme, kolik je všech uspořádaných dvojic, ale my je neumíme jednoduše převést na neuspořádané. Zádrhel je v tom, že některé uspořádané dvojice se při přechodu na neuspořádané druží po dvou, jmenovitě když jsou jejich složky různé, ale dvojice typu (a,a) už jdou na neuspořádané metodou jeden na jednoho. Pro rozumné zvládnutí by tedy bylo třeba rozdělit situaci na tyto dva případy, ale to jsme zpět u prvního řešení.

△

! Příklad 11a.q: Uvažujme dvě konečné množiny A,B. Kolik je možných relací z A do B?

Relace jsou podmnožiny $A\times B$, jejich počet je podle příkladu 11a.i roven $2^{|A\times B|}=2^{|A|\cdot|B|}$.

△

! Příklad 11a.r: Uvažujme množinu A o n prvcích.

a) Kolik je relací na A?

Podle příkladu 11a.q je jich 2^{n^2}.

b) Kolik je reflexivních relací na A?

Reflexivní relace automaticky obsahují všechny dvojice typu (a, a), zde není žádná svoboda volby. Počet reflexivních relací je tedy dán počtem podmnožin množiny všech uspořádaných dvojic různých prvků. Těch je $n(n-1)$, viz příklad 11a.p b)1), takže počet podmnožin a tím i počet reflexivních relací na A je $2^{n(n-1)}$.

c) Kolik je symetrických relací na A?

U symetrické relace nezáleží na orientaci, čili se u každé neuspořádané dvojice prvků ptáme, zda ji vezmeme do relace nebo ne. Jinými slovy, zajímá nás počet všech podmnožin množiny neuspořádaných dvojic prvků, která má podle příkladu 11a.p c) velikost $\frac{1}{2}n(n+1)$. Závěr: Existuje $2^{n(n+1)/2}$ symetrických relací na A.

d) Kolik je antisymetrických relací na A?

Toto nepůjde najednou, antisymetrická relace se totiž dívá na dvojice různě. Pokud je to dvojice stejných prvků, tak to antisymetrii nezajímá a můžeme si je brát či nebrat dle libosti. Zato u dvojice různých prvků povoluje antisymetrie žádnou či jen jednu spojnici. Antisymetrickou relaci tedy vytvoříme ve dvou nezávislých fázích neboli použijeme násobící princip. Nejprve se rozhodneme, které ze smyček použijeme. Možných smyček je n, my z nich vybíráme podmnožiny, je tedy 2^n možností.

V druhé fázi doplníme spojnice mezi nestejnými prvky. Množina neuspořádaných dvojic různých prvků má dle příkladu 11a.p b) velikost $\frac{1}{2}n(n-1)$, my se u každé dvojice rozhodujeme mezi třemi variantami: nevzít vůbec, vzít od menšího k většímu, vzít od většího k menšímu (vzhledem k pořadí prvků v množině A). Je tedy možno vytvořit $3^{n(n-1)/2}$ výběrů.

Závěr: Na množině A je $2^n 3^{n(n-1)/2}$ různých antisymetrických relací.

e) Vzhledem k tomu, že asymetrické relace jsou vlastně antisymetrické a navíc antireflexivní, znamená to, že u nich nejsou pro dvojice stejných prvků žádné možnosti výběru. Je tedy $3^{n(n-1)/2}$ asymetrických relaci na množině A.

Tranzitivita se špatně kombinatoricky uchopuje, ani s tím nebudeme začínat.

△

Příklad 11a.s: a) Kolik lze vytvořit různých řetězců ze slova *DUMBO*?

To je snadné, jde o permutace čili $5! = 120$ řetězců.

b) Kolik lze vytvořit různých řetězců ze slova *BAMBI*?

Zase jde o permutace, ale máme problém, protože se nám dvě písmena shodují. Zkusme se nejprve odvolat na to, co umíme, a označit si ta béčka, máme tedy B_1AMB_2I. Z tohoto umíme udělat 5! řetězců. My si je teď rozdělíme, množinu všech řetězců rozložíme na disjunktní množiny tak, že v každé množině je vždy jeden konkrétní řetězec a také všechny jiné řetězce, které z něj lze získat permutací těch B. Jedna taková množina je třeba $\{B_1B_2AMI, B_2B_1AMI\}$, jiná třeba $\{B_1AB_2IM, B_2AB_1IM\}$. Je snadné si rozmyslet, že každá tato množina má přesně $2! = 2$ prvky.

Je také zjevné, že když teď od béček odmažeme ty indexy neboli zrušíme jejich pořadí, tak se každá tato množina zcvrkne na jeden řetězec, takže počet různých řetězců vytvořitelných z *BAMBI* je $\frac{5!}{2!} = 60$.

Tento postup můžeme snadno aplikovat i na případy, kdy se opakuje více objektů, třeba ze slova *BREKEKE* lze vytvořit $\frac{7!}{2!3!} = 420$ různých řetězců.

Ukážeme si ještě jeden způsob, jak na *BAMBI*. Začneme tím, že nejprve mezi pěti pozicemi vybereme ty, kam budeme strkat béčka: $\binom{5}{2}$. V druhé fázi na ostatní místa zpermutujeme AMI, celkem dostaneme $\binom{5}{2}3! = 60$ různých řetězců.

△

Tuto myšlenku si nyní zobecníme.

! Věta 11a.6.

Mějme n objektů, z toho n_1 je typu 1 (jsou nerozlišitelné), n_2 typu 2 až n_k je typu k, tedy $\sum_{i=0}^{k} n_i = n$.

Pak je $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$ různých permutací těchto objektů.

Důkaz: Indukcí na k.

(0) $k = 1$: Permutujeme objekty jednoho druhu, máme $n = n_1$, tedy má být $\frac{n_1!}{n_1!} = 1$ možností, což souhlasí, u stejných objektů prohození nepoznáme.

(1) Předpokládejme, že umíme permutovat kolekce k typů objektů. Mějme teď kolekci $k+1$ typů objektů.

Nejprve vybereme umístění pro objekty typu $k+1$ mezi n volnými místy, což se dá udělat $\binom{n}{n_{k+1}}$ způsoby. Zbývá uspořádat $(n - n_{k+1})$ objektů o k typech mezi zbývajícími $n - n_{k+1}$ volnými místy, což podle indukčního předpokladu lze udělat $\frac{(n-n_{k+1})!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!}$ způsoby. Celkem je tedy možno vyrobit

$$\binom{n}{n_{k+1}} \cdot \frac{(n-n_{k+1})!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!} = \frac{n!}{n_{k+1}!(n-n_{k+1})!} \cdot \frac{(n-n_{k+1})!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!\cdot n_{k+1}!}$$

různých permutací.

□

Příklad 11a.t: Ze slova $BAOBAB$ je možno vytvořit $\frac{6!}{3!2!1!} = 60$ různých slov.

△

Příklad 11a.u: Vrátíme se na chvíli ke kartám. Ve hře bridge se všech 52 karet rozdá mezi 4 soutěžící (každý má 13). Záleží však jen na tom, kdo dostane jakou, nikoliv na pořadí, v jakém k nim jednotlivé karty přicházejí. Kolika způsoby to lze udělat?

Jedna možnost je vybrat karty pro prvního, pak pro druhého atd, jde o fáze s počtem možností, který nezávisí na konkrétní volbě předchozí fáze, tedy podle násobícího principu je počet možností

$$\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13} = \frac{52!}{13!39!} \cdot \frac{39!}{13!26!} \cdot \frac{26!}{13!13!} \cdot 1 = \frac{52!}{13!13!13!13!} \sim 5.36 \cdot 10^{28}.$$

(Pro srandu: Je to 53644737765488792839237440000.)

Ten předposlední výraz vypadá zajímavě, najde se k němu přímá cesta? Ano, položíme karty do řady a rozhodneme, že první hráč dostane prvních 13, druhý druhých 13 atd. Rozdání se tedy realizuje permutacemi karet, ale protože u jednotlivého hráče na pořadí nezáleží, zrušíme příslušné počty permutací tím, že dělíme těmi 13!.

Alternativní řešení: Dá se zkusit i změna úhlu pohledu, nerozdáváme karty hráčům, ale přidělujeme hráče kartám. Vyrobíme za každého hráče 13 žetónků a řadíme je různě podél karet. Jde o permutace s opakujícími se prvky, vychází tedy $\frac{52!}{13!13!13!13!} \sim 5.36 \cdot 10^{28}$.

△

Kromě permutací jsme v této kapitole zkoumali také výběry. Jak to vypadá, když máme od každého typu omezený počet kusů a chceme z nich několik vybrat (ať už s pořadím či bez)? Je to velký problém podobný tomu z příkladu 11a.l, protože hned první volbou změníme počty kusů, které jsou k dispozici do dalších kol, takže nelze používat násobící princip a v zásadě nezbyde nic než zase rozebírat možnosti například pomocí stromů. Jinými slovy, žádné rozumné vzorce nejsou a každý příklad je svůj. Jeden takový si ukážeme.

! **Příklad 11a.v:** **(i)** Máme k dispozici tři bonbóny malinové a sedm bonbónů citrónových. Chceme-li si vzít osm, kolika způsoby je to možné?

a) Na pořadí nezáleží: To je snadná úloha, můžeme mít nejvýše tři malinové, ale alespoň jeden vzít také musíme, jinak by nám citrónové nestačily na doplnění do osmi. Jsou tedy tři možné způsoby (1,2 nebo 3 malinové).

b) Na pořadí záleží: Zde jsou možné dva přístupy. Jeden využívá výběru bez pořadí, který se pak zpermutuje. Nestačí ale vzít výsledek z a) a vynásobit určitou konstantou, protože počet různých permutací záleží na tom, kolikrát se který prvek opakuje. Situace se tedy musí rozložit dle počtů, například malinových bonbónů.

$m = 1$: Zde permutujeme jeden M a sedm C, což dává $\frac{8!}{1!7!} = 8$ možností. Jde to i selským rozumem, prostě vybíráme místo v pořadí pro ten jeden malinový.

$m = 2$: Zde permutujeme dva M a šest C, $\frac{8!}{2!6!} = 28$ možností.

$m = 3$: $\frac{8!}{3!5!} = 56$ možností.

Celkem $8 + 28 + 56 = 92$ možností.

Druhá možnost je udělat si strom, což je ale evidentně vysoce nouzová metoda, protože by měl mít nakonec 92 větví.

(ii) Máme k dispozici pět bonbónů malinových, tři pomerančové a pět citrónových. Chceme-li si vzít devět, kolika způsoby je to možné?

Tady už to začíná být opravdu zajímavé, a to dokonce i v případě, že neuvažujeme pořadí. Je například vidět, že musíme vzít alespoň jeden bonbón malinový a alespoň jeden citrónový, ale co dál? Jedna možnost je rozebrat případy podle toho, kolik vezmeme třeba těch malinových.

$m = 1$: Zbývá osm bonbónů, zde není na výběr, musíme prostě vzít všechny P a všechny C. Jedna možnost.
$m = 2$: Zbývá vzít sedm bonbónů, tedy dva či tři P. Dvě možnosti.
$m = 3$: Zbývá vzít šest bonbónů, tedy jeden až tři P, tři možnosti.
$m = 4$: Zbývá vzít pět bonbónů, tedy nula až tři P, čtyři možnosti.
$m = 5$: Zbývá vzít čtyři bonbóny, tedy nula až tři P, zase čtyři možnosti.
Celkem máme 14 možností.
Pokud bychom chtěli výběr s pořadím, pak pro každou z těchto 14 možností musíme řešit permutace.

Je jasné, že kdyby se vybíralo z řekněme šesti druhů, tak už je tento rozbor úkolem na dlouhé zimní večery. Existují lepší alternativy?

Je zde možnost převodu na rovnici, naše úloha se dá formulovat jako hledání počtu řešení rovnice $m+p+c = 9$, které jsou z $\mathbb{N}_0$ a splňují $m \leq 5$, $p \leq 3$ a $c \leq 5$. Základem bude přístup z příkladu příkladu 11a.k, ale ještě potřebujme další nástroje, vrátíme se k tomuto příkladu v další kapitole, viz příklad 11b.e.

Popravdě řečeno, pro větší počet druhů by i toto bylo dosti pracné. Pak by zase asi bylo nejefektivnějším řešením napsat algoritmus, který by prošel všechny možnosti a spočítal je. Jinými slovy bychom si to rozdělili, my bychom udělali to přemýšlení a počítač by odvedl hrubou manuální práci. Tak to má být.
△

Cvičení

Cvičení 11a.1 (rutinní)**:** Napsali jsme pěti kamarádům e-mail a očekáváme odezvu, předpokládejme, že každý napíše jednou a jiné e-maily už nedorazí.
a) V kolika pořadích se jejich odpovědi mohou v mailboxu objevit?
b) Pokud jsme náš mailserver nechali přecpat a má místo už jen na tři příchozí e-maily, kolik je možností pro to, co v mailboxu najdeme?

Cvičení 11a.2 (rutinní)**:** Kolika způsoby je možné odpovědět na 100 otázek typu ano/ne, je-li možné na otázku také neodpovědět?

Cvičení 11a.3 (rutinní)**:** Kolika způsoby je možno vybrat 6 předmětů z deseti různých věcí, jestliže
a) výběr je uspořádaný a opakování není povoleno?
b) výběr je uspořádaný a opakování je povoleno?
c) výběr je neuspořádaný a opakování není povoleno?
d) výběr je neuspořádaný a opakování je povoleno?

Cvičení 11a.4 (rutinní)**:** Kolik je možno vytvořit poznávacích značek, jestliže se skládá z číslice nerovné 0, pak písmena, pak číslice nerovné 0 a nakonec čtyřmístného čísla?

Cvičení 11a.5 (rutinní)**:** Kolika různými způsoby je možno rozdělit medaile mezi osm běžců za předpokladu, že nebude remíza?

Cvičení 11a.6 (rutinní)**:** Kolika způsoby je možné vybrat 8 mincí z prasátka, ve kterém je 100 stejných korun a 80 stejných dvoukorun?

Cvičení 11a.7 (rutinní)**:** Kolik je osmibitových binárních slov, která obsahují právě pět jedniček?

Cvičení 11a.8 (rutinní)**:** Na škole je 11 profesorů matematiky a 7 profesorů fyziky. Kolika způsoby je možné vybrat výbor skládající se ze tří matiků a tří fyziků?

Cvičení 11a.9 (rutinní)**:** Kolik různých kombinací korun, dvoukorun, pětikorun, desetikorun a dvacetikorun může být v prasátku, jestliže je tam 20 mincí?

Cvičení 11a.10 (rutinní)**:** Uvažujme písmena $abcdef$.
a) Kolik jejich permutací končí na d?
b) Kolik jejich permutací končí na g?

Cvičení 11a.11 (rutinní)**:** Kolika různými způsoby je možno rozvést 3000 knih do tří různých skladišť?

Cvičení 11a.12 (rutinní)**:** Z 15 otázek na přijímací zkoušky mají mít 4 správnou odpověď a, 4 správnou odpověď b, 4 správnou odpověď c a 3 správnou odpověď d. Kolik je třeba vyrobit šablon k opravování, aby ke každé příslušné volbě otázek byla šablona?

Cvičení 11a.13 (rutinní)**:** Kolika způsoby lze rozdělit šest identických balónků do devíti různých košů?

Cvičení 11a.14 (rutinní)**:** V baru nalévají do sklenic tři druhy vína a dva druhy piva. Měli jste za večer pět sklenic. Kolika způsoby to mohlo proběhnout, když jste nechtěli míchat víno s pivem?

Cvičení 11a.15 (rutinní)**:** Učitel se rozhodl vyhodit 40 lidí ze 200 studentů. Kolik se mu nabízí možností? Kolik má možností za situace, kdy těch 40 představuje jen horní mez, ale tolik jich vyhodit nemusí?

Cvičení 11a.16 (rutinní)**:** a) Kolik existuje desetimístných řetězců sestavených ze dvou nul, tří jedniček a pěti dvojek?
b) Kolik existuje desetimístných čísel ve trojkové soustavě, která jsou zapsaná pomocí dvou nul, tří jedniček a pěti dvojek?

Cvičení 11a.17 (rutinní)**:** Kolik je možných Internetových adres podle protokolu IPv4?
Adresy mají 32 bitů a jsou rozděleny do tří tříd.
Class A pro velké sítě: za 0 následuje 7-bitový netID (nesmí to být 1111111) a pak 24-bitový hostID (nesmí být samé 0 či samé 1).
Class B pro střední sítě: za 10 následuje 14-bitový netID a pak 16-bitový hostID (nesmí být samé 0 či samé 1).
Class C pro malé sítě: za 110 následuje 21-bitový netID a pak 8-bitový hostID (nesmí být samé 0 či samé 1).
Poznámka: Rezervovány jsou ještě Class D 1110 pro speciální účely (multicasting) a Class E 11110 jako rezerva.
IPv6 už má 128 bitové adresy.

Cvičení 11a.18 (rutinní)**:** Kolik má množina se 100 prvky alespoň dvouprvkových podmnožin?

Cvičení 11a.19 (rutinní)**:** Hodí se desetkrát po sobě mincí.
a) Kolika způsoby to může dopadnout?
b) Kolik z nich má přesně dvě hlavy?
c) Kolik z nich má stejně hlav a orlů?
d) Kolik z nich má více hlav než orlů?
e) Jak se odpovědi na otázky a) až d) změní, pokud házeme najednou desíti různými mincemi?
f) Jak se odpovědi na otázky a) až d) změní, pokud házeme najednou desíti identickými mincemi?

Cvičení 11a.20 (rutinní)**:** V obchodě mají 5 různých druhů čokolády. Kolika způsoby je možno koupit
a) tři čokolády?
b) tři čokolády tak, aby byla každá jiná?
c) šest čokolád tak, aby byla každá jiná?
d) šest čokolád tak, aby se každý druh vyskytnul?
e) šest čokolád tak, aby tam určitě byly alespoň tři mléčné s lískovými oříšky, ale určitě ne víc než jedna hořká?

Cvičení 11a.21 (rutinní)**:** Student si vždycky ráno cestou do školy koupí bagetu.
a) Jestliže je k dispozici šest druhů a nechce si v jednom týdnu kupovat stejnou vícekrát, kolika různými způsoby může mít během týdne bagety (na pořadí záleží)?
b) Jak dlouho může studovat, pokud nechce bagetové týdny opakovat?

Cvičení 11a.22 (rutinní)**:** Kolik řetězců lze vytvořit permutováním slova $BUBUKUKU$?

Cvičení 11a.23 (rutinní)**:** Kolik permutací řetězce $ABCDEFGH$ obsahuje slova BA a FEC?

Cvičení 11a.24 (rutinní)**:** Kolika způsoby je možno uspořádat písmena a, b, c a d, jestliže b nesmí přijít hned po a?

Cvičení 11a.25 (rutinní)**:** Kolika způsoby je možné uspořádat $AABBCCDDEE$ tak, aby nebyly dvě A za sebou?

Cvičení 11a.26 (rutinní)**:** Kolik řetězců je možné vytvořit pomocí písmen ze slova $HAHA$?

Cvičení 11a.27 (rutinní)**:** Kolika způsoby je možno z pěti žen a sedmi mužů vybrat čtyřčlenný výbor za předpokladu, že musí obsahovat alespoň jednoho muže a alespoň jednu ženu?

Cvičení 11a.28 (rutinní)**:** V cukrárně mají tři typy oplatku na zmrzlinu (kornoutek, kalíšek, mistička ve tvaru lastury), osm typů zmrzliny a dvě možnosti posypu (čokoláda, oříšky).
a) Kolik je možné vytvořit zmrzlin ze tří kopečků, jestliže je možné opakovat druh zmrzliny a přidat posyp?
b) Kolik je možné vytvořit zmrzlin ze tří kopečků, jestliže není možné opakovat druh zmrzliny, ale můžeme přidat až dva různé posypy?

Cvičení 11a.29 (rutinní)**:** Kolika způsoby je možno vybrat půltucet koblih z 10 možných druhů, jestliže
a) se nesmí opakovat druh?
b) musí být všechny stejné?
c) je to výběr bez omezení?
d) musí být alespoň dva druhy?
e) musí být alespoň čtyři jahodové?
f) nesmí být víc než tři pudinkové?
Na pořadí nezáleží.

Cvičení 11a.30 (rutinní)**:** Kolik alespoň osmipísmenných řetězců lze vytvořit z písmen slova *BALAKLAVA*?

Cvičení 11a.31 (rutinní)**:** Kolika způsoby je možné vybrat čtyři studentské zástupce, jestliže tam mají být obsaženy všechny stupně a na škole je 2500 studentů bakalářské etapy, 1200 studentů magisterské etapy a 300 doktorandů?

Cvičení 11a.32 (rutinní)**:** Kolik je možné udělat SPZ, jestliže jsou možné formáty 3 písmena 4 čísla nebo 2 písmena 5 čísel?

Cvičení 11a.33 (rutinní)**:** Kolik je možno utvořit palindromů (řetězců nad 26 písmeny abecedy, které se čtou stejně zleva i zprava) o délce n?

Cvičení 11a.34 (rutinní)**:** Kolika způsoby je možno vytvořit fotku 6 svatebčanů v řadě, jestliže
a) nevěsta a ženich musí být vedle sebe;
b) nevěsta musí být někde nalevo od ženicha;
c) nevěsta nesmí být vedle ženicha.

Cvičení 11a.35 (rutinní)**:** Jméno proměnné v jazyce C je řetězec o délce 1 až 8 skládající se z malých a velkých písmen, číslic či podtržítka, první znak nesmí být číslice. Kolik proměnných je možno pojmenovat?

Cvičení 11a.36 (rutinní)**:** Uvažujme slova o délce 7 vytvořená z 26 malých písmen abecedy (6 samohlásek, 20 souhlásek).
a) Kolik z nich má právě dvě samohlásky?
b) Kolik z nich začíná d nebo t následováno samohláskou?
c) Jak se to změní, když není možno písmena opakovat?

Cvičení 11a.37 (rutinní)**:** Kolik je čtyřbitových řetězců, které neobsahují tři nuly hned po sobě?

Cvičení 11a.38 (rutinní)**:** Kolik je pětibitových řetězců, které obsahují tři nuly po sobě?
Viz také cvičení 11b.4.

Cvičení 11a.39: (i) Kolika způsoby se může postavit osm mužů a pět žen do řady tak, aby dvě ženy nestály za sebou?
(ii) Kolika způsoby se může postavit m mužů a n žen tak, aby dvě ženy nestály za sebou?

Cvičení 11a.40 (rutinní)**:** Kolika způsoby lze rozdělit 8 dětí do čtyř houpacích lodiček pro dva na pouti, když je nám jedno, jak v každé lodičce sedí?

Cvičení 11a.41 (rutinní)**:** Nástupu v tanečních se účastní n mladíků a n dívek. V kolika různých pořadích mohou (po jednom) nastupovat, mají-li se střídat mladíci s dívkami?

Cvičení 11a.42 (rutinní)**:** Zvolme přirozené číslo k menší než 99.
a) Kolik permutací čísel $1, 2, \ldots, 100$ zachovává čísla k, $k+1$, $k+2$ ve správném pořadí a za sebou?
b) Kolik permutací čísel $1, 2, \ldots, 100$ zachovává čísla k, $k+1$, $k+2$ ve správném pořadí?

Cvičení 11a.43 (rutinní)**:** Vybíráme čtyři čísla z $1, 2, \ldots, 100$, a to bez opakování. Kolika způsoby je to možné udělat tak, aby:
a) se ve výběru objevila čísla $13, 23, 31$ po sobě?
b) se ve výběru objevila čísla $13, 23, 31$ nikoliv nutně hned po sobě, ale v tomto pořadí (tj. může se mezi ně vmáčknout i něco jiného)?
c) se ve výběru objevila nějaká tři čísla po sobě?
d) se ve výběru objevila tři po sobě jdoucí čísla, ale nemusí být nutně vybrána hned po sobě, jen v tomto pořadí (tj. může se mezi ně vmáčknout i něco jiného)?
e) Vyřešte a) a b), pokud vybíráme ze sedmi čísel.

Cvičení 11a.44 (rutinní)**:** Kolika způsoby lze vybrat tucet jablek z koše, ve kterém je 20 červených, 20 žlutých a 20 zelených, jestliže chceme alespoň tři od každé barvy?

Cvičení 11a.45 (rutinní)**:** Kolik je možno vytvořit binárních řetězců z osmi nul a desíti jedniček, jestliže po každé nule musí přijít jednička?
A dvě jedničky?

Cvičení 11a.46 (rutinní)**:** Kolika způsoby je možno rozesadit n lidí kolem kulatého stolu?

Cvičení 11a.47 (rutinní)**:** Máme n manželských párů.
a) Kolika způsoby je možno je posadit do řady, aby seděli v pořadí muž-žena?
b) Kolika způsoby je možno je posadit do řady, aby seděl každý pár vedle sebe?
c) A co kolem kulatého stolu?

Cvičení 11a.48 (rutinní)**:** Kolik je nejvýše 8-místných binárních slov (neprázdných) splňujících tuto podmínku: Jestliže je první znak 0, pak už může následovat jen nula až sedm znaků 1. Jestliže je první znak 1, pak může následovat jen lichý počet jedniček.

Cvičení 11a.49 (poučné)**:** a) Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, uvažujme čtercovou síť o šířce m čtverců a výšce n čtverců. Kolika způsoby je možno se dostat z levého dolního rohu do pravého horního rohu, jestliže je povoleno se pohybovat jen doprava nebo nahoru po této síti?
Interpretace: Chceme se dostat v rovině z bodu $(0, 0)$ do bodu (m, n), můžeme ale jen postupně zvětšovat jednotlivé souřadnice po 1.
b) Nechť $m, n, k \in \mathbb{N}$. Kolika způsoby je možné dojít v 3D-prostoru z bodu $(0, 0, 0)$ do bodu (m, n, k) za předpokladu, že je možné jít jen kroky o jedno podél některé osy ve směru zvyšující se souřadnice osy?

Cvičení 11a.50: Kód s pojistkou je zvolen tak, aby byl pětimístný, první čtyři místa jsou libovolné číslice a poslední je číslice zvolena tak, aby byl součet dvou posledních cifer dělitelný sedmi. Kolik takových kódů je možné vytvořit?

Cvičení 11a.51: Když vypíšeme všechna přirozená čísla menší či rovna 1000 v desítkové soustavě, kolik se celkem použije číslic
a) 0?
b) 1?
c) 2?
d) 3?
e) 9?

Cvičení 11a.52 (poučné)**:** Test má 5 otázek. Jestliže má každá otázka mít váhu alespoň 5 bodů, kolika způsoby se dají body rozvrhnout, aby byl součet 50?

Cvičení 11a.53: Kolik různých celočíselných řešení, které splňují $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 0$, $x_3 > 3$, $x_4 \geq 2$, má rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$?

Cvičení 11a.54: Kolik podmnožin množiny $\{3, 7, 9, 11, 24\}$ má vlastnost, že mají součet menší než 28?

Cvičení 11a.55: Jakými různými způsoby může proběhnout zápas mezi tenisty A a B hraný na tři vítězné sety?

Cvičení 11a.56: Kolika způsoby může skončit závod čtyř skikrosařů?

Cvičení 11a.57: Kolika způsoby je možno v kině posadit do řady šest chlapců a osm dívek tak, aby žádní chlapci neseděli vedle sebe?

Cvičení 11a.58: U stolu se sešlo n lidí. Když si chtějí připít, kolik se ozve cinknutí?

Cvičení 11a.59: Kolik má konvexní n-úhelník úhlopříček?

Cvičení 11a.60: Nechť M je množina. Kolik lze vytvořit uspořádaných dvojic (A, B) takových, že $A \subseteq B \subseteq M$?
Nápověda: Uvažujme takovou dvojici. Pak každý $x \in M$ patří do právě jedné z A, $A - B$, $M - B$.

Cvičení 11a.61 (poučné)**:** Dokažte, že (viz Fakt 11a.4)
(i) pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí $\binom{n}{0} = 1$;
(ii) pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí $\binom{n}{1} = n$.
(iii) pro všechna $k \leq n \in \mathbb{N}_0$ platí $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Řešení:

11a.1: a) $5! = 120$. b) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

11a.2: 3^{100}.

11a.3: a) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$. b) $10^6 = 1000000$. c) $\binom{10}{6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$.
d) $\binom{10+6-1}{6} = \binom{15}{6} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6!} = 5005$.

11a.4: $9 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10^4 = 21060000$.

11a.5: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

11a.6: Počty jsou v zásadě irelevantní, podstatné je, že od každého je alespoň osm kusů. Odhadneme, že na pořadí nezáleží, $\binom{2+8-1}{8} = \binom{9}{8} = 9$. Logické, vybíráme, kolk vezmeme dvojkorun, možnosti od žádné po osm. Kdyby na pořadí záleželo, tak je to $2^8 = 256$ možností.

11a.7: $\binom{8}{5} = 56$.

11a.8: $\binom{11}{3} \cdot \binom{7}{3} = 5775$.

11a.9: Každá mince si vybírá (s opakováním) z pěti typů, na pořadí nezáleží (jsou volně ložené v prasátku), tedy $\binom{5+20-1}{20} = \binom{24}{20} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4!} = 10626$.

11a.10: a) $5! = 120$. b) 0.

11a.11: Každá kniha si vybírá skladiště, s opakováním, na pořadí nezáleží, proto $\binom{3+3000-1}{3000} = \binom{3002}{3000} = 4504501$.

11a.12: Je to otázka na seřazení písmen, tedy permutace a některá písmena se opakují: $\frac{15!}{4!4!4!3!} = 15765750$.

11a.13: Balónky si vybírají koše s opakováním, $\binom{9+6-1}{6} = \binom{14}{6} = 3003$.

11a.14: Buď pivo nebo víno, sčítací princip. Pět výběrů ze tří vín s opakováním, na pořadí záleží, tedy 3^5, podobně pivo, celkem $3^5 + 2^5 = 275$.

11a.15: $\binom{200}{40}$, $\sum_{k=0}^{40} \binom{200}{k}$.

11a.16: a) $\frac{10!}{2!3!5!} = 2520$. b) Nutno vyloučit nulu na prvním místě, tedy dvě možnosti, co tam dát: $\frac{9!}{2!2!5!} + \frac{9!}{2!3!4!} = 2016$. Nebo odečteme od řetězců ty s nulou na začátku: $\frac{10!}{2!3!5!} - \frac{9!}{1!3!5!} = 2016$

11a.17: $(2^7 - 1) \cdot (2^{24} - 2) + 2^{14} \cdot (2^{16} - 2) + 2^{21} \cdot (2^8 - 2) = 3737091842$.

11a.18: $2^{100} - (100 + 1)$.

11a.19: a) $2^{10} = 1024$. b) $\binom{10}{2} = 45$. c) $\binom{10}{5} = 252$. d) $\frac{1}{2}(1024 - 252) = 386$. e) Nijak. f) Nové a) bude 11 (nula orlů, jeden orel až deset orlů), nové b) a c) jsou 1, nové d) je 5 (šest, sedm až deset hlav).

11a.20: a) $\binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35$. b) $\binom{5}{3} = 10$. c) Nejde to.
d) Nejprve vezmeme jednu od každého druhu a šestou čokoládu dobereme, 5 možností.
e) Možnosti se třemi lískovými natvrdo plus zbývající volný výběr, to je $\binom{5+3-1}{3} = 35$ možností, od toho odečteme možnosti se třemi lískovými a dvěma hořkými natvrdo, dobereme tedy šestou možností, odpověď je $35 - 5 = 30$.

11a.21: a) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$, pokud chodí do školy každý pracovní den.
b) Odečteme-li prázdniny (dva vánoční týdny, v létě 9 týdnů a jarní prázdniny), zbývá 40 týdnů, tedy může si školy užívat 18 let.

11a.22: $\frac{8!}{2!2!4!} = 420$.

11a.23: Permutujeme celky BA, FEC a tři písmena, tedy $5! = 120$.

11a.24: Doplňkem, $4! - 3! = 18$.

11a.25: $\frac{10!}{(2!)^5} - \frac{9!}{(2!)^4} = 90720$.

11a.26: Neříká se „všech písmen“, takže se musí brát i podmnožiny písmen. Ze všech čtyř se vytvoří $\frac{4!}{2!2!} = 6$ řetězců. Tři písmena ze čtyř je možno obecně vybrat $\binom{4}{3} = 4$ způsoby, ale tady máme opakovaná písmena, jsou tedy jen dva způsoby: $\{A, A, H\}$ a $\{A, H, H\}$. Každý z nich vede na $\frac{3!}{2!1!} = 3$ řetězce, celkem tedy $2 \cdot 3 = 6$ třípísmenných řetězců. Podobně výběry dvou písmen jsou jen tři $\{A, A\}$, $\{A, H\}$ a $\{H, H\}$, první a poslední dávají jeden řetězec, prostřední dává dva, celkem tedy $1 + 2 + 1 = 4$ dvoupísmenné řetězce. Jednopísmenné řetězce jsou jen dva, A a H. Celkem: 18 řetězců.

11a.27: $\binom{5}{3}\binom{7}{1} + \binom{5}{2}\binom{7}{2} + \binom{5}{1}\binom{7}{3} = 455$.

11a.28: a) Fáze oplatek, zmrzliny, posyp (tam zavedeme třetí možnost „žádný“), $3 \cdot 8^3 \cdot 3 = 4608$
b) Možnosti posypu jsou čtyři (nic, čoko, oříšky, čoko a oříšky), $3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 = 4032$.

11a.29: Tucet je 12. a) $\binom{10}{6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{24} = 210$. b) 10; c) $\binom{10+6-1}{6} = \binom{15}{6} = 5005$. d) Doplňkem c) bez a) 4795. e) Vybereme čtyři jahodové a dobereme další dvě bez omezení, $\binom{10+2}{2} = \binom{11}{2} = 55$. f) doplňkem c) bez e) 4950.

11a.30: Máme A čtyřikrát, L dvakrát a tři písmena po jednom. Ze všech je $\frac{9!}{4!2!}$ permutací.
Osmipísmenné řetězce: Vynecháme A, je jich $\frac{8!}{3!2!}$. Vynecháme L, je jich $\frac{8!}{4!}$. Vynecháme jiné písmeno, je jich $\frac{8!}{4!2!}$. Celkem $\frac{9!}{4!2!} + \frac{8!}{3!2!} + \frac{8!}{4!} + 3 \cdot \frac{8!}{4!2!} = 15120$.

11a.31: Zástupce některé skupiny bude dvakrát, podle toho to rozdělíme na disjunktní případy:
$\binom{2500}{2}\binom{1200}{1}\binom{300}{1} + \binom{2500}{1}\binom{1200}{2}\binom{300}{1} + \binom{2500}{1}\binom{1200}{1}\binom{300}{2} = \frac{2500 \cdot 2499}{2} 1200 \cdot 300 + 2500 \frac{1200 \cdot 1199}{2} 300 + 2500 \cdot 1200 \frac{300 \cdot 299}{2}$

$= \frac{1}{2}2500 \cdot 1200 \cdot 300(2499 + 1199 + 299) = 1798650000000.$

11a.32: $26^3 10^4 + 26^2 10^5 = 243360000.$

11a.33: Stačí vybrat písmena pro první polovinu slova, $26^{n/2}$ pro n sudé, $26^{(n+1)/2}$ pro n liché, dá se to napsat jako $26^{\lceil n/2 \rceil}$.

11a.34: a) Vybereme zda ženich nalevo či napravo, pak usadíme tuto dvojici, pak rozesadíme ostatní: $2 \cdot 5 \cdot 4! = 240$, b) ze symetrie $\frac{1}{2}6! = 360$; c) doplňkem $6! - 2 \cdot 5! = 480$.

11a.35: $53 + 53 \cdot 63 + 53 \cdot 63^2 + \cdots = 53 \sum_{k=0}^{7} 63^k = 53 \frac{1-63^8}{1-63} = 212133167002880.$

11a.36: a) $\binom{7}{2} 6^2 20^5 = 2419200000$. b) $6 \cdot 26^5 + 6 \cdot 26^5 = 142576512$. c) $\binom{7}{2} 6 \cdot 5 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1172102400$ a $6 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 + 6 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 = 61205760$.

11a.37: Všech je 2^4 a tři nuly po sobě mají řetězce 0001, 0000, 1000, tedy odpoveď je $2^4 - 3 = 13$.

11a.38: Těch je asi málo, zkusíme výpisem, chce to systém, tak nejprve tři nuly na začátku, pak tři nuly uprostřed, pak tři nuly na konci, ale hlídáme, jestli už to nebylo předtím: 00000, 00001, 00010, 00011, 10000, 10001, 01000, 11000. Je jich 8.

11a.39: (i) Počet různých pozic mužů a žen: Vybíráme pět míst pro ženy z $7+2$ možností mezi muži a na koncích, $\binom{9}{5}$. Pro pevnou pozici mužů a žen zpermutujeme konkrétní muže a ženy, $8! \cdot 5!$. Celkem: $\binom{9}{5} 8! \cdot 5! = 609638400$.
(ii) $\binom{m+1}{n} n! m! = \frac{(m+1)! m!}{(m+1-n)!}$ pokud $m + 1 \geq n$, jinak 0.

11a.40: Seřadíme děti a odpočítáme po dvou, pak zrušíme pořadí v lodičkách: $\frac{8!}{(2!)^4} = 2520$. Nebo vybíráme postupně: $\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$.

11a.41: Jsou dvě situace, jedna začíná kluk-holka a pokračuje stejně, druhá začíná holka-kluk. Pro danou situaci je pak třeba nezávisle naplnit kluky a holky: $2(n!)^2$.

11a.42: a) Držíme je u sebe, takže permutujeme 98 celků, proto 98! permutací. b) Nejprve najdeme místa pro ta tři čísla mezi stovkou, pak na zbytek míst zpermutujeme zbytek, proto $\binom{100}{3} 97!$.

11a.43: a) Vybereme další číslo, a to buď před nebo za ty tři, $97 + 97 = 194$. b) Vybereme další číslo a pak ještě na kterou ze čtyř pozic přijde, $97 \cdot 4 = 388$. c) Vybereme číslo mezi 1 a 98, s ním automaticky přijde dvojice za ním, pak dobereme čtvrté číslo a dáme jej za či před, tedy sčítáme možnosti. Pokud by ale šlo o čtyři čísla za sebou, tak jsme to započítali dvakrát, nutno odečíst, $98 \cdot 97 + 98 \cdot 97 - 97 = 18915$. d) Jako v c), ale nutno pro čtvrté číslo vybrat pozici, $98 \cdot 97 \cdot 4 - 97 = 37927$. e) Je pět možností, kam do vybrané sedmice umístit tu trojici, pak dobereme zbývající čísla, $5 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 = 415780800$. f) Vybereme místa pro ty tři a dobereme zbývající, $\binom{7}{3} \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 = 2910465600$.

11a.44: Tucet je 12, tudíž hlavní je, že je od každého alespoň tolik kusů. Odhadneme, že na pořadí výběru nezáleží. Rovnou vezmeme tři od každé barvy, to je celkem devět jablek, zbývá vybrat tři, na pořadí nezáleží a díky velkému počtu můžeme s opakováním, tedy $\binom{3+3-1}{3} = 10$ způsobů.
Co bychom dělali, kdyby na pořadí záleželo? Asi nejsnažší by byl rozbor situací. Rozkládáme 12 na tři čísla, každé alespoň 3.
Možnost 3-3-6: nejprve zvolíme, které jablko bude šestkrát, pak permutujeme, celkem $3 \cdot \frac{12!}{3!3!6!}$ možností.
Možnost 3-4-5: nejprve zvolíme, které jablko bude pětkrát, pak jablko pro čtyři kusy a nakonec permutujeme, celkem $3 \cdot 2 \cdot \frac{12!}{3!4!5!}$ možností.
Možnost 4-4-4: tady jen permutujeme, celkem $\frac{12!}{4!4!4!}$ možností.
Dohromady $\frac{12!}{4!5!6!}[3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 + 5 \cdot 5 \cdot 6] = 256410$.

11a.45: Osm dvojic 01, mezi ně je třeba dát zbývající dvě nuly, míst je 9. Buď se dávají po jednom nebo obě najednou na jedno místo, $\binom{9}{2} + 9 = 45$.
Dvě jedničky nejdou, na to je jich málo.

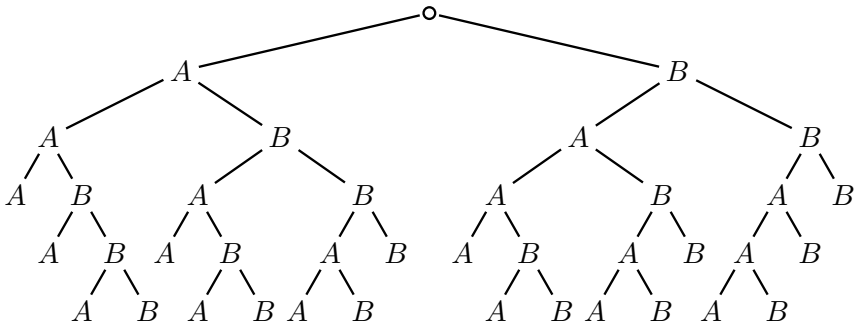
11a.46: $(n-1)!$, viz příklad 11a.n h).

11a.47: a) Výběr zda začneme muži či ženami, pak obsazení jasné, jen permutujeme muže a nezávisle ženy, $2(n!)^2$. b) Nejprve permutujeme páry jako celky, pak určíme pořadí pro každý pár zvlášť, $n!2^n$. c) Výsledky se vydělí počtem míst $2n$.

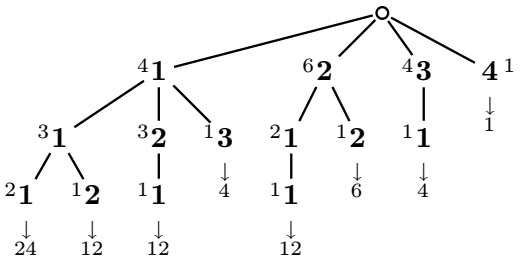
11a.48: První znak 0: celkem 8 možností (za 0 nic, jedna jednička, dvě atd.). První znak 1: celkem 4 možnosti (za 1 jedna jednička, tři, pět, sedm). Tedy $8 + 4 = 12$ možností.

11a.49: a) Protože se nevracíme, je naše svoboda silně omezena, musíme se posunout n-krát nahoru a m-krát doprava, možnost volby je jen v tom, v jakém pořadí ty kroky provedeme. Jinými slovy, jde o počet permutací těchto kroků, ještě jinak řešeno, vybíráme, kam v celkem $m + n$ krocích umístíme ty doprava, což je $\binom{m+n}{n}$ možností.
b) Zde je zase dán přesný počet kroků na stranu, na kolmou stranu a nahoru, jde jen o jejich uspořádání. Odpověď zní $\binom{m+n+k}{m,n,k} = \frac{(m+n+k)!}{m!n!k!}$.

11a.50: První tři cifry libovolné, tedy 10^3 možností. Poslední dvě cifry se volí najednou, je to jedna fáze. Kolik je možností pro poslední dvojici? Rozbor podle čtvrté číslice: $0 \mapsto 00, 07$, $1 \mapsto 16$, $2 \mapsto 25$, $3 \mapsto 34$, $4 \mapsto 43$, $5 \mapsto 52, 59$, $6 \mapsto 61, 68$, $7 \mapsto 70, 77$, $8 \mapsto 86$, $9 \mapsto 95$, celkem 14 možností. Je 14000 kódů.
11a.51: Jde o čísla jednociferná, dvouciferná a tříciferná bez omezení a také jedno čtyřciferné 1000, které změní počty pro jedničku a nulu.
c)–e) Uvažujme číslici různou od 0 a 1, čísla si představujeme jako xyz. Na místě x se číslice může vyskytovat stokrát, signalizuje příslušnou stovku. Na pozici y se číslice může vyskytovat desetkrát v každé stovce, stovek je 10, celkem sto výskytů. Na pozici z se číslice vyskytuje jednou v každé desítce, těch je 100. Celkem 300 výskytů.
b) Jednička má jeden výskyt navíc v tisícovce, je jich 301.
a) V tisícovce jsou tři nuly, dále se díváme jen na čísla do 999. Pak nula nemůže být na pozici x. Na pozici y je nula desetkrát v každé stovce kromě první (dvouciferná čísla), z těch 10 stovek je to tedy jen devět, celkem 90 výskytů. Na pozici z je nula jedenkrát v každé desítce s výjimkou první desítky (jednociferná čísla), celkem je těchto desítek $100 - 1 = 99$. Celkem 192 nul.
11a.52: Dáme každé otázce 5 bodů, zbývá tedy rozdělit 25 mezi pět otázek, jiný pohled: Každému z 25 bodů přidělit otázku, tedy $\binom{5+25-1}{25} = \binom{29}{25} = 23751$. Jiný pohled: Kolik celočíselných řešení splňujících $a_k \geq 5$ má rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$?
11a.53: Máme 17 jedniček. Nejprve dáme jednu do x_1, čtyři do x_3 a dvě do x_4. Zbývajících 10 si vybírá, do které x_i půjde, na pořadí nezáleží a je možné se opakovat. Počet řešení je proto $\binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10} = 286$.
11a.54: Nezbývá než jít na to výčtem. Je jich 16: $\{3\}$, $\{3,7\}$, $\{3,9\}$, $\{3,11\}$, $\{3,24\}$, $\{3,7,9\}$, $\{3,7,11\}$, $\{3,9,11\}$, $\{7\}$, $\{7,9\}$, $\{7,11\}$, $\{7,9,11\}$, $\{9\}$, $\{9,11\}$, $\{11\}$, $\{24\}$.
11a.55:



11a.56: Vzhledem k možnosti remíz se na to musí rozborem, třeba stromem, kde je vyznačeno, kolik lidí dostane kterou medaili, dole pak je počet možností. Celkem jich je 75.



11a.57: Chlapci vybírají, do kterého místa mezi dívky si který sedne, míst je $8 + 1$ (mohou být i na kraji), $\binom{9}{6} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$.
11a.58: Viz příklad 11a.p b). Každý cinkne $(n-1)$-krát, ale každé cinknutí započítáno dvakrát, $\frac{1}{2}n(n-1)$.
Nebo: První $(n-1)$-krát, druhý $(n-2)$-krát atd. $(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$.
11a.59: Každý vrchol má $n-3$ dalších k propojení, každá úhlopříčka pak je započtena dvakrát, $n(n-3)/2$.
11a.60: Platí to i naopak, když každému x přidělíme kategorii 0, 1 či 2, dostaneme množiny A (prvky kategorie 0) a B (prvky kategorií $0, 1$). Tedy počet dvojic je roven počtu rozhození kategorií $0, 1, 2$ mezi prvky M, to je 3^n možností.
11a.61: (i) $\frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1}$; (ii) $\frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!}$; (iii) $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

11b. Pokročilejší principy

V této kapitole probereme Princip inkluze a exkluze, poté shrneme některé poznatky této a předchozí kapitoly z pohledu rozdělování objektů do krabiček. Dále si představíme Dirichletův šuplíkový princip a nakonec se vrátíme k rekurentním rovnicím jako nástroji pro řešení některých kombinatorických úloh.

Nejprve se vrátíme k jednomu problému, který nám z první kapitoly zůstal nevyřešen.

! **Příklad 11b.a** (pokračování 11a.m)**:** Ve třídě je 150 kluků a 40 holek. Chtějí poslat čtyřčlennou delegaci k přednášejícímu. Kolika způsoby ji mohou vybrat, když chtějí, aby šel Adam nebo Bára?

Přímý útok: Dáme do delegace Adama a navolíme ostatní: $\binom{189}{3}$ možností. Nebo dáme do delegace Báru a navolíme zbytek. Celkový počet možností ale není $\binom{189}{3}+\binom{189}{3}$, protože některé volby jsou započítány dvakrát, jmenovitě ty s Adamem i Bárou.

V takovéto situaci bychom normálně utekli k jevu opačnému. Pokud nechceme mít vybrány Adama ani Báru, máme $\binom{188}{4}=50404915$ možností. Celkem je jich $\binom{190}{4}$ (viz příklad 11a.m), takže těch možností výběrů, kde je Adam nebo Bára, je $\binom{190}{4}-\binom{188}{4}=2197250$.

Nastává čas zkusit dotáhnout do konce přímý útok. Sečtením výběrů s Adamem a výběrů s Bárou jsme přepočítali, takže se nabízí nápad, že bychom jednou odečetli to, co jsme započítali dvakrát. Jde o výběry s Adamem i Bárou, u nich pak dobíráme další dva členy do delegace. Počet možností je tedy $\binom{188}{2}$. Celkový počet možností výběrů s Adamem nebo Bárou by tedy měl být

$$\binom{189}{3}+\binom{189}{3}-\binom{188}{2}=219750.$$

Dostali jsme stejný výsledek jako při postupu přes doplněk, úvaha tedy byla správná.

△

Princip použitý při přímém řešení lze vyjádřit i jinak. Nechť je A množina všech výběrů, ve kterých je Adam, a B množina všech výběrů, ve kterých je Bára. Nás zajímá $|A\cup B|$ a selským rozumem jsme místo toho počítali $|A|+|B|-|A\cap B|$. Není to náhoda, totéž jsme už viděli jako Fakt 2c.9. Byla tam i verze pro tři množiny a teď vidíme, že jde o něco, co se při kombinatorických úvahách může silně hodit. Zobecníme si to pro libovolný (konečný) počet množin.

! **Věta 11b.1.** (Princip inkluze a exkluze, principle of inclusion and exclusion)
Jsou-li A_i pro $i=1,2,\dots,n$ konečné množiny, pak

$$\begin{aligned}\Big|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big| &= \sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|+\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\dots+(-1)^{n-1}\Big|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\Big|\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k}|.\end{aligned}$$

V důkazu použijeme ten první zápis, sice je o dost delší, ale zase je tam lépe vidět, co se děje.

Důkaz (z povinnosti)**:** Povedeme jej indukcí na n.

(0) $n=1$: To je triviální, $|A_1|=|A_1|$.

(1) Nechť $n\in\mathbb{N}$. Předpokládejme, že princip inkluze a exkluze platí pro libovolných n množin, a uvažujme nějaké množiny $A_1,A_2,\dots,A_n,A_{n+1}$.

Označme $B=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$, pak $\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i=B\cup A_{n+1}$, proto $\Big|\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\Big|=|B|+|A_{n+1}|-|B\cap A_{n+1}|$ podle Faktu 2c.9. Teď použijeme indukční předpoklad na B, což je sjednocení n množin, a také deMorganův zákon (Věta 2a.8) na množinu $B\cap A_{n+1}=\big(\bigcup A_k\big)\cap A_{n+1}$:

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\Big|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i<j\le n}|A_i\cap A_j|+\sum_{i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\dots+(-1)^n\Big|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\Big|+|A_{n+1}|-\Big|\bigcup_{k=1}^{n}(A_i\cap A_{n+1})\Big|.$$

Přesuneme $|A_{n+1}|$ do první sumy a na to poslední sjednocení n množin zase použijeme indukční předpoklad.

$$\begin{aligned}\Big|\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\Big| &= \sum_{i=1}^{n+1}|A_i|-\sum_{i<j\le n}|A_i\cap A_j|+\sum_{i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\dots+(-1)^n\Big|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\Big|\\ &\quad-\sum_{i=1}^{n}|A_i\cap A_{n+1}|+\sum_{i<j\le n}|A_i\cap A_j\cap A_{n+1}|-\sum_{i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_{n+1}|+\dots-(-1)^n\Big|A_{n+1}\cap\bigcap_{i=1}^{n}A_i\Big|.\end{aligned}$$

Teď spojíme sumy přes průniky dvou množin (mají stejné znaménko), sumy přes průniky tří množin atd. a dostaneme

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\Big|=\sum_{i=1}^{n+1}|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|+\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\dots+(-1)^{n+1}\Big|\bigcap_{i=1}^{n+1}A_i\Big|.$$

□

! Příklad 11b.b: Heslo (password) se skládá ze tří znaků, které mohou být písmena (lower-case) či číslice.

a) Kolik je možné vytvořit hesel, ve kterých se vyskytuje alespoň jedna číslice?

Označíme si množinu takových hesel jako P, potřebujeme najít $|P|$. Jedna možnost je jít na to přes doplněk. Všech tříznakových hesel je $(26+10)^3 = 36^3$. Chceme-li hesla bez číslic, pak je tvoříme jen z písmen, je jich 26^3, proto je hesel dle zadání $36^3 - 26^3 = 29080$.

Alternativa: Rozložíme si $P = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$, kde Q_i jsou hesla s číslicí na i-tém místě. Jelikož tyto množiny nejsou disjunktní (například heslo `1a3` je v Q_1 i v Q_3), tak nelze jejich mohutnosti jen sčítat, ale musíme použít princip inkluze a exkluze:

$$|P| = |Q_1| + |Q_2| + |Q_3| - |Q_1 \cap Q_2| - |Q_1 \cap Q_3| - |Q_2 \cap Q_3| + |Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3|.$$

Jaké jsou příslušné velikosti? Pro libovolné i je $|Q_i| = 10 \cdot 36^2$, volíme jednu číslici a dva znaky. Při $i \neq j$ máme podobně $|Q_i \cap Q_j| = 10^2 \cdot 36$ (volíme dvě číslice a znak) a také $|Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3| = 10^3$ (tři číslice). Proto $|P| = 3 \cdot 10 \cdot 36^2 - 3 \cdot 10^2 \cdot 36 + 10^3 = 29080$.

Dopadlo to stejně, ale dalo to víc práce.

b) Kolik je možno vytvořit hesel o třech znacích, které mají alespoň dvě číslice?

Tady už přechod k doplňku nepomůže. Označme jako Q_{ij} hesla, která mají na místech i, j číslice. takové množiny jsou tři, Q_{12}, Q_{13}, Q_{23}, a platí $|Q_{ij}| = 10^2 \cdot 36 = 3600$. Zase nejsou disjunktní, použijeme princip inkluze a exkluze:

$$|Q_{12} \cup Q_{13} \cup Q_{23}| = |Q_{12}| + |Q_{13}| + |Q_{23}| - |Q_{12} \cap Q_{13}| - |Q_{12} \cap Q_{23}| - |Q_{13} \cap Q_{23}| + |Q_{12} \cap Q_{13} \cap Q_{23}|.$$

Všechny průniky jsou zde stejné, jde o hesla, která mají samé číslice, tedy velikosti jsou 10^3. Počet hesel je proto $3 \cdot 3600 - 3 \cdot 10^3 + 10^3 = 8800$.

△

Situace, kdy při určování velikosti nezáleží na konkrétních množinách, ale na skupině, kterou zkoumáme (průniky dvou, průniky tří atd.), se objevuje velice často. Vyplatí se udělat si na to samostatné tvrzení.

! Důsledek 11b.2.
Nechť jsou A_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$ konečné množiny. Předpokládejme, že pro libovolné i je $|A_i| = m_1$, pro libovolné $i < j$ je $|A_i \cap A_j| = m_2$, pro libovolné $i_1 < i_2 < i_3$ je $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| = m_3$ atd. až po $\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| = m_n$. Pak

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = nm_1 - \binom{n}{2} m_2 + \cdots + (-1)^{n-2}\binom{n}{n-1} n_{m-1} + (-1)^{n-1} m_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} m_k.$$

Důkaz (rutinní, poučný)**:** vyjdeme z Věty 11b.1. Víme, jak velké jsou množiny v jednotlivých součtech, stačí si tedy rozmyslet, kolikrát se v každé sumě sčítá. V sumě $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n}$ se vybírá k indexů $i_1, \ldots, i_k$ z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, přičemž se výběr nesmí opakovat a na pořadí nezáleží, protože se pak stejně srovnají podle velikosti. Počet možností je tedy dán kombinačním číslem $\binom{n}{k}$ a žádaný vzorec okamžitě plyne z principu inkluze a exkluze.

□

Ukážeme si teď jednu zajímavou aplikaci tohoto vzorce.

! Fakt 11b.3.
Uvažujme množinu A o m prvcích a množinu B o n prvcích. Tvrdíme, že jestliže je $m \geq n$, pak existuje $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$ zobrazení z A **na** B.

Důkaz (poučný)**:** Celkem je zobrazení n^m (příklad 11a.j), počet zobrazení „na“ zjistíme doplňkem přes počet zobrazení, u kterých tato vlastnost selhala.

Aby zobrazení nebylo na, musí nějaký prvek v cílové množině vynechat, nechť M_i je množina všech zobrazení, které vynechaly i-tý prvek. Taková zobrazení jsou vlastně zobrazeními z množiny o velikosti m do množiny o velikosti $n-1$, proto je jich $|M_i| = (n-1)^k$.

Tyto množiny evidentně nejsou disjunktní (zobrazení, které vynechá více prvků z B, je i ve více M_i), proto musíme aplikovat princip inkluze a exkluze. Typický člen v onom vzorci je $\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_k}|$. Protože jsou $i_1, i_2, \ldots, i_k$ navzájem různá pořadová čísla prvků z cílové množiny, pak $M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_k}$

jsou zobrazení, která určitě vynechala prvky i_1 až i_k, jdou tedy do cílové množiny o velikosti $n-k$ a takových je $(n-k)^m$. Je dobré si rozmyslet, že to platí i pro trochu extrémní případ: Průnik všech množin M_i je možina zobrazení, které vynechají všechny prvky z cílové množiny, taková zobrazení nejsou čili velikost je 0. To souhlasí, vzorec pak dává $0^m = 0$. Takže jsme získali všechny údaje nutné pro vzorec z Důsledku 11b.2. Počet zobrazení, která vynechaly nějaký prvek z cílové množiny, je

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)^m.$$

Proto je počet surjektivních zobrazení („na“) roven

$$n^m - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)^m = 1\cdot(n-0)^m + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)^m$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)^m = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)^m.$$

Vynechali jsme v sumě poslední index $k=n$, protože příslušný sčítanec je stejně nulový.

□

Ne vždy jsou ovšem průniky stejného typu stejně velké.

Příklad 11b.c: Kolik je prvočísel v množině $M = \{1, 2, \ldots, 100\}$?

Řešení: Zkusíme to přes doplněk. Která čísla určitě nejsou prvočísla? Protože $\sqrt{100} = 10$, stačí se zeptat, kolik je v M čísel dělitelných prvočísly menšími než 11, což znamená 2, 3, 5 a 7.

Označme jako M_n množinu čísel mezi 1 a 100 dělitelných n. Podle příkladu 6a.b je $|M_n| = \lfloor \frac{100}{n} \rfloor$. Tyto množiny ovšem nejsou disjunktní a je třeba použít princip inkluze a exkluze. Protože pracujeme s různými prvočísly, pak $M_m \cap M_n$ jsou čísla dělitelná číslem mn a tedy $|M_m \cap M_n| = \lfloor \frac{100}{mn} \rfloor$; podobně zpracujeme průniky tří a čtyř množin.

Princip inkluze a exkluze pak dává počet čísel dělitelných 2, 3, 5 či 7 jako

$$\lfloor \tfrac{100}{2} \rfloor + \lfloor \tfrac{100}{3} \rfloor + \lfloor \tfrac{100}{5} \rfloor + \lfloor \tfrac{100}{7} \rfloor - \lfloor \tfrac{100}{2\cdot3} \rfloor - \lfloor \tfrac{100}{2\cdot5} \rfloor - \lfloor \tfrac{100}{2\cdot7} \rfloor - \lfloor \tfrac{100}{3\cdot5} \rfloor - \lfloor \tfrac{100}{3\cdot7} \rfloor - \lfloor \tfrac{100}{5\cdot7} \rfloor$$
$$+ \lfloor \tfrac{100}{2\cdot3\cdot5} \rfloor + \lfloor \tfrac{100}{2\cdot3\cdot7} \rfloor + \lfloor \tfrac{100}{2\cdot5\cdot7} \rfloor + \lfloor \tfrac{100}{3\cdot5\cdot7} \rfloor - \lfloor \tfrac{100}{2\cdot3\cdot5\cdot7} \rfloor$$
$$= 50 + 33 + 20 + 14 - 16 - 10 - 7 - 6 - 4 - 2 + 3 + 2 + 1 + 0 - 0 = 78.$$

Toto ovšem nejsou všechno čísla složená, čísla 2, 3, 5 a 7 samotná jsou totiž také svými násobky, aniž by byla složená. Počet čísel složených v množině M je tedy $78 - 4 = 74$. Ta zbývající (je jich 26) jsou buď prvočísla, nebo 1, které prvočíslo není, takže prvočísel je 25.

△

Příklad 11b.d: Kolik řešení $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0$ rovnice $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ splňuje $x_1 \le 3$, $x_2 \le 4$ a $x_3 \le 6$?

Umíme dobře hledat počty řešení s nerovnicí u podmínky v opačném směru, takže to zkusíme doplňkem. Množina M všech řešení z $\mathbb{N}_0$ (bez omezení) má mohutnost $|M| = \binom{3+11-1}{11} = \binom{13}{11} = 78$, viz příklad 11a.k.

Nechť M_1 je možina řešení splňujících $x_1 \ge 4$ (ta tedy nechceme), máme $|M_1| = \binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = 36$ (viz část b) příkladu 11a.k). Podobně pro možinu M_2 řešení splňujících $x_2 \ge 5$ máme $|M_2| = \binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6} = 28$ a pro množinu M_3 řešení splňujících $x_3 \ge 7$ máme $|M_3| = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$.

Počet řešení, která nás zajímají, je $|M - (M_1 \cup M_2 \cup M_3)| = |M| - |M_1 \cup M_2 \cup M_3|$. Protože množiny M_i nejsou disjunktní, budeme muset použít princip inkluze a exkluze. Nejprve počítáme: Množina $M_1 \cap M_2$ jsou řešení splňující $x_1 \ge 4$ a $x_2 \ge 5$, proto $|M_1 \cup M_2| = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$, podobně $|M_1 \cup M_3| = \binom{3+0-1}{0} = \binom{2}{0} = 1$, $|M_2 \cup M_3| = 0$ (evidentní, z čísel 5 a 7 či větších není možné získat 11) a také $|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = 0$.

Proto počítáme:

$$|M - (M_1 \cup M_2 \cup M_3)| = |M| - |M_1 \cup M_2 \cup M_3|$$
$$= |M| - |M_1| - |M_2| - |M_3| + |M_1 \cup M_2| + |M_1 \cup M_3| + |M_2 \cup M_3| - |M_1 \cup M_2 \cup M_3|$$
$$= 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 + 0 - 0 = 6.$$

Je tedy šest takových řešení.

Tak málo řešení by mělo jít zjistit rozborem situací, jde o možnosti 1-4-6, 2-3-6, 2-4-5, 3-2-6, 3-3-5, 3-4-4.

U úloh s více proměnnými by asi už stálo za to použít počítač, protože pak ani princip inkluze a exkluze nebude příliš příjemný. Pak je ale třeba vyvinout algoritmus, který opravdu najde všechny možnosti, viz 11d.7.

△

Příklad 11b.e (pokračování 11a.v)**:** Uvažujme rovnici $m+p+c=9$, kde požadujme $m,p,c\in\mathbb{N}_0$, $m\le 5$, $p\le 3$ a $c\le 5$. Označme množinu M všech řešení z $\mathbb{N}_0$ bez omezení, těch je $|M|=\binom{3+9-1}{9}=\binom{11}{9}=55$.

Nechť M_m je možina řešení splňující $m\ge 6$ (ta tedy nechceme), máme $|M_m|=\binom{3+3-1}{3}=\binom{5}{3}=10$, podobně pro možinu M_p řešení splňující $p\ge 4$ máme $|M_p|=\binom{3+5-1}{5}=\binom{7}{5}=21$ a pro množinu M_c řešení splňující $c\ge 6$ máme $|M_c|=\binom{5}{3}=10$. Ještě potřebujeme průniky, ale tam je to snadné, každý z nich je prázdný (není například možné pomocí šesti malinových, čtyř pomerančových a případně dalších citrónových bonbónů dostat celkem devět bonbónů). Proto je počet řešení roven

$$\begin{aligned}|M-(M_1\cup M_2\cup M_3)| &= |M|-|M_1|-|M_2|-|M_3|+|M_1\cup M_2|+|M_1\cup M_3|+|M_2\cup M_3|-|M_1\cup M_2\cup M_3|\\ &= 55-10-21-10+0+0+0-0=14.\end{aligned}$$

Souhlasí to s počtem získaným v příkladě 11a.v rozborem situací.
△

Příklad 11b.f: Mějme n objektů. Zajímá nás, kolik je permutací, které nezanechaly ani jeden objekt na svém místě (říká se jim derrangements), označme tento počet D_n.

Přímý útok je neperspektivní, protože je těžké zachytit nějak kombinatoricky fakt, že čísla někde nejsou. Mnohem lépe se pracuje s tím, že někde jsou, jinými slovy musí se na to přes doplněk. Nechť M_i jsou permuatce, které nechaly i-tý objekt na svém místě, pak jde vlastně jen o permutace ostatních objektů a $|M_i|=(n-1)!$. Tyto množiny ale nejsou disjunktní, je tedy nutno použít princip inkluze a exkluze.

Nechť $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$. Pak je $M_{i_1}\cap M_{i_2}\cap\ldots\cap M_{i_k}$ množina všech permutací, které zachovají na místě těchto k různých objektů, čili permutujeme ty zbývající, celkem je $(n-k)!$ takových permutací. Permutací, které něco nechají na místě, je tedy

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)!=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{n!}{k!}.$$

Proto je počet těch ostatních roven

$$D_n=n!-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{n!}{k!}=\frac{n!}{0!}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\frac{n!}{k!}=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Alternativní způsob nalezení tohoto vzorce používá rekurzi, viz cvičení 11b.44.

Poznámka: Jde o jeden z klasických pravděpodobnostních problémů, obvykle se presentuje jako otázka, s jakou pravděpodobností odejde každý z n gentlemanů domů v cizím klobouku, když je šatnářka v klubu vydává náhodně. Odpověď zní $\frac{D_n}{n!}=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$, což je pro větší n asi $\frac{1}{e}\sim 0.368$. Když řekneme, že všichni gentlemani půjdou domů v cizím v průměru v jednom případě ze tří, tak to vystihuje situaci dosti přesně už od $n=3$ a ukazuje to, že by se možná vyplatila jiná šatnářka.
△

Princip inkluze a exkluze se dá s úspěchem použít ke zjišťování velikosti určitých skupin, při tom často pomůžou i Vennovy diagramy.

Příklad 11b.g: Ve třídě je 250 lidí. Když jsem se zeptal, kdo někdy pracuje na Windows, zvedlo se 235 rukou. Když jsem se zeptal, kdo někdy pracuje na Linuxu, zvedlo se 150 rukou. Za předpokladu, že každý zvedl ruku alespoň jednou a nikdo nezvedl najednou dvě (a více) rukou, kolik lidí pracuje na obou systémech?

Označme jako A množinu lidí pracujících na W a jako B množinu lidí pracujících na L. Dáno: $|A|=235$, $|B|=150$, $|A\cup B|=250$. Z rovnosti $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ dostaneme $|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|=135$.
△

! **Příklad 11b.h:** Máme 300 lidí. Z nich 240 umí C (myslí se tím také C, mohou umět i něco navíc), 130 umí Pascal, 27 umí Fortran, 117 umí C a Pascal (a možná i Fortran, ale nemusí), 17 umí Pascal a Fortran (a možná i C, ale nemusí), 105 umí C a Pascal ale ne Fortran, 5 umí C a Fortran ale ne Pascal. Kolik z lidí nezná ani jeden z těchto tří jazyků?

Zaveďme množiny C,P,F lidí ovládajících příslušný jazyk, daná data jsou $|C|=240$, $|P|=130$, $|F|=27$, $|C\cap P|=117$, $|P\cap F|=17$, $|C\cap P-F|=105$ a $|C\cap F-P|=5$. Abychom zodpověděli danou otázku, musíme nejprve najít $|C\cup P\cup F|$, evidentně pomocí principu inkluze a exkluze. Na to ale nemáme vhodné údaje, musíme si je tedy vyrobit. Zde se právě bude hodit Vennův diagram, do kterého si zapíšeme, co víme. Je však třeba nějak vyřešit problém, že přímo zakreslit umíme jen ty údaje, které se týkají základních (dále nedělených) oblastí

v diagramu. Pak jsou dva možné přístupy. Jeden je mechaničtější, zavedeme si proměnné pro všechny základní oblasti, které v diagramu vidíme a nejsou známy ze zadání.

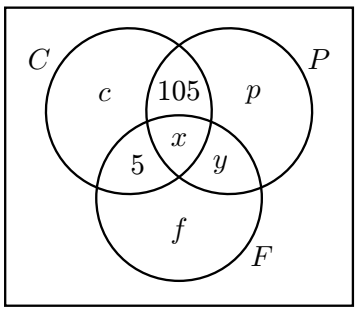
Pomocí těchto neznámých pak vyjádříme data ze zadání a dostaneme rovnice. V tomto případě jsou to tyto:

$c + x + 110 = 240$; $p + x + y + 105 = 130$,

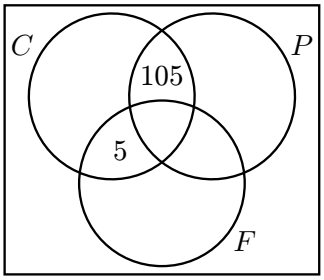
$f + x + y + 5 = 27$, $x + 105 = 117$ a $x + y = 17$.

Protože počet neznámých odpovídá počtu rovnic, je úloha řešitelná.

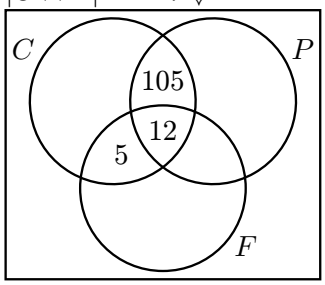
Soustavu teď vyřešíme oblíbenou metodou, například postupná eliminace bude fungovat dobře a dá $x = 12$, $y = 5$, $f = 5$, $p = 8$, $c = 118$. Celkový počet lidí znajících nějaký jazyk se již snadno spočítá z Vennova diagramu: $240 + f + y + p = 240 + 5 + 5 + 8 = 258$. Vzhledem k celkovému počtu lidí to znamená, že 42 z nich neumí C, Pascal ani Fortran.



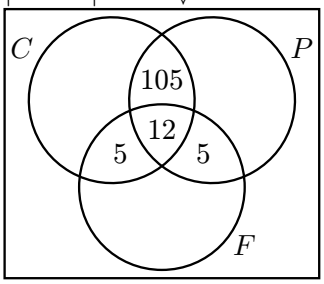
U méně komplikovaných situací se dá často potřebné údaje dopočítat postupným doplňováním jednotlivých oblastí, například takto:



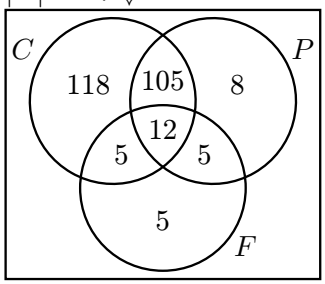
$|C \cap P| = 117 \Downarrow$



$|P \cap F| = 17 \Downarrow$



$|C| = 240$, $|P| = 130$, $|F| = 27 \Downarrow$



△

Teď si představíme další užitečný princip.

! **11b.4. Dirichletův šuplíkový princip** (Pidgeonhole principle)
Jestliže je alespoň $k + 1$ objektů rozděleno do k krabiček, tak musí být krabička obsahující alespoň dva objekty.

Asi jsme tím čtenáře nepřekvapili. Dá se na to dívat i jinak. Přiřazení objektu do krabičky lze považovat za definici zobrazení z množiny objektů do množiny krabiček. Princip tak lze také vyjádřit následovně:

• Nechť A, B jsou konečné množiny. Jestliže $|A| > |B|$, pak pro každé zobrazení T: $A \mapsto B$ existuje $b \in B$ takové, že $|T^{-1}[\{b\}]| > 1$.

Slovy: Jestliže $|A| > |B|$, pak žádné zobrazení nemůže být prosté. To už tu bylo, viz Fakt 2b.12.

Šuplíkový princip se dá zobecnit.

! **Fakt 11b.5.**
Nechť $c, k \in \mathbb{N}$. Je-li alespoň $ck + 1$ objektů umístěno do k krabiček, pak existuje krabička, která má více než c objektů.

Důkaz (rutinní, poučný)**:** Sporem: Kdyby bylo v každé krabičce nejvýše c objektů, pak je celkem jen $c \cdot k$ objektů, což je méně než $ck + 1$.

□

Opět přepis do jazyka zobrazení:

• Uvažujme konečné množiny A, B. Jestliže existuje $c \in \mathbb{N}$ takové, že $|A| > c|B|$, pak pro libovolné T: $A \mapsto B$ existuje $b \in B$ takové, že $|T^{-1}[\{b\}]| > c$.

A ještě jeden přepis:

Fakt 11b.6.
Je-li N objektů umístěno do k krabiček, pak existuje krabička, která má alespoň $\lceil \frac{N}{k} \rceil$ objektů.

Důkaz: Sporem: Jinak by bylo nejvýše $k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right)$ objektů. Jenže $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1 < \frac{N}{k}$, viz Fakt 2b.14 (ii), takže bychom dostali méně než $k\frac{N}{k} = N$ objektů.

□

Příklad 11b.i: V libovolné skupině 367 lidí musí mít alespoň dva narozeniny ve stejný den (pozor na přestupný rok, jinak by stačilo 366 lidí), v libovolné skupině 733 lidí musí mít alespoň tři narozeniny ve stejný den.

V libovolné skupině 100 lidí je určitě alespoň $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$ narozených ve stejný měsíc.

△

Příklad 11b.j: Kolik musí být studentů ve třídě, aby bylo zaručeno, že alespoň 10 dostane stejnou známku?

Je 6 známek A až F, tedy ve třídě stačí $6 \cdot 9 + 1 = 55$ studentů.

△

Příklad 11b.k: Dokážeme, že vybereme-li náhodně $n+1$ různých čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, pak se mezi nimi najdou dvě tak, že jedno z nich dělí druhé (viz cvičení).

Napišme všechna ta čísla jako $a_i = 2^{k_i} q_i$, kde q_i je liché. Pak platí $1 \leq q_i \leq 2n$, ale takových lichých čísel je n, zatímco čísel q_i je $n+1$. Proto musí existovat $i \neq j$ takové, že $q_i = q_j = q$. Potom $a_i = 2^{k_i} q$ a $a_j = 2^{k_j} q$, tudíž to s menší mocninou u 2 dělí to druhé.

△

Příklad 11b.l: Dokážeme, že ve skupině o 6 lidech musí být tři lidé, kteří se buď navzájem všichni znají, nebo se žádní dva z nich neznají. Ukážeme také, že ve skupině 5 lidí už tomu tak být nemusí.

Mějme šest lidí. Vezměme si jednoho z nich, nazvěme ho a. Pak je tam 5 dalších lidí, a pokud si uděláme přihrádku nadepsanou „a se zná“ a přihrádku nadepsanou „a se nezná“, pak podle šuplíkového principu musí platit, že buď a alespoň tři z lidí zná, nebo alespoň tři z lidí nezná.

V prvním případě vezmeme nějaké tři lidi b, c a d, se kterými se a zná. Pak se buď někteří dva z těch tří také znají a tedy spolu s a tvoří trojici lidí navzájem se znajících. Nebo se mezi nimi nikdo nezná a pak b, c, d tvoří navzájem se neznající trojici.

V druhém případě máme tři lidi b, c a d, se kterými se a nezná, načež zopakujeme zrcadlově předchozí argument. Pro šest lidí je tedy tvrzení dokázáno.

Kdyby bylo pět lidí, tak se mohou navzájem znát a–b, a–c, b–d, c–e a d–e a máme problém. Všimněte si, že každý z pětice se zná s dalšími dvěma lidmi, čili stačí vždy ověřit, že se dotyční dva spolu neznají, a je vyloučen vznik trojice znajících se lidí (například a se zná jen s b a s c, ale ti dva se navzájem neznají). Podobně každý člověk nezná dva lidi a ověří se, že v tomto případě se ti dva naopak znají a nevznikají neznající se trojice.

Jde o jednoduchý případ obecnějšího kombinatorického problému. Zvolme čísla $m, n \in \mathbb{N}$ a označme jako $R(m, n)$ nejmenší nutný počet lidí, aby již bylo zaručeno, že existuje skupina m navzájem se znajících lidí nebo n navzájem se neznajících lidí, tomuto se říká Ramseyho čísla. Ukázali jsme, že $R(3, 3) = 6$. O těchto číslech se dá dokázat spousta zajímavého, třeba že $R(m, n) = R(n, m)$, ale asi nejzajímavější je, že se velice obtížně určují.

Jednoduchý případ je, když je jedno z čísel dvojka, pak $R(2, n) = R(n, 2) = n$ pro $n \geq 2$. Když totiž máme n lidí, tak se buď najdou dva, kteří se znají (jedna podmínka z definice $R(2, n)$ splněna), nebo se nikdo s nikým nezná a máme n navzájem se neznajících lidí (druhá podmínka splněna).

Jakmile ale vyžadujeme, aby $n, m \geq 3$, tak to začne být obecně neřešitelné a zatím (2009) je známo pouze devět takových Ramseyho čísel. Pro mnohá další jsou známa omezení, třeba že $43 \leq R(5, 5) \leq 49$. Je to tedy jeden z těch opravdu dobrých kombinatorických problémů. Zajímavé je, že toto téma má širší souvislosti, existuje tzv. Ramseyho teorie, která má aplikace i v překvapivě vzdálených oblastech matematiky, třeba ve funkcionální analýze.

△

Teď se dostáváme k poslední pokročilejší metodě a není to vlastně metoda nová, využijeme znalostí z kapitoly 9.

! **Příklad 11b.m:** Kolik existuje binárních řetězců délky n takových, že neobsahují žádné po sobě jdoucí nuly?

Stačí chtít, aby se v řetězci nevyskytovalo 00. Jak se to zajistí kombinačně? Dost obtížně. Což takhle zkusit opak, kolik je binárních řetězců délky n, které obsahují 00? Vezmeme-li jako množinu R_i řetězce, kde je 00 na pozicích i a $i+1$, pak dozajista $|R_i| = 2^{n-2}$ (volíme z možností 0 a 1 na zbývajících $n-2$ míst) a $S = \bigcup_{i=1}^{n-1} R_i$ jsou všechny řetězce obsahující 00. Množiny R_i ale nejsou disjunktní, takže je třeba použít princip inkluze a exkluze.

Jak velká je množina $|R_i \cap R_j|$? Zde je problém, jsou dvě různé hodnoty, podle toho, jestli $|i-j|=1$ (pak se ty dvojice nul překrývají a jde vlastně o tři nuly za sebou, čili 2^{n-3} řetězců), nebo $|i-j|>1$ a jsou to rozdílné dvojice (2^{n-4} řetězců). Máme tedy první komplikaci a to ještě nejsme u průniků tří množin, navíc bychom to pak měli dělat obecně pro k průniků. Jinými slovy, v tomto řešení budeme pokračovat jen v případě, že opravdu nebude jiného zbytí.

Zkusíme tedy najít lepší variantu. Jak vlastně ty řetězce vypadají? Mají docela zajímavou definici rekurzí:

(0) $\lambda \in M$, $0 \in M$

(1) $s \in M \implies w1 \in M,\ w10 \in M$.

Induktivní podmínka (1) ukazuje, jak se delší řetězce budují z kratších. Jinak řečeno, každý řetězec o délce n bez 00 buď končí na 10, pak vznikl z nějakého řetězce bez 00 délky $n-2$, nebo končí 1 a vznikl z nějakého řetězce bez 00 délky $n-1$, přičemž se tyto možnosti vylučují, jinými slovy vzniká disjunktní rozklad a počty se sčítají. Označíme-li jako a_n počet řetězců délky n bez nul za sebou, pak jsme právě ukázali, že $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Přepíšeme si to na rovnici $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ pro $n \geq 1$, je to lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty a z kapitoly 10b víme, jak je řešit. Z charakteristické rovnice $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ dostaneme charakteristická čísla $\lambda = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, takže obecné řešení naší rovnice je $a_n = u\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n + v\big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n$. Teď ještě najdeme počáteční podmínky, potřebujeme dvě:

Jsou dva binární řetězce délky 1, ve kterých se nevyskytují po sobě jdoucí nuly, jmenovitě řetězce 0 a 1. Takže $a_1 = 2$. Podobně máme tři „správné“ řetězce délky dva, jmenovitě 01, 10, 11, takže $a_2 = 3$.

Z těchto počátečních podmínek dostáváme rovnice $u\frac{1+\sqrt{5}}{2} + v\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 2$ a $u\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^2 + v\big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^2 = 3$. Přepis: $u(1+\sqrt{5}\,) + v(1-\sqrt{5}\,) = 4$, $u(3+\sqrt{5}\,) + v(3-\sqrt{5}\,) = 6$. Odečteme: $u+v=1$, odtud $v = 1-u$, dosadíme do první rovnice a dostaneme $2\sqrt{5}u = 3+\sqrt{5}$, tedy $u = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ a $v = \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}$.

Závěr: Počet binárních řetězců délky n, které neobsahují po sobě jdoucí nuly, je dán vzorcem

$$a_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$

Je to vlastně posunutá Fibonacciho posloupnost, což vyplývá už z toho rekurentního vztahu, a počáteční podmínka ukáže, jak: $a_n = F_{n+2}$. Takže dostáváme čísla $2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

Poznámka: Příklad by šlo stejným způsobem řešit zrcadlově, připojováním 1 či 01 zleva.

△

Tento postup někdy bývá velice efektivní.

Příklad 11b.n: Nechť $n \in \mathbb{N}$. Kolik je n-ciferných čísel, které mají sudý počet nul?

Zkusíme to pomocí rekurektního vztahu, budeme čísla vytvářet připojováním číslic zprava. Označme jako a_n počet „správných“ n-ciferných čísel (se sudým počtem nul). Správné n-ciferné číslo může vzniknout dvěma způsoby, které se vylučují, vzniká tedy disjunktní rozklad. Jedna možnost je, že připojíme nenulovou číslice zprava ke správnému $(n-1)$-cifernému číslu, těchto možností je proto a_{n-1}. Druhá možnost je, že pravá číslice je nula, taková čísla dostaneme připojením nuly zprava k „nesprávnému“ $(n-1)$-cifernému číslu (lichý počet nul), takových je (přes doplněk) $10^{n-1} - a_{n-1}$. Když tyto možnosti sečteme, dostáváme vztah $a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1})$, tedy $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$.

Vznikla lineární rekurentní rovnice $a_{n+1} - 8a_n = 10^n$ s počáteční podmínkou $a_1 = 9$ (všechna jednociferná čísla kromě 0 jsou korektní). Přidružená homogenní rovnice $a_{n+1} - 8a_n = 0$ má charakteristické číslo $\lambda = 8$ a obecné řešení $a_{h,n} = u \cdot 8^n$. Pravá strana 10^n je kvazipolynom s $P(n) = 1$ a $\lambda = 10$, což se neshoduje s charakteristickým číslem levé strany, tedy není třeba korekce a $m = 0$. Proto uhádneme řešení $a_n = A \cdot 10^n$. Dosadíme do dané rovnice:

$$A \cdot 10^{n+1} - 8A \cdot 10^n = 10^n \implies 10A - 8A = 1 \implies A = \tfrac{1}{2}.$$

Dostáváme obecné řešení rovnice dané vzorcem $a_n = \frac{1}{2}10^n + u8^n$.

Počáteční podmínka dává $a_1 = 5 + 8u = 9$, proto $u = -\frac{1}{2}$ a řešení je $a_n = \frac{1}{2}10^n + \frac{1}{2}8^n$, což vypadá lépe ve tvaru $a_n = 5 \cdot 10^{n-1} + 4 \cdot 8^{n-1}$ pro $n \geq 1$.

Poznámka: Na rozdíl od příkladu 11b.m zde nemáme symetrii, nelze připojovat zleva. Důvod je ten, že připojováním nul zleva nevzniká nové číslo, pokud pak zase nedáme nějakou nenulu, což ale provedeným postupem nelze zaručit.

△

11b.7 Krabičky.

Zajímavým pohledem na kombinatoriku je problém rozdělování objektů do krabiček. Zase existují čtyři verze podle toho, zda jsou krabičky rozlišitelné či identické a zda jsou objekty rozlišitelné či ne, přičemž obvykle bývá

úplně jedno, v jakém pořadí předměty do určité konkrétní krabičky přišly. Je užitečné v tom mít trochu pořádek, protože mnoho různých úloh se dá na rozdělování do krabiček převést. Většinou jde jen o jiný pohled na již popsané principy, uděláme si přehled.

a) Jestliže máme k **různých** krabiček a chceme do nich rozdělit n **stejných** objektů, pak je možné to udělat celkem $\binom{n+k-1}{n}$ způsoby.

Proč? Stačí si vyrobit žetonky s čísly $1, \dots, k$, každý objekt si pak jeden vybere (s opakováním) a tím určíme, do které krabičky přijde.

Viz také cvičení 11b.20.

b) Jestliže máme k **různých** krabiček a chceme do nich rozdělit n **různých** objektů, pak je možné to udělat celkem k^n způsoby.

Proč? Každý objekt si vybere svou krabičku, vybírá se s opakováním.

c) Jestliže máme k **různých** krabiček a chceme mezi ně rozdělit n **různých** objektů tak, aby v i-té krabičce bylo n_i objektů, kde $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, pak je možné to udělat $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ různými způsoby.

Proč? Srovnáme objekty do řady, pak si vyrobíme žetonky očíslované $1, \dots, k$ tak, aby bylo n_i žetonů s číslem i. Rozdělení objektů do krabiček odpovídá tomu, že vyrobíme permutaci žetonků podél těch objektů a objekt s žetonkem číslo i jde do krabice i.

Pokud bychom nevyžadovali použití všech předmětů, tedy pokud by platilo $\sum_{i=1}^{k} n_i < n$, tak to snadno vyřešíme zavedením imaginární krabičky navíc, kterou po naplnění zahodíme. Proto je počet možností, jak objekty rozdělit, roven $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!(n-\sum n_i)!}$.

d) Jestliže máme k **různých** krabiček a chceme do nich rozdělit $n \geq k$ **různých** objektů tak, aby žádná krabička nebyla prázdná, pak je možné to udělat celkem $\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$ způsoby.

Proč? Každé takové rozdělení totiž definuje zobrazení, které je na (což je dáno tím, že na každou krabičku dojde), výsledek tedy plyne z Faktu . Je to situace, která se nedá převést na základní principy, vzoreček si člověk musí pamatovat či někde najít (nebo znovu na místě vymyslet).

e) Jestliže máme k **stejných** krabiček a chceme do nich rozdělit $n \geq k$ **různých** objektů tak, aby žádná nezůstala prázdná, pak je to možné udělat celkem $S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$ způsoby. ěíká se tomu Stirlingova čísla druhého řádu.

Přijde se na to tak, že se nejprve krabičky očíslují, použije se vzorec z d) a pak se číslíčka z krabiček smažou, jinými slovy se počet možností vydělí počtem možných pořadí krabiček, což je $k!$.

Vlastně to říká, kolik způsoby lze rozdělit n-prvkovou množinu na k neprázdných podmnožin.

f) Jestliže máme k **stejných** krabiček a chceme do nich rozdělit n **různých** objektů, pak je to možné udělat celkem $\sum_{j=1}^{K} S(n,j) = \sum_{j=1}^{K} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \binom{j}{i} (j-i)^n$ způsoby, kde $K = \min(k,n)$.

Přijde se na to tak, že při rozdělování může zůstat 0, 1, 2 až $k-1$ krabiček prázdných, tedy vlastně rozdělujeme do k, $k-1$ až 1 krabiček tak, aby byly neprázdné, což je v případě $n < k$ omezeno počtem objektů.

Všimněte si, že pro poslední čtyři situace nemáme vzorec v uzavřením tvaru, jde o sumy, což pro větší počet objektů a krabiček znamená někdy dost náročné výpočty. V jednodušších případech (zvlášť pokud člověk nemá po ruce tyto vzorce) bývá jednodušší takové situace řešit třeba stromem nebo výčtem.

Jestliže máme k **stejných** krabiček a chceme do nich rozdělit n **stejných** objektů, pak je to ještě komplikovanější situace než všechny předchozí a nebudeme pro ni hledat nějaký vzorec, řešíme ji vždy individuálně. Jde o jednu z těžších kombinatorických situací, viz také příklad 11b.r a část 11d.8.

Příklad 11b.o: Ve standardním pokeru se čtyřem hráčům rozdá po pěti kartách ze standardního balíčku o 52 kartách.

Jde o různé hráče a různé karty, můžeme si představit zbylý balíček jako pátou krabičku a dostáváme, že počet různých rozdání je $\frac{52!}{5!5!5!5!32!} = 19069457194788$.

△

Příklad 11b.p: Máme rozdat 9 bonbónů stejného druhu čtyřem dětem. Děti jsou asi různé, proto je možné to udělat $\binom{4+9-1}{9} = \binom{12}{9} = 220$ způsoby.

Na jednu ze čtyř základních situací to převedeme tak, že vyrobíme (velký) počet lístečků s čísly 1, 2, 3 a 4 a každý bonbón si jeden lístek vytáhne, tedy vybíráme devětkrát ze čtyř možností, s opakováním a na pořadí záleží, což je ta nejméně intuitivní ze čtyř základních situací a je nejlepší si dotyčný vzorec pamatovat.

Pokud bychom chtěli, ať má každé dítě alespoň jeden bonbón, tak prostě rovnou každému jeden dáme a zbylých 5 rozdělíme běžným způsobem, což je tedy možno $\binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = 56$ způsoby.

Co kdyby byly 3 stejné bonbóny na čtyři děti? Žádný problém, vzorec pořád funguje, je $\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$ způsobů. Jak bychom na to přišli výčtem? Nejlépe se to dělá postupně. Začne se situacemi čistě podle počtů bonbónů, bez ohledu na děti, protože je jich méně a lépe vidíme, zda máme všechny, například si je můžeme srovnat podle velikosti. Pak pro každou takovou možnost přiřadíme konkrétní děti.

Možnost 0-1-1-1: Čtyři možnosti, vybereme, které dítě nedostane bonbón.

Možnost 0-0-1-2: 12 možností, vybereme, které dítě dostane dva bonbóny a které jeden.

Možnost 0-0-0-3: Čtyři možnosti, vybereme, které dítě dostane tři bonbóny.

Celkem je to 20, přesně jako ze vzorce.

△

Příklad 11b.q: Máme 4 různé bonbóny. Kolika způsoby je možno vyrobit tři dárkové balíčky, když jsou krabičky stejné?

Je to problém, který není převoditelný na jednu ze čtyř základních situací, takže to buď řešíme výčtem, nebo někde najdeme příslušné vzorce. To zkusíme nejdřív.

a) Pokud budeme chtít, aby žádná krabička nebyla prázdná, pak je odpověď dána jako

$$S(4,3) = \frac{1}{3!}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{3}{i}(3-i)^4 = \tfrac{1}{6}(3^4 - 3\cdot 2^4 + 3\cdot 1^4) = 6.$$

b) Co kdyby nám prázdné krabičky nevadily? Pak ještě musíme uvažovat rozdělení do dvou a jedné krabičky. Evidentně $S(4,1) = 1$, dále

$$S(4,2) = \frac{1}{2!}\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\binom{2}{i}(2-i)^4 = \tfrac{1}{2}(2^4 - 2\cdot 1^4) = 7.$$

Celkem je to tedy $6 + 7 + 1 = 14$ možností.

Zkusme to bez vzorců. Protože jde o krabičky identické, můžeme je vždy srovnat podle množství bonbónů, řekněme od největšího, takže dostáváme (připomínáme, že na pořadí v krabičce nezáleží)

$\{\{A,B,C,D\},\{\},\{\}$;

$\{\{A,B,C\},\{D\},\{\}\}$; $\{\{A,B,D\},\{C\},\{\}\}$; $\{\{A,C,D\},\{B\},\{\}\}$; $\{\{B,C,D\},\{A\},\{\}\}$;

$\{\{A,B\},\{C,D\},\{\}\}$; $\{\{A,C\},\{B,D\},\{\}\}$; $\{\{A,D\},\{B,C\},\{\}\}$;

$\{\{A,B\},\{C\},\{D\}\}$; $\{\{A,C\},\{B\},\{D\}\}$; $\{\{A,D\},\{B\},\{C\}\}$; $\{\{B,C\},\{A\},\{D\}\}$; $\{\{B,D\},\{A\},\{C\}\}$; $\{\{C,D\},\{A\},\{B\}\}$.

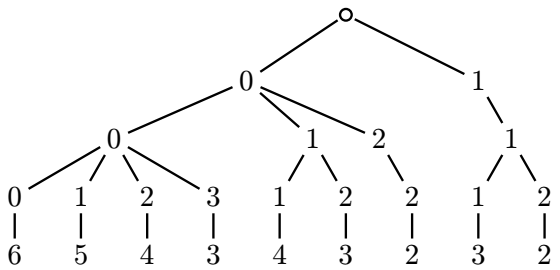
Opravdu celkem 14 možností.

△

Příklad 11b.r: Profesor má v kanclu hromádku 6 kopií domácích úkolů a čtyři studenty. Když studenti odchází, prof je poprosí, aby s sebou ty úkoly vzali a donesli je do třídy k nakopírování ostatním. Z pohledu profesora jsou studenti identičtí :-). Student, který odchází poslední, se většinou cítí blbě, aby něco na stole nechal, takže předpokládejme, že opravdu je těch 6 kopií odneseno. Kolika různými způsoby se to může stát?

Je to přesně ten nejhorší problém, nerozlišitelné krabičky i objekty, jde jen o to, kolik kopií který student vezme, přičemž je můžeme srovnávat podle toho, kolik nesou, třeba od nejméně po nejvíce. Nezbývá, než to zkusit manuálně výčtem možností.

Celkem je tedy 9 možností.



Tento těžký kombinatorický úkol je ekvivalentní ještě jiným, neméně zajímavým úlohám. Nechť je dáno $k, n \in \mathbb{N}$.

- Kolik řešení má rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ takových, aby $0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_k$?
- Kolik řešení má rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ takových, aby $0 < x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_k$ a $m \le k$?

O to více zamrzí, že pro to nemáme rozumný vzorec, ještě že jsou počítače, viz část 11d.8.
△

Cvičení

Cvičení 11b.1 (rutinní)**:** Napište vzorec vyplývající z principu inkluze a exkluze pro sjednocení následujících množin. U všech výrazů ze vzorce určete interpretaci.
a) Nechť A je množina studentů, kteří absolvovali kurs analýzy, a B množina studentů, kteří absolvovali kurs lineární algebry.
b) Nechť A je množina nákladních aut s dvěma koly a B množina nákladních aut s šesti koly.
c) Nechť A je množina knížek psaných česky, B množina knížek psaných anglicky a C množina knížek psaných německy.

Cvičení 11b.2 (rutinní)**:** Máme čtyři množiny obsahující po řadě 50, 60, 70 a 80 prvků. Každá dvojice z nich má 5 společných prvků, každá trojice má jeden společný prvek a všechny čtyři nemají žádný společný prvek. Kolik prvků má sjednocení těchto čtyř množin?

Cvičení 11b.3 (rutinní)**:** Sto vstupenek očíslovaných 1 až 100 jde do tomboly, losují se čtyři výhry. Kolika způsoby to může dopadout, jestliže
a) lístek 13 má vyhrát první cenu?
b) lístek 13 má vyhrát cenu?
c) lístek 13 nemá vyhrát cenu?
d) lístky 13 a 23 mají vyhrát cenu?
e) vyhrát první cenu má buď lístek 13 nebo lístek 23?
f) lístek 13 nebo lístek 23 mají vyhrát cenu?
g) lístky 13, 23, 31, 33 mají vyhrát cenu?
h) první cenu má vyhrát jeden z lístků 13, 23, 31, 33?
i) lístky 13 a 23 mají vyhrát, ale lístky 7 a 2 vyhrát nemají?

Cvičení 11b.4 (rutinní)**:** Kolik osmibitových řetězců neobsahuje šest nul po sobě?

Cvičení 11b.5 (rutinní)**:** Kolik permutací standardních 10 číslic začíná 987 nebo končí 123 nebo má 45 na páté a šesté pozici?

Cvičení 11b.6 (rutinní)**:** Kolik permutací řetězce $ABCDEFGH$ obsahuje slova BA nebo FEC?

Cvičení 11b.7 (rutinní)**:** Nechť $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ a B je množina o k prvcích, kde $k, n \geq 2$. Nechť $a \neq b$ jsou jisté prvky z B.
a) Kolik je zobrazení T: $A \mapsto B$, pro které platí $T(1) = a$ a $T(2) = b$?
b) Kolik je zobrazení T: $A \mapsto B$, pro které platí $T(1) = a$ nebo $T(2) = b$?

Cvičení 11b.8 (rutinní)**:** Uvažujme čtyřpísmenná slova (z 26 malých písmen abecedy).
a) Kolik jich obsahuje znak x?
b) Kolik jich obsahuje přesně tři x?
c) Kolik jich obsahuje alespoň tři x?

Cvičení 11b.9 (poučné)**:** Kolik je přirozených čísel menších než 1000, které
a) jsou dělitelné 7?
b) jsou dělitelné 7 a 11?
c) jsou dělitelné 7 ale ne 11?
d) jsou dělitelné 7 nebo 11?
e) nejsou dělitelné ani 7 ani 11?
f) neobsahují stejné číslice?
g) neobsahují stejné číslice a jsou sudé?

Cvičení 11b.10 (poučné)**:** Uvažujme přirozená čísla mezi mezi 23 a 131313 včetně.
a) Kolik jich je dělitelných 5?
b) Kolik jich je dělitelných 7?
c) Kolik jich je dělitelných 5 nebo 7?
d) Kolik jich není dělitelných 7?
e) Kolik jich má stejné číslice?
f) Kolik jich je lichých?
g) Kolik jich je dělitelných 4 nebo 6?

Cvičení 11b.11: Heslo (password) se skládá ze čtyř znaků, které mohou být písmena (lower-case) či číslice, přičemž se v heslu musí vyskytovat alespoň dvě číslice. Kolik je možné vytvořit takových paswordů?

Cvičení 11b.12: Svědek dopravní nehody si pamatuje, že auto, které z nehody ujelo, mělo SPZ ze tří písmen a čtyř číslic, začínala AS (Pražák!) a určitě v ní byla jednička a dvojka. Kolik je takových SPZ možných?

Cvičení 11b.13 (poučné)**:** Uvažujme řešení $x_i \in \mathbb{N}_0$ rovnice $x_1 + x_2 + x_3 = 13$.
a) Kolik z nich splňuje podmínku $x_1 \leq 6$, $x_2 \leq 6$, $x_3 \leq 6$?
b) Kolik z nich splňuje podmínku $x_1 < 6$, $x_2 < 6$, $x_3 < 6$?

Cvičení 11b.14 (poučné)**:** Kolik řešení $x_i \in \mathbb{N}_0$ rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23$ splňuje podmínky $1 < x_1 \leq 13$, $7 \leq x_2$, $0 \leq x_3$, $6 \leq x_4 < 9$?

Cvičení 11b.15 (poučné)**:** Kolik řešení $x_i \in \mathbb{N}_0$ rovnice $x_1 + x_2 + x_3 = 23$ splňuje podmínky
a) $1 < x_1 \leq 9$, $6 \leq x_2 \leq 10$, $0 \leq x_3 < 7$?
b) $1 \leq x_1 < 6$, $6 \leq x_2 \leq 10$, $0 \leq x_3 \leq 6$?
c) $3 \leq x_1 < 7$, $6 < x_2 \leq 10$, $2 < x_3 \leq 9$?

Cvičení 11b.16 (poučné)**:** Kolik celých čísel menších než 1000 má ciferný součet 13?

Cvičení 11b.17: Kolika způsoby se dá rozdělit šest různých hraček mezi tři (různé) děti tak, aby každé mělo alespoň jednu?

Cvičení 11b.18 (dobré)**:** Kolika způsoby je možno rozdělit sedm úkolů mezi čtyři zaměstnance tak, aby každý měl alespoň jeden úkol a nejtěžší úkol byl přidělen nejlepšímu zaměstnanci?

Cvičení 11b.19 (rutinní, poučné)**:** Kolika způsoby je možno roztřídit šest věcí do pěti krabic, jestliže
a) věci i krabice jsou různé?
b) věci jsou různé, krabice stejné?
c) věci jsou stejné, krabice různé?
d) věci i krabice jsou stejné?

Cvičení 11b.20 (poučné)**:** Kolika způsoby je možno umístit n identických věcí do m různých krabic za předpokladu, že žádná není prázdná?

Cvičení 11b.21 (rutinní)**:** Kolik je třeba vybrat náhodně karet ze standardního balíčku o 52 kartách, aby bylo zaručeno, že
a) se najdou alespoň tři stejné barvy?
b) se najdou alespoň tři srdce?

Cvičení 11b.22 (rutinní)**:** V šuplíku je 10 černých a 10 šedých ponožek. Ráno ještě v polospánku taháme naslepo ponožky.
a) Kolik jich musíme vzít, aby bylo jisté, že se mezi nimi najde pár?
b) Kolik jich musíme vzít, aby se mezi nimi našel černý pár?

Cvičení 11b.23 (rutinní)**:** Ve hře Magic je pět základních barev. Kolik náhodně namíchaných karet typu land je třeba mít, aby měl člověk jistotu, že od alespoň jedné barvy bude mít 10 karet?

Cvičení 11b.24 (rutinní)**:** V lepších čínských restauracích dávají po obědě hostům „štěstíčko“ („fortune cookie“, kousek těsta se zapečenou věštbou). Jestliže jich mají 50 druhů, jaký je nejvyšší možný počet návštěv, kdy člověk nedostane stejné štěstíčko víc než třikrát?

Cvičení 11b.25 (rutinní, poučné)**:** Dokažte, že se mezi libovolnými $d+1$ čísly najdou dvě, která mají při dělení d stejný zbytek.

Cvičení 11b.26 (dobré)**:** Dokažte, že vybereme-li z množiny $\{1, 2, \ldots, 50\}$ celkem 10 různých čísel, pak z nich lze dále vybrat dvěma různými způsoby pět čísel tak, aby měly stejný součet.

Cvičení 11b.27 (dobré)**:** Ukažte, že v libovolné uspořádané n-tici různých přirozených čísel se najdou alespoň dvě po sobě následující, jejichž součet je dělitelný n.

Cvičení 11b.28 (poučné)**:** Dokažte, že když se vezme libovolných pět bodů v rovině, které mají celočíselné souřadnice, tak se mezi nimi dá vybrat dvojice tak, aby měl střed jejich spojnice také celočíselné souřadnice. Ukažte totéž pro 9 bodů v prostoru $\mathbb{R}^3$.

Cvičení 11b.29 (poučné)**:** Dokažte, že když se vybere 5 různých čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$, pak se mezi nimi najde dvojice se součtem 9.

Cvičení 11b.30 (poučné)**:** Dokažte, že když se vybere 7 různých čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, pak se mezi nimi najdou dvě dvojice se součtem 11.

Cvičení 11b.31 (rutinní)**:** Dokažte, že jestliže je ve třídě 9 studentů, tak mezi nimi musí být alespoň 5 mužů nebo alespoň 5 žen.

Cvičení 11b.32 (rutinní)**:** Dokažte, že jestliže si loni alespoň 3000000 lidí vydělalo méně než 30000 měsíčně, tak se mezi nimi museli najít alespoň dva, kteří si vydělali na halíř stejně.

Cvičení 11b.33 (dobré, poučné)**:** Ve třídě se sešlo 17 lidí narozených ve znamení Štíra. Dokažte, že se musí najít dva, kteří mají narozeniny ve stejný den nebo hned den po sobě.

Cvičení 11b.34 (poučné)**:** Ukažte, že když vezmete libovolných pět bodů ze čtverce o straně 2, tak se tam najde dvojice, která je od sebe nejvýše $\sqrt{2}$ daleko.

Cvičení 11b.35 (poučné)**:** Kolika způsoby je možno vyrobit z n dlaždic chodník (o šířce jedné dlaždice, tj. dáváme je za sebe), pokud máme na výběr dlaždice tří barev a nechceme, aby někdy šly hned za sebou stejné dlaždice?

Cvičení 11b.36 (poučné)**:** Bankomat akceptuje koruny a dvoukoruny. Kolika způsoby je mu možné zaplatit n korun, pokud na pořadí záleží?

Cvičení 11b.37 (poučné)**:** Označme a_n počet binárních řetězců délky n, které obsahují dvě po sobě jdoucí nuly. Najděte pro tuto posloupnost rekurentní vztah a počáteční podmínky, pak určete a_5.

Cvičení 11b.38 (poučné)**:** Kolika způsoby je možno vyjít schodiště o n schodech, jestliže se dá jít po jednom ale také po dvou schodech? Kolik to dělá pro tradičních osm schodů?

Cvičení 11b.39 (dobré, poučné)**:** Na kolik nejvíce oblastí lze rozdělit rovinu pomocí n přímek?
Návod: Označte toto číslo R_n a najděte rekurentní vztah.

Cvičení 11b.40 (dobré, poučné)**:** Kolik je $S(n)$, maximální počet částí v 3D-prostoru, na který je možno prostor rozdělit pomocí n rovin?

Cvičení 11b.41 (poučné)**:** Kolik je řetězů ze znaků $0, 1, 2$ délky n, které neobsahují 00?

Cvičení 11b.42 (poučné)**:** Kolik derrangements množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ začíná
a) 456?
b) 345?
c) 234?
d) 321?
e) 312?

Cvičení 11b.43 (dobré, poučné)**:** Kolika způsoby je možno přerovnat číslo 1234567890 tak, aby číslice na sudých pozicích nezůstaly na svých místech?

Cvičení 11b.44 (dobré, poučné)**:** Dokažte kombinatoricky, že počet derrangements splňuje
a) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ pro $n \geq 2$;
b) $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ pro $n \geq 1$.
Poznámka: V b) získáváme pro počet derrangements rekurentní rovnici $D_{n-1} - (n+1)D_n = (-1)^{n+1}$, kterou lze vyřešit pomocí postupu v poslední poznámce kapitoly 10b: Máme $f(n) = 1$, $g(n) = -(n+1)$, $h(n) = (-1)^{n+1}$, proto $Q(n) = \frac{1}{(n+1)!}$, po substituci vyjde rovnice $b_{n+1} - b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$, také $b_1 = 0$, odtud $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ a $D_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$, přesně jako jsme odvodili v příkladu 11b.f.

Řešení:
11b.1: a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$; $A \cap B$ jsou studenti, kteří absolvovali oba kursy.
b) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$; $A \cap B$ jsou nákladní auta s čtyřmi a šesti koly, prázdná množina.
c) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$; $A \cap B$ jsou knihy psané česky a anglicky (dtřeba slovníky), $A \cap C$ jsou knihy psané česky a německy, $B \cap C$ jsou knihy psané anglicky a německy, $A \cap B \cap C$ jsou knihy psané česky, anglicky a německy.
11b.2: $50 + 60 + 70 + 80 - \binom{4}{2}5 + \binom{4}{3}1 - 0 = 260 - 30 + 4 = 234$.
11b.3: a) Jde tedy jen o ostatní tři ceny, $99 \cdot 98 \cdot 97 = 941094$. b) Nejprve čtyři možnosti ceny pro lístek 13, pak výběr na ostatní tři ceny, $4 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 = 3764376$. c) Vybíráme čtyři ceny z 99 lístků, $99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 =$

90345024. d) Vybíráme cenu pro lístek 13, ze zbývajících tří cenu pro lístek 23, na další dvě ceny ze zbývajících 98, $4 \cdot 3 \cdot 98 \cdot 97 = 114072$. e) Pokud vyhraje první cenu 13, dobereme lístky na ostatní: $99 \cdot 98 \cdot 97$. Pokud vyhraje první cenu 23, dobereme ostatní. Tyto možnosti jsou disjunktní, proto stačí sečíst, $2 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 = 1882188$. f) Vybereme cenu pro lístek 13 (4 možnosti), pak dobereme ostatní ceny: $99 \cdot 98 \cdot 97$. Ditto pro 23. Jenže tyto možnosti nejsou disjunktní, pokud mají cenu 13 i 23, započítali jsme je dvakrát, nutno použit princip inkluze a exkluze. Možnosti kdy mají 13 i 23 cenu: Nejprve pro ně vybereme ceny, $4 \cdot 3$, na další dobereme ze zbytku lístků. Celkově máme $2 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 - 4 \cdot 3 \cdot 98 \cdot 97 = 1768116$. g) Stačí je srovnat u cen, $4! = 24$. h) Viz e), $4 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 = 3764376$. i) Viz d), $4 \cdot 3 \cdot 96 \cdot 95 = 109440$.

11b.4: M_i řetězce s šesti nulami počínaje místem i, $|M_1| = |M_2| = |M_3| = 2^2 = 4$, průniky: $|M_1 \cap M_2| = |M_2 \cap M_3| = 2$ (řetězce se sedmi nulami), $|M_1 \cap M_3| = |M_1 \cap M_2 \cap M_3| = 1$ (osm nul), tedy celkem $3 \cdot 4 - 2 - 2 - 1 + 1 = 8$, proto výsledek je $2^8 - 8 = 248$.

11b.5: Množiny M_1 (permutace začínající 987), M_2 (permutace končící 123), M_3 (permutace s 45 na pozicích $5, 6$). Pak $|M_1| = |M_2| = 7!$, $|M_3| = 8!$, $|M_1 \cap M_2| = 4!$, $|M_1 \cap M_3| = |M_2 \cap M_3| = 5!$, $|M_1 \cap M_2 \cap M_3| = 2!$. Odpověď: $7! + 7! + 8! - 4! - 5! - 5! + 2! = 50138$.

11b.6: $7!$ permutací má BA; $6!$ permutací má FEC; obě najednou má $5!$ permutací (dva celky a tři zbývající písmena). Sjednocení má velikost $7! + 6! - 5! = 5640$.

11b.7: a) Volíme jen $T(3), \ldots, T(n)$, takže k^{n-2}. b) $M_1 = \{T\colon A \mapsto B;\ T(1) = a\}$ a $M_2 = \{T\colon A \mapsto B;\ T(2) = b\}$. Zajímá nás $|T_1 \cup T_2|$. Máme $|T_1 \cup T_2| = |T_1| + |T_2| - |T_1 \cap T_2| = 2 \cdot k^{n-1} - k^{n-2}$.

11b.8: a) Doplňkem, bez x je jich 25^4, tedy odpověď $26^4 - 25^4 = 66351$.
b) Vybereme místo pro jiný znak (4 možnosti) a tam vybereme, $4 \cdot 25 = 100$ slov.
c) K b) přidáme slovo ze čtyř x, celkem 101.

11b.9: a) $|M_7| = \left\lfloor \frac{999}{7} \right\rfloor = 142$. b) $|M_7 \cap M_{11}| = \left\lfloor \frac{999}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 12$. c) $|M_7| - |M_7 \cap M_{11}| = 142 - 12 = 130$.
d) $|M_7| + |M_{11}| - |M_7 \cap M_{11}| = 142 + 90 - 12 = 220$. e) $999 - 220 = 779$. f) Rozdělit podle počtu cifer (jedna až tři), první cifra nesmí být 0, proto s ní musíme začít, na dalších pozicích už nula být může: $9 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 \cdot 8 = 738$.
g) Zase podle počtu cifer. Nejprve vybíráme sudé číslo na poslední cifru, tím se ale změní možnosti na první cifru, podle toho, zda jako poslední dáme nulu (pak to první cifře nevadí) nebo ne (pak jsme první cifře vzali jednu možnost), čili další dělení na případy. Čísla končící na nulu: $0 + 9 + 9 \cdot 8 = 81$. Sudá čísla nekončící na nulu omezí výběr první cifry, $4 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 8 \cdot 8 = 4 + 32 + 256 = 292$. Celkem: 373.

11b.10: a) $|M_5| = \left\lfloor \frac{131313}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{22}{5} \right\rfloor = 26262 - 4 = 26258$. b) $|M_7| = \left\lfloor \frac{131313}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{22}{7} \right\rfloor = 18759 - 3 = 18756$.
c) $|M_5 \cap M_7| = \left\lfloor \frac{131313}{35} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{22}{35} \right\rfloor = 3751 - 0 = 3751$, proto $|M_5 \cup M_7| = 26258 + 18756 - 3751 = 41263$.
d) $(131313 - 23 + 1) - 18756 = 112534$. e) Vybereme nenulovou číslici a rozhodneme se, kolik jich může být. Jedniček může být tři až šest (čísla 111 až 111111) neboli 4 čísla, dvojek může být tři až pět neboli 3 čísla, trojek až devítek může být dvě až pět neboli čtyři čísla. Celkem $4 + 3 + 7 \cdot 4 = 35$.
f) Čísel je $131313 - 23 + 1 = 131291$, z toho dělitelných dvěma je $\left\lfloor \frac{131313}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{22}{2} \right\rfloor = 65656 - 11 = 65645$. Lichých je 65646. Pozor, počet lichých čísel se nedá určit jen z rozdílu, třeba mezi čísly 6 a 8 je jedno liché, ale mezi 7 a 9 jsou dvě lichá, ačkoliv je vzdálenost vždy stejná, $8 - 6 = 9 - 7 = 2$.
g) $|M_4| = \left\lfloor \frac{131313}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{22}{4} \right\rfloor = 32828 - 5 = 32823$; $|M_6| = \left\lfloor \frac{131313}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{22}{6} \right\rfloor = 21885 - 3 = 21882$;
Pozor, $|M_4 \cap M_6| = \left\lfloor \frac{131313}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{22}{12} \right\rfloor = 10942 - 1 = 10941$, proto $|M_4 \cup M_6| = 32823 + 21882 - 10941 = 43764$.

11b.11: Rozborem možností, c je číslo, p je písmeno (tedy nečíslo), pak jsou možnosti *ccpp*, *cpcp*, *cppc*, *pccp*, *pcpc*, *ppcc*, *cccp*, *ccpc*, *cpcc*, *pccc*, *cccc*, tudíž počet hesel je $6 \cdot 10^2 \cdot 26^2 + 4 \cdot 10^3 \cdot 26 + 10^4 = 519600$.
Nebo stručněji: Pro přesně dvě čísla vybereme pozice a pak znaky: $\binom{4}{2}10^2 26^2$. Pro přesně tři čísla vybereme pozice a pak znaky: $\binom{4}{3}10^3 26$. Přesně čtyři čísla: 10^4.

11b.12: Přímý útok: M_{ij} budiž množina značek, kde je 1 na i-tém místě a 2 na j-tém místě či naopak. Chceme velikost sjednocení, to je princip inkluze a exkluze se šesti výchozími množinami, nic pěkného. Zkusme doplněk. Celkem SPZ začínajících AS: $|M| = 26 \cdot 10^4 = 260000$. M_1 jsou SPZ bez jedničky, $|M_1| = 26 \cdot 9^4$, podobně pro M_2 neboli SPZ bez dvojky. Průnik $|M_1 \cap M_2| = 26 \cdot 8^4$. Pomocí principu doplňku a inkluze-exkluze dostaneme $26 \cdot 10^4 - [2 \cdot 26 \cdot 9^4 - 26 \cdot 8^4] = 25324$.

11b.13: Všech řešení M je $\binom{3+13-1}{13} = 105$.
a) M_i jsou řešení s $x_i \geq 7$, $|M_i| = \binom{3+6-1}{6} = 28$. Jsou navzájem disjunktní, neboť v $M_i \cap M_j$ jsou řešení s $x_i, x_j \geq 7$, zároveň $x_i + x_j \leq 13$, nelze. Proto $|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = 3 \cdot 28 = 84$. Hledaných řešení je $105 - 84 = 21$.
b) M_i jsou řešení s $x_i \geq 6$, $|M_i| = \binom{3+7-1}{7} = 36$. $M_i \cap M_j$ jsou řešení s $x_i, x_j \geq 6$, těch je $\binom{3+1-1}{1} = 3$. $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset$. Hledaných řešení je $105 - 3 \cdot 36 + 3 \cdot 3 = 6$.

11b.14: Množina M řešení splňujících dolní odhady: Dáme 2 do x_1, 7 do x_2, 6 do x_4, zbytek rozdělíme, $\binom{4+8-1}{8} = 165$.
Odebereme řešení nevyhovující horním mezím. M_1 řešení s $x_1 \geq 14$ a ostatními dolními odhady: rozdělíme $14 + 7 + 0 + 6 = 27$, nejde, $M_1 = \emptyset$. M_2 řešení s $x_4 \geq 10$ a ostatními dolními odhady: rozdělíme $1 + 7 + 10 = 18$ napevno, zbytek: $\binom{4+5-1}{5} = 56$. Také $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, počet řešení je tedy $165 - 56 = 109$.

11b.15: a) Množina M řešení splňujících dolní odhady: Dáme 2 do x_1, 6 do x_2, zbytek rozdělíme, $\binom{3+15-1}{15} = 136$. Odebereme řešení nevyhovující horním mezím. M_1 řešení s $x_1 \geq 10$ a ostatními dolními odhady: rozdělíme $10+6+0 = 16$ napevno, další $\binom{3+7-1}{7} = 36$ možností. M_2 řešení s $x_2 \geq 11$ a ostatními dolními odhady: rozdělíme $2+11+0 = 13$ napevno, další $\binom{3+10-1}{10} = 66$ možností. M_3 řešení s $x_3 \geq 7$ a ostatními dolními odhady: rozdělíme $2+6+7 = 15$ napevno, další $\binom{3+8-1}{8} = 45$ možností.
Průniky: $M_1 \cap M_2$: rozdělíme $10+11+0 = 21$ napevno, další $\binom{3+2-1}{2} = 6$ možností. $M_1 \cap M_3$: rozdělíme $10+6+8 = 24$ nejde. $M_2 \cap M_3$: rozdělíme $2+11+7 = 19$ napevno, další $\binom{3+4-1}{4} = 15$ možností. $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset$.
Špatných řešení je $36+66+45-6-0-15+0 = 126$. Počet řešení je tedy $136-126 = 10$.
b) Žádné řešení: I když dáme maximální povolené počty, dostaneme $x_1+x_2+x_3 = 5+10+6 = 21$.
c) $3 \leq x_1 < 7$, $6 < x_2 \leq 10$, $2 < x_3 \leq 9$?
c) Množina M řešení splňující dolní odhady: Dáme 3 do x_1, 7 do x_2, 3 do x_3, zbytek rozdělíme, $\binom{3+10-1}{10} = 66$.
Odebereme řešení nevyhovující horním mezím: 7-7-3 $\implies \binom{3+6-1}{6} = 28$, 3-11-3 $\implies \binom{3+6-1}{6} = 28$,
3-7-10 $\implies \binom{3+3-1}{3} = 10$, 7-11-3 $\implies \binom{3+2-1}{2} = 6$, 7-7-10 $\implies \emptyset$, 3-11-10 $\implies \emptyset$.
Špatná řešení: $28+28+10-6-0-0+0 = 60$. Počet řešení je tedy $66-60 = 6$.
To by možná šlo rychleji výpisem. Protože $x_2+x_3 \leq 19$, musí být x_1 alespoň 4. Možnosti: $(4,10,9)$, $(5,9,9)$, $(5,10,8)$, $(6,8,9)$, $(6,9,8)$, $(6,10,7)$.
11b.16: Jde o jedno až tříciferná čísla, takže hledáme počet řešení rovnic $a_1 = 13$, $a_1+a_2 = 13$ a $a_1+a_2+a_3 = 13$, kde $a_i \in \mathbb{N}_0$, $a_i < 10$ a $a_1 \geq 1$. První rovnice řešení nemá, druhá: 6 možností, třetí 85 možností.
11b.17: Jde o problém ekvivalentní počtu surjektivních zobrazení z 6-prvkové množiny na tříprvkovou, podle vzorce je to $\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{3}{i}(3-i)^6 = \binom{3}{0}3^6 - \binom{3}{1}2^6 + \binom{3}{2}1^6 = 3^6 - 3\cdot 2^6 + 3 = 540$.
11b.18: Nejtěžší přidělíme hned, zbývá rozdělit šest úkolů čtyřem lidem tak, aby tři (nikoliv nejlepší) zaměstnanci měli alespoň jeden. Rozložit na dvě disjunktní množiny podle toho, zda nejlepší ještě něco dostane či ne. Pokud už ne, tak stačí rozdělit všech 6 úkolů mezi tři zaměstnance, aby měli každý alespoň jeden, to je celkem
$\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{3}{i}(3-i)^6 = \binom{3}{0}3^6 - \binom{3}{1}2^6 + \binom{3}{2}1^6 = 3^6 - 3\cdot 2^6 + 3 = 540$ možností.
Nebo i ten nejlepší alespoň jeden navíc dostane, rozdělujeme 6 mezi čtyři tak, aby měl každý alespoň jeden, to je
$\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\binom{4}{i}(4-i)^6 = \binom{4}{0}4^6 - \binom{4}{1}3^6 + \binom{4}{2}2^6 - \binom{4}{3}1^6 = 4^6 - 4\cdot 3^6 + 6\cdot 2^6 - 4 = 1560$ možností. Celkem 2100.
11b.19: a) Každá věc vybírá číslo krabice, záleží na pořadí (věci jsou různé), s opakováním, $5^6 = 15625$.
b) Toto je ten těžší případ, $\sum_{j=1}^{5} S(6,j) = \sum_{j=1}^{5}\frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i\binom{j}{i}(j-i)^6 = 1^6 + \frac{1}{2!}\left[2^6 - 2\cdot 1^6\right] + \frac{1}{3!}\left[3^6 - 3\cdot 2^6 + 3\cdot 1^6\right]$
$+\frac{1}{4!}\left[4^6 - 4\cdot 3^6 + 6\cdot 2^6 - 4\cdot 1^6\right] + \frac{1}{5!}\left[5^6 - 5\cdot 4^6 + 10\cdot 3^6 - 10\cdot 2^6 + 5\cdot 1^6\right] = 1+31+90+65+15 = 202$.
c) Každá věc vybírá číslo krabice, nezáleží na pořadí (věci jsou stejné), s opakováním, $\binom{5+6-1}{6} = 210$.
d) Toto jedině výčtem či jiným podobným způsobem, třeba tak, že srovnáme krabice podle počtu prvků od nejmenšího, možnosti jsou 0-0-0-0-6, 0-0-0-1-5, 0-0-0-2-4, 0-0-0-3-3, 0-0-1-1-4, 0-0-1-2-3, 0-0-2-2-2, 0-1-1-1-3, 0-1-1-2-2, 1-1-1-1-2. Celkem 10.
11b.20: 0 pro $n < m$, jinak nejprve natvrdo m věcí po jedné do krabic a pro zbývajících $n-m$ věcí losujeme čísla krabic s opakováním, pořadí nezáleží, tedy $\binom{m+(n-m)-1}{n-m} = \binom{n-1}{n-m}$.
11b.21: a) $2\cdot 4+1 = 9$; b) $13\cdot 3+3 = 42$.
11b.22: a) $2\cdot 1+1 = 3$; b) $10+2 = 12$.
11b.23: $5\cdot 9+1 = 46$.
11b.24: $3\cdot 50 = 150$.
11b.25: Rozdělíme je do krabiček podle zbytků, možných zbytků je d, tudíž dle šuplíkového principu musí nějaká krabička obsahovat alespoň dvě čísla.
11b.26: Max. možná suma je $50+49+48+47+46 = 240$, minimální je $1+2+3+4+5 = 15$. Je tedy možné vytvořit 226 možných sum, ale existuje 252 pětiprvkových podmnožin množiny o 10 prvcích, takže se dvě musí v součtu shodnout.
11b.27: Nechť jsou to čísla $a_1, \ldots, a_n$, pro $k = 1, \ldots, n$ označme $d_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$. (Tedy uvažujeme $a_1, a_1+a_2, \ldots$) Jestliže pro nějaké k platí $d_k \bmod n = 0$, pak je hotovo. Jinak máme n čísel d_k, která dávají mod$n$ zbytek $1, 2, \ldots, n-1$, takže se dvě musí shodnout, tím pádem $d_k - d_m \bmod n = 0$ pro nějaké $m < k$ a tedy $\sum_{i=m+1}^{k} a_i \bmod n = 0$.

11b.28: Střed se získá jako aritmetický průměr souřadnic x a souřadnic y, tedy $\frac{1}{2}(A+B) = \left(\frac{1}{2}(a_1+b_1), \frac{1}{2}(a_2+b_2)\right)$. Je tedy třeba vybrat body tak, aby součet prvních souřadnic i součet druhých souřadnic byl sudý, což znamená, že souřanice musí mít stejnou paritu.
Bodů je pět, proto po rozdělení do dvou hromádek dle parity první souřadnice musí být alespoň tři body, jejichž první souřadnice má stejnou paritu (tři sudá či tři lichá čísla). Ty tři zase rozdělíme do dvou hromádek podle parity druhé souřadnice a v jedné z hromádek musí zbýt alespoň dva body.
11b.29: Vyrobíme 4 množiny-krabičky $\{1,8\}$, $\{2,7\}$, $\{3,6\}$, $\{4,5\}$. V každé je součet 9. Rozdělíme do nich 5 čísel, tudíž v nějaké musí být dvě.
11b.30: Pět množin $\{1,10\}$, $\{2,9\}$ až $\{5,6\}$. Rozdělujeme sedm čísel, tudíž alespoň jedna množina má dvě čísla, ale nemůže mít víc, tudíž zbývá pět čísel na čtyři krabičky, takže i jiná má dvě čísla.
11b.31: Krabička mužů, krabička žen, v jedné z nich musí být $\left\lceil \frac{9}{2} \right\rceil = 5$ lidí.
11b.32: Je 2999999 různých platů.
11b.33: Znamení Štíra reprezentuje maximálně 31 po sobě jdoucích dní (existují různé verze začátku/konce). Rozdělme je do dvojic, první den s druhým, třetí se čtvrtým atd., je jich 16. Pak musí z těch 17 lidí alespoň dva skončit se dnem narození v jedné dvojici, pak už buď jejich narozeniny souhlasí, nebo jsou den po sobě.
11b.34: Čtverec se rozdělí na čtyři menší o straně 1, dle šuplíkového principu musí do některého z nich padnout alespoň dva body, ty nemohou být od sebe dále než je velikost diagonály neboli $\sqrt{2}$.
11b.35: Cestu délky n dostaneme přiřazením dlaždice k cestě délky $n-1$, jsou dvě možnosti (třetí typ dlaždice by se opakoval). Proto rovnice $a_n = 2a_{n-1}$, $a_1 = 3$. řešení rovnice $a_{n+1} - 2a_n = 0$ je $a_n = 2^n u$, hledaný počet způsobů je $3 \cdot 2^{n-1}$.
11b.36: Poslední použitá mince je buď koruna nebo dvoukoruna, tedy $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pro $n \geq 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, vychází Fibonacciho posloupnost.
11b.37: Rozdělíme situaci podle toho, jak vypadají první dva znaky. Pokud řetězec začíná 00, pak už jsou další znaky libovolné, je tedy 2^{n-2} možností. Další možnost je, že první dvojice je 01, pak musí následovat řetězec délky $n-2$ s dvěma nulami, to je a_{n-1} možností. Poslední varianta je začátek 10 či 11, tedy jde o jedničku a pak řetězec o délce $n-1$ s dvěma nulami. Vzniká rovnice $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$ pro $a_n \geq 2$, podmínky $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.
Pak $a_3 = 3$, $a_4 = 8$, $a_5 = 19$.
11b.38: Rekurentní vztah je $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pro $n \geq 2$, počáteční podmínky $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Jde tedy o posunutou Fibonacciho posloupnost, $a_n = F_{n+1}$. Proto $a_8 = F_9 = 34$.
11b.39: Protože každá přímka má obecně schopnost půlit oblasti a můžeme si představit, že kreslíme jednu za druhou a každá nová může půlit již existující oblasti, bude to určitě nejvýše 2^n. Ve skutečnosti to ale bude znatelně méně, protože jakmile se oblasti rozptýlí, nová přímka je nedokáže zachytit všechny. Zkuste si rozmyslet, že už třetí přímkou nikdy nedostanete osm oblastí.
Rekurentní vztah: Když zakreslíme novou přímku, tak oblasti, které protíná, musí být za sebou ve směru přímky a odděleny od sebe předchozími přímkami. Počet protnutých oblastí tedy nemůže být větší, než počet již nakreslených přímek plus jedna. Počet oblastí po nakreslení n-té přímky je tedy roven počtu původních oblastí plus počtu přeťatých, což je nejvýše $(n-1)+1$ (počet předchozích přímek plus jedna). Proto rovnice $R_n = R_{n-1} + n$, počáteční podmínka $R_1 = 2$.
Přepis: $R_{n+1} - R_n = n+1$, pak $a_{h,n} = u$, odhad $a_n = n(An+B) = An^2 + Bn$, po dosazení $A = B = \frac{1}{2}$, poč. podm. dá $u = 1$. řešení $R_n = \frac{n(n+1)+2}{2}$.
11b.40: Zakreslíme n-tou rovinu a nyní se podívejme jen na ni jako na dvojrozměrný útvar. Vidíme tam přímky, což jsou průniky s předchozími rovinami, a oblasti. Každá tato dvojrozměrná oblast na n-té rovině odpovídá jedné 3D části, kterou jsme touto rovinou přeťali a tím vytvořili novou. Počet nově vytvořených částí je tedy roven počtu oblastí, které na n-té rovině vytvořilo $n-1$ přímek (průniků s předchozími rovinami), což je podle předchozího cvičení nejvýše $\frac{(n-1)n+2}{2}$. Dostáváme rovnici $S_n = S_{n-1} + \frac{n^2-n+2}{2}$ a podmínku $S_1 = 2$, odtud $S_n = \frac{n^3+5n+6}{6}$.
11b.41: Vytváříme zleva, přidáváme nenulu ke „správnému“ řetězci délky $n-1$ či 10 nebo 20 ke správnému řetězci délky $n-2$. Rovnice $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ pro $n \geq 2$, podmínky $a_0 = 1$, $a_1 = 3$. Vyjde $\lambda = 1 \pm \sqrt{3}$, obecné řešení $a_n = \left(1+\sqrt{3}\right)^n u + \left(1-\sqrt{3}\right)^n v$, hledané řešení $a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^n$.
11b.42: a) Prvky $1,2,3$ se dávají na místa $4,5,6$, nikdy tedy nemůže dojít ke shodě, libovolná permutace zabere: $3! = 6$.
b) Prvky $1,2,6$ se permutují na místa $4,5,6$, musíme si tedy pohlídat, aby 6 nešlo na 6. Všech permutací je 3!, těch dávajících 6 na 6 je $2! = 2$, proto odpověď zní $6 - 2 = 4$.
c) Prvky $1,5,6$ se permutují na místa $4,5,6$, musíme si tedy pohlídat, aby 5 nešlo na 5 ani 6 nešlo na 6. To je tak restriktivní, že to půjde spočítat. 6 může jít na místo 5, pak libovolné pozice ostatních nebudou mít shodu, tedy $2! = 2$ možností. Nebo 6 může jít na místo 4, pak rozhazujeme $1,5$ na místa $5,6$ a nechceme shodu, jediná možnost. Celkem 3.
d) Takové derrangements nejsou, protože dvojka už je na původní pozici a zkazila to.

e) Prvky $4,5,6$ se permutují na místa $4,5,6$, jde tedy o otázku, kolik je derrangements tříprvkových množin. Podle vzorce je odpověď $3!\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^k}{k!} = 6\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) = 2$.
Jde to také rozborem situací, jsou to permutace 645 a 564.

11b.43: Jde o derrangements, ale nelze přímo použít hotový výsledek, protože se sudé a liché číslice mohou mezi sebou míchat. Proto se použije jen postup z příkladu o derrangements. M_i množina permutací, které nechají i-tou cifru na svém místě, počítáme permutace, které nechají některou sudou cifru na svém místě, tedy množinu $M_2 \cup M_4 \cup M_6 \cup M_8 \cup M_{10}$.
$|M_i| = 9!$, $|M_i \cap M_j| = 8!$, $|M_i \cap M_j \cap M_k| = 7!$ atd, celkem je jich
$5\cdot 9! - \binom{5}{2}8! + \binom{5}{3}7! - \binom{5}{4}6! + 5! = 5\cdot 9! - 10\cdot 8! + 10\cdot 7! - 5\cdot 6! + 5! = 1458120$.
Odečteme od všech permutací 10!, dostaneme 2170680.

11b.44: a) Nejprve přesuneme 1, máme $n-1$ kandidátů. Je třeba přesunout ostatní. Nechť $1 \mapsto k$. Vezmeme tedy čísla $\{2,3,4,\dots,n\}$, přesuneme jejich pořadí takto: $\{k,2,3,4,\dots,k-1,k+1,\dots,n\}$. Každá jejich derrangement pak dává derrangement původní množiny, když prvních $k-1$ dáme na místa 1 až $k-1$ a zbytek za tu jedničku na místě k (nakreslete si to). Je tedy D_{n-1} možností.
Nezískáme tím ale všechny možné derrangements, protože tímto způsobem nelze umístit k na pozici 1. Tyto možnosti je třeba doplnit: Pošleme $1 \mapsto k$ a $k \mapsto 1$, pak zbývajících $n-2$ prostě permutujeme a jejich derrangements dávají derrangements původní množiny. Celkem tedy $D_{n-1} + D_{n-2}$ pro situaci, kdy $1 \mapsto k$. Násobící princip pak dá výsledek.
b) Podle a) je $D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] = -[-(D_{n-2} - (n-2)D_{n-3})] = D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}$
$= \dots = (-1)^n(D_2 - 2D_1) = (-1)^n(1-2\cdot 0)$.

11c. Binomická věta, kombinační čísla

Než se k binomické větě dostaneme, budeme potřebovat znát jednu důležitou vlastnost kombinačních čísel.

! **Fakt 11c.1.** (Pascalova identita, Pascal's identity)
Pro všechna $k \le n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Důkaz (poučný)**:** Jedna možnost je použít algebru:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!k + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!k + n!(n+1) - n!k}{k!(n-k+1)!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

Alternativa: Číslo $\binom{n+1}{k}$ udává, kolik má množina M s $|M| = n+1$ podmnožin o k prvcích. Teď toto číslo dostaneme ještě jinak. Vyberme prvek $m \in M$ a rozdělme podmnožiny M podle toho, zda m obsahují nebo ne. Ty, které jej neobsahují, jsou vlastně k-prvkovými podmnožinami množiny $M - \{m\}$ o n prvcích, je jich tedy $\binom{n}{k}$. Ty, které m obsahují, jsou pak určeny ostatními prvky, kterých je $k-1$ a jsou z $M - \{m\}$, počet těchto podmnožin je tedy stejný jako počet $(k-1)$-prvkových podmnožin množiny $M - \{m\}$. Alternativní počítání proto dalo $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ podmnožin. Protože jsme pokaždé počítali totéž, musí platit Pascalova identita.

□

Tomuto alternativnímu důkazu se říká „kombinatorický důkaz“, spočívá v tom, že se tatáž věc spočítá dvěma různými způsoby, výsledky se pak musejí rovnat.

! Vzorec z Faktu je velice užitečný z hlediska výpočetního, protože jej lze využít k rekurzivní definici:

(0) $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$.
(1) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ pro $k \le n \in \mathbb{N}_0$.

Výhoda tohoto vzorce je, že používá jen sčítání, proto je výpočet tímto způsobem často rychlejší, zejména pokud potřebujeme spočítat více kombinačních čísel najednou. Používá se to občas i při ručním výpočtu a pak má Pascalova nerovnost i velice intuitivní geometrickou podobu, které se říká Pascalův trojúhelník. Srovnáme si kombinační čísla pod sebe do řádků podle n, jednou symbolicky a podruhé skutečné hodnoty. V rámci úspory místa nenapíšeme všech nekonečně mnoho čísel, ale skončíme s $n = 5$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\binom{0}{0} & & & & & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & & & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & & & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & & & & & \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Podívejte se teď na ten pravý trojúhelník. Na hranách má jedničky, to plyne z Faktu 11a.4. Fakt 11c.1 tam vidíme tak, že libovolné číslo mimo hranu získáme součtem dvou čísel, které jsou nad ním a bezprostředně doleva a doprava. Jinak řečeno, když vezmeme dvě sousední čísla v Pascalově trojúhelníku a sečteme, dostaneme číslo pod jejich středem.

V trojúhelníku vidíme i další věci, třeba symetrii, která vyplývá z Faktu 11a.4. Vidíme také, že v každém řádku čísla nejprve rostou a pak klesají. To si potvrdíme obecně:

Fakt 11c.2.
Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak platí:

$$1 = \binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

Důkaz (poučný)**:** 1) Nejprve dokážeme tu rovnost uprostřed. Pokud je n sudé, pak ta rovnost vlastně říká $\binom{n}{\frac{n}{2}} = \binom{n}{\frac{n}{2}}$, což je určitě pravda.

Pokud je n liché, pak $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$, $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n+1}{2}$ a máme

$$\binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \frac{n!}{(\frac{n-1}{2})!(n-\frac{n-1}{2})!} = \frac{n!}{(\frac{n-1}{2})!(\frac{n+1}{2})!} = \frac{n!}{(n-\frac{n+1}{2})!(\frac{n+1}{2})!} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}}.$$

2) Teď ukážeme nerovnosti, díky symetrii je stačí ukázat pro levou polovinu. Mějme tedy k splňující $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Prozkoumáme kýženou nerovnost:

$$\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1} \iff \frac{n!}{k!(n-k)!} < \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \iff k+1 < n-k$$
$$\iff 2k < n-1 \iff k < \tfrac{n-1}{2}.$$

Poslední nerovnost pro k splňující $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ platí, což je vidět například rozborem pro n sudé a n liché. □

Ke kombinačním číslům se ještě vrátíme.

Binomickou větu asi každý čtenář zná alespoň v té nejjednodušší formě pro $(x+y)^2$, právě výrazu $x+y$ říkáme binom (neboli dvojčlen). Někteří čtenáři patrně umí rozvinout i $(x+y)^3$, jak je to dál?

! **Věta 11c.3.** (binomická věta, binomial theorem)
Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$
$$= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}x^2y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n.$$

Všimněte si, že díky symetrii kombinačních čísel si můžeme vybrat, jestli se bude dolní číslo k u $\binom{n}{k}$ shodovat s mocninou u x nebo s mocninou u y, proto jsme to napsali oběma způsoby.

Důkaz (poučný)**:** Důkazů existuje povícero, například indukcí na n. Mějme čísla $x, y \in \mathbb{R}$.

(0) Pro $n = 1$ jistě platí $(x+y)^1 = x + y = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}y$.

(1) Předpokládejme, že vzorec pro $(x+y)^n$ platí. Pak pomocí běžné algebry a Faktu 11c.1 máme

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k + y\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} = \left|\begin{array}{c} j=k+1 \\ k=0 \mapsto j=1 \end{array}\right|\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}x^{n-(j-1)}y^j\\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}x^{n-j+1}y^j + y^{n+1}\\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\Big)x^{n-k+1}y^k + y^{n+1}\\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{(n+1)-k}y^k + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{(n+1)-k}y^k.\end{aligned}$$

Lze také zkusit kombinatorický důkaz. Při roznásobování $(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$ se bere člen z každé závorky. Abychom dostali $x^k y^{n-k}$, musíme vybrat, z kterých k závorek vybereme x, to je možné $\binom{n}{k}$ způsoby.

□

Takže například

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + \tbinom{5}{2}x^3y^2 + \tbinom{5}{3}x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

Porovnejte poslední řádek Pascalova trojúhelníka výše s koeficienty tohoto rozkladu. Je to příjemné, na druhou stranu kreslit trojúhelník o dvaceti řádcích kvůli rozkladu $(x+y)^{20}$ asi není nejlepší metoda. Na to se hodí následující zajímavý trik:

Fakt 11c.4.
Nechť $k < n \in \mathbb{N}_0$. Pak platí:
(i) $\binom{n}{k}\cdot\dfrac{n-k}{k+1} = \binom{n}{k+1}$,
(ii) $\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\cdot\dfrac{n-k}{k+1}\,\dfrac{y}{x} = \binom{n}{k+1}x^{n-(k+1)}y^{k+1}$.

Důkaz (rutinní)**:** (i):

$$\binom{n}{k}\cdot\frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \binom{n}{k+1}$$

Z toho hned plyne (ii).

□

Takže například v rozkladu $(x+y)^{20}$ máme postupně členy x^{20}, $x^{20}\frac{20}{1}\frac{y}{x} = 20x^{19}y$, $20x^{19}y\frac{19}{2}\frac{y}{x} = 190x^{18}y^2$, $190x^{18}y^2\frac{18}{3}\frac{y}{x} = 1140x^{17}y^3$, $1140x^{17}y^3\frac{17}{4}\frac{y}{x} = 4845x^{16}y^4$ atd.

Binomická věta je silně užitečná, tím spíš, že se dá dále zobecnit, a to dokonce dvěma směry. Jedna možnost je umocňovat mnohočleny neboli multinomy. Jako inspiraci si nejprve uvedeme ještě jinou verzi binomické identity:

$$(x+y)^n = \sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!j!}x^iy^j.$$

Zobecnění na mnohočlen pak funguje podobně.

! **Věta 11c.5.** (multinomická věta, multinomial theorem)
Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ platí

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}.$$

Někteří autoři zavádějí značení $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!}$, jde o zobecněná kombinační čísla. Mají také kombinatorický význam, říkají nám, kolika způsoby lze (bez ohledu na pořadí výběru) vybrat n_1 objektů do první krabičky, n_2 objektů do druhé atd, viz 11b.7 c).

Například máme

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= \sum_{i+j+k=2} \binom{2}{i,j,k} x^i y^j z^k \\ &= \binom{2}{2,0,0} x^2y^0z^0 + \binom{2}{0,2,0} x^0y^2z^0 + \binom{2}{0,0,2} x^0y^0z^2 \\ &\quad + \binom{2}{1,1,0} x^1y^1z^0 + \binom{2}{1,0,1} x^1y^0z^1 + \binom{2}{0,1,1} x^0y^1z^1 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.\end{aligned}$$

Další možnost je zobecnit binomickou větu pro necelé mocniny. Nejprve ale potřebujeme rozšířit definici kombinačního čísla. Nejprve připomeňme, že pro $k \le n \in \mathbb{N}$ máme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+2) \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

To nás inspiruje k následující definici.

Definice
Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}_0$. Pak definujeme

$$\binom{\alpha}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{\alpha - i + 1}{i}.$$

U takto zobecněných kombinačních čísel již nemusí platit, že výsledkem je přirozené číslo, například

$$\binom{\frac12}{3} = \frac{\frac12(\frac12-1)(\frac12-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{\frac12(-\frac12)(-\frac32)}{2\cdot 3} = \frac{1}{16}.$$

Rozmyslete si, že pro $k \ge 2$ z definice dostáváme

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-k+2) \cdot (\alpha-k+1)}{k!}.$$

Máme také $\binom{\alpha}{1} = \alpha$ a $\binom{\alpha}{0} = 1$, protože pak se v součinu násobí přes prázdnou množinu, což je podle definice rovno jedné.

Všimněte si ještě, že pokud $\alpha \in \mathbb{N}$, tak je v případě $k \le \alpha$ výraz $\binom{\alpha}{k}$ roven kombinačnímu číslu dle původní definice, a v případě $k > \alpha$ je $\binom{\alpha}{k} = 0$, protože se mezi činiteli v čitateli objeví nula.

Teď už jsme připraveni.

! **Věta 11c.6.** (Newtonův binomický rozvoj, Newton binomial expansion)
Pro každé $\alpha > 0$ a všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňující $|x| < |y|$ platí

$$\begin{aligned}(x+y)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k} \\ &= y^\alpha + \alpha x y^{\alpha-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 y^{\alpha-2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 y^{\alpha-3} + \cdots\end{aligned}$$

Suma jde do nekonečna, což je problém, který se řeší v analýze, kde se dozvíme, že některé nekonečné součty smysl mají a jiné ne. V tomto případě nám úspěch zaručuje právě podmínka $|x| < |y|$. Jako zajímavou aplikaci si ukažme následující vzorec platný pro $|x| < 1$:

$$\sqrt{1+x} = (x+1)^{1/2} = 1 + \tfrac12 x - \tfrac18 x^2 + \tfrac{1}{16} x^3 - \cdots$$

Vynecháním vyšších mocnin dostáváme odhad $\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac12 x$, který je pro malá x dost dobrý (například pro $|x| < 0.5$ už má relativní chybu menší než 2%).

Všimněte si, že pokud vezmeme $\alpha \in \mathbb{N}$, pak budou skoro všechna kombinační čísla nulová a vznikne z toho standardní suma jako ve Větě 11c.3.

Teď se podíváme na několik zajímavých důsledků binomické věty.

Důsledek 11c.7.
Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak platí
(i) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$;
(ii) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Důkaz (poučný)**:** (i): Stačí rozvinout $2^n = (1+1)^n$.
Alternativa: Lze provést kombinatorický důkaz spočítáním počtu podmnožin, viz příklad 11a.i.
(ii): Stačí rozvinout $0^n = (1-1)^n$.

□

Z části (ii) plyne, že $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$. O kombinačních číslech se dá dokázat doslova stovky vztahů, jsou to velice zajímavé objekty. Několik takových si ukážeme.

Fakt 11c.8.
Nechť $k \leq n \in \mathbb{N}_0$. Pak $\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Důkaz (poučný)**:** Kombinatorický důkaz: Kolik je binárních řetězců o délce $n+1$, které obsahují přesně $k+1$ jedniček? Jedna možnost je místa pro jedničky vybrat, to je to číslo na pravé straně.
Druhá možnost je rozdělit situaci podle toho, kde je poslední jednička. Protože je jedniček $k+1$, tak možnosti pro poslední jedničku jsou $i = k+1, k+2, \ldots, n+1$. Pro každou takovou pozici je pak třeba vybrat místo pro předchozích k jedniček a na výběr je z $j = i-1$ pozic, tedy $\binom{j}{k}$ možností.

□

Fakt 11c.9. (Vandermondeho identita)
Pro všechna $k, m, n \in \mathbb{N}_0$ taková, že $k \leq m$ a $k \leq n$, platí $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}$.

Důkaz (poučný)**:** Zase provedeme kombinatorický důkaz. Nechť A, B jsou libovolné disjunktní množiny takové, že $|A| = m$ a $|B| = n$. Kolik je podmnožin $A \cup B$ o k prvcích?
Přímý výběr dá číslo na pravé straně. Další možnost je rozdělit tento počet podle toho, kolik z prvků se vybírá z množiny A. Je zjevné, že když vybereme i prvků z množiny A, pak musíme zbývajících $k-i$ dobrat z B a jde o nezávislé fáze výběru, tudíž se použije násobící princip. Z toho hned dostáváme vzorec na levé straně.

□

Důsledek 11c.10.
Pro $n \in \mathbb{N}_0$ platí $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Další identity čtenář najde ve cvičeních.

Kombinační čísla se pro větší hodnoty k, n obtížně počítají, takže podobně jako u fakoriálu někdy raději použijeme odhad. Pro dobré odhady je třeba udělat hodně práce, jako ukázku si uvedeme několik lehčích.

Fakt 11c.11.
Nechť $n \in \mathbb{N}$.
(i) Pro $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ platí $\binom{n}{k} \leq 2^n$.
(ii) Platí $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \frac{2^n}{n}$.

Důkaz (poučný)**:** (i): Toto okamžitě vyplývá z Důsledku 11c.7 (i), sčítáme tam kladná čísla, takže každé z nich musí být nejvýše rovno jejich součtu.

(ii): Pro $n = 0$ a $n = 1$ se to ověří hned, pro $n \geq 2$ to dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že $n \geq 2$ a $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} < \frac{2^n}{n}$. Pak podle Faktu 11c.2 bude pro všechna k platit $\binom{n}{k} \leq \frac{2^n}{n} - 1$ a tudíž $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \leq 2^n - n$. Proto

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \leq 1 + 2^n - n < 2^n,$$

což je ve sporu s Důsledkem 11c.7 (i).

□

Další odhad ukážeme ve cvičení 11c.12.

Cvičení

Cvičení 11c.1 (rutinní, dobré)**:** Najděte n, jestliže
a) $\binom{n}{2} = 45$;
b) $\binom{n}{8} = \binom{n}{5}$.

Cvičení 11c.2 (rutinní)**:** Najděte rozvoj $(1 + x)^7$.

Cvičení 11c.3 (rutinní, *dobré)**:** Jaký je koeficient u x^k v rozkladu
(i) $(x + 1)^{100}$;
(ii) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^{100}$;
(iii) $(x + y)^{100}$;
(iv)* $(x + x^2)^{100}$;
(v)* $(x + 1/x)^{100}$;
(vi)* $(x^2 - 1/x)^{100}$.

Cvičení 11c.4 (rutinní)**:** Dokažte indukcí na n, že pro každé $k \leq n \in \mathbb{N}_0$ platí $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.
Nápověda: Pascalova identita.

Cvičení 11c.5 (poučné)**:** Dokažte, že jestliže je p prvočíslo a $k \in \mathbb{N}$, $k < p$, pak p dělí $\binom{p}{k}$.

Cvičení 11c.6: Dokažte, že pro $k \leq n \in \mathbb{N}$ platí $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
Nápověda: Kombinatorický důkaz, viz třeba příklad 11a.m.

Cvičení 11c.7: Dokažte, že pro $m \leq k \leq n \in \mathbb{N}_0$ platí $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$.
Nápověda: Kombinatorický důkaz, viz třeba příklad 11a.m.

Cvičení 11c.8: Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$.
Nápověda: Binomická věta.

Cvičení 11c.9: Dokažte pomocí matematické indukce, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ platí $\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$.

Cvičení 11c.10: Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

Cvičení 11c.11: Dokažte, že pro $n, m \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}$

Cvičení 11c.12 (poučné)**:** Dokažte, že pro $k \leq n \in \mathbb{N}$ platí $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}$.

Řešení:
11c.1: a) $\frac{n(n-1)}{2} = 45 \implies n^2 - n - 90 = 0 \implies n = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}19$, $n = 10$.
b) Každý řádek v Pascalově trojúhelníku je symetrický podle středu, tudíž musí platit $n = 8 + 5 = 13$.
11c.2: $1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^5 + x^7$.
11c.3: (i): Pro $k > 100$ nebo $k < 0$ je to 0, jinak $\binom{100}{k}$.
(ii): Pro $k > 100$ nebo $k < 0$ je to 0, jinak $\binom{100}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{100-k} = \binom{100}{k}2^{k-100}$.
(iii): Pro $k > 100$ nebo $k < 0$ je to 0, jinak $\binom{100}{k}y^{100-k}$.

(iv): j-tý člen rozvoje je $\binom{n}{j}x^{100-j}x^{2j} = \binom{n}{j}x^{100+j}$. Pro $k > 200$ nebo $k < 100$ je koeficient 0, jinak je $\binom{n}{100-k}$. (v): j-tý člen rozvoje je $\binom{n}{j}x^{100-j}x^{-j} = \binom{n}{j}x^{100-2j}$. Pro $k > 100$ nebo $k < -100$ nebo k liché je koeficient 0, jinak je $\binom{n}{(100-k)/2}$. (vi): j-tý člen rozvoje je $\binom{n}{j}(-1)^j x^{200-2j}x^{-j} = \binom{n}{j}(-1)^j x^{100-3j}$. Pro $k > 100$ nebo $k < -200$ nebo k splňující $k \bmod 3 = 1$ či $k \bmod 3 = 0$ je koeficient 0, jinak je $(-1)^{(200-k)/3}\binom{100}{(200-k)/3}$.

11c.4: $V(n)$: Pro každé $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ platí $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.
(0) Pro $n = 0$ to ověříme dosazením.
(1) Předpokládejme, že pro nějaké (libovolné) $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n)$. Ověříme teď platnost $V(n+1)$.
Nechť $k \in \{0, \ldots, n+1\}$. Pokud $k = 0$ nebo $k = n+1$, pak $\binom{n+1}{k} = 1 \in \mathbb{N}$. Jinak platí $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ a ona dvě čísla napravo jsou z $\mathbb{N}$ dle indukčního předpokladu.

11c.5: $\binom{p}{k} = \frac{p\cdot(p-1)\cdots(n-p+1)}{2\cdot 3\cdots k}$. Výsledek je celé číslo, proto se $k!$, musí zkrátit, ale čísla $2, \ldots, k$ nemohou krátit p (je to prvočíslo a větší než ta čísla), tudíž se musí zkrátit s čísly $(p-1)(p-2)\cdots 2$.

11c.6: Jev: vybrat delegaci o k lidech a v ní určit mluvčího. Buď nejprve delegaci a z ní mluvčího, nebo nejprve mluvčího a k němu dobrat zbytek delegace.

11c.7: Kombinatorický důkaz: Vybrat delegaci o k členech a v ní podvýbor o m členech.

11c.8: $3^n = (1+2)^n = \ldots$

11c.9: (0) $n = 2$: $1 = 1$ O.K. (1) $V(n) \implies V(n+1)$: $\sum_{k=2}^{n+1}\binom{k}{2} = \sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} + \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}$ podle Pascalovy identity.

11c.10: Kombinatorický důkaz: Kolika způsoby je z n lidí možno vybrat nějakou delegaci a jejího mluvčího? Buď vybíráme delegace různých velikostí a z nich mluvčí (nalevo), nebo vybereme mluvčího a k němu doplníme zbytek delegace, což jsou podmnožiny z $n-1$ lidí. Lze také důkaz indukcí, mnohem horší.

11c.11: Kombinatorický důkaz: Kolik je binárních řetězců s m nulami a $n+1$ jedničkami? Buď vybereme nuly hned, nebo to rozdělíme na případy podle pozice poslední nuly. Pak se použije $\sum_{i=n}^{n+m}\binom{i}{i-n} = \sum_{i=0}^{m}\binom{n+i}{i}$. Nebo indukcí na m.

11c.12: $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{2\cdot 3\cdots k} \leq \ldots$

11d. Bonus: Generování výběrů

Mnohé kombinatorické situace se zkoumají výpisem možností, často pomocí počítače, ale i rukou na papíře. Pak je důležité umět je generovat nějak plánovitě, abychom některou možnost nevynechali ani nepočítali dvakrát. Jinými slovy, při tvoření situací (výběrů, pořadí) je potřebujeme umět uspořádat a pak jít od jedné k další a další. Osvědčuje se tu lexikografické zobrazení pro uspořádané k-tice čísel: $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \prec (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ právě tehdy, pokud pro nějaké $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$ platí $a_m < b_m$ a $a_i = b_i$ pro všechna $1 \leq i < m$ (viz řazení dle abecedy, podrobnosti v části 4b.17).

Dvojímu použití odpovídají i dva přístupy, o které se zde budeme pokoušet. Při použití počítače nám stačí znát algoritmus, který vysype všechny možnosti. To je většinou relativně snadné pomocí vnořených cyklů, případně podmínek. Vnořené cykly ale nejsou příliš pohodlné v situaci, kdy generujeme možnosti ručně. Proto se budeme zabývat také jiným problémem: Jak v situaci, kdy už máme vygenerovanou určitou možnost, dostaneme tu bezprostředně další v lexikografickém uspořádání. To bývá někdy dobrodružnější.

Většinou to není nic složitého a pro čtenáře může být zajímavé si každou situaci nejprve zkusit rozmyslet sám a pak to porovnat s předloženými myšlenkami.

11d.1 Generování všech binárních řetězců délky n.

Algoritmus pro výpis všech řetězců je snadný, ukážeme jej pro obecnější případ v části 11d.3. Teď se zaměříme na postupné generování.

Nejmenší n-bitové binární číslo v lexikografickém uspořádání je $00\ldots000$ a největší $11\ldots111$. Je-li dáno určité číslo, pak to další získáme velice snadno, binárním přičtením jedničky, například takto: 00000, 00001, 00010, 00011, 00100, ... , 11111. Získání dalšího řetězce je tedy velice jednoduché.

```
procedure NextBinChain(a: binary chain)
output: a + 1;
```

11d.2 Generování všech podmnožin konečné množiny.

Mějme množinu množinu $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Pak stačí vygenerovat všechny binární řetězce délky n a použít reprezentace podmnožin, tj. pro daný binární řetězec $b_1 \ldots b_n$ dostaneme podmnožinu $M = \{a_i;\ b_i = 1\}$.

11d.3 Generování všech výběrů k prvků z n různých objektů, kde na pořadí záleží a s opakováním.

Jinými slovy, jde o generování všech možných vektorů o k souřadnicích, kde se souřadnice berou z n-prvkové množiny. Pokud se prvky očíslují, jde vlastně o nezávislé výběry z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, na to je snadný algoritmus.

```
procedure AllSelections(n, k: integer)
for a_1 := 1 to n
  for a_2 := 1 to n
    for a_3 := 1 to n
            ⋮
        for a_k := 1 to n
              output: (a_1, a_2, ..., a_k);
```

Tento algoritmus se snadno upraví na případy, kdy má každá pozice svou vlastní horní mez n_i či dokonce i dolní mez m_i, takže lze třeba vybírat z množiny $\{0, 1\}$ neboli generovat binární řetězce.

Jak se budou dělat postupné výběry? Pokud vybíráme z množiny $\{0, 1, \dots, n-1\}$, pak stačí použít algoritmus z 11d.1, jen se berou čísla v soustavě o základu n. Například klasická dekadická reprezentace koresponduje výběru z deseti prvků.

Příklad 11d.a: Pokud budeme chtít vybírat ze tří předmětů, tak je zakódujeme 0, 1 a 2 a pomocí přičítání jedničky v trojkové soustavě budeme dostávat řetězce $00\dots000$, $00\dots001$, $00\dots002$, $00\dots010$, $00\dots011$, $00\dots012$, $00\dots020$, $00\dots021$ atd. až po $22\dots222$.
△

Jde vlastně o klasický princip tachometru. Přičítáme k poslední cifře, a pokud na ní dosáhneme maxima, tak se při dalším přičtení přidá jednička k předposlední pozici a ta poslední se vynuluje. Tam ale také může dojít k přetečení, v tom případě se vynuluje a přičte se jednička ještě ještě o pozici předtím a tak dále. Tento princip snadno upravíme i pro výběr z prvků $\{1, 1, \dots, n\}$, kde je nejmenším výběrem (z lexikografického pohledu) výběr $(1, 2, \dots, 1)$ a největší je $(n, n, \dots, n)$. Při přechodu od jednoho výběru k dalšímu bychom měli podle principu tachometru přičíst jedničku a pak hlídat překročení horní meze, ale postupné přičítání a přelévání je zbytečně pracné. Rozmyslete si, že vlastně stačí najít poslední složku, která není n, přičíst k ní jedničku a „vynulovat“ všechny složky, které jsou za ní.

Algoritmus pro nalezení bezprostředně dalšího výběru v lexikografickém uspořádání, máme-li $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ a všechny složky nejsou n:

```
procedure NextSelection(n: integer, (a_1, a_2, ..., a_k))
i := k;
while a_i = n do
    a_i := 1;
    i := i − 1;
a_i := a_i + 1;
output: (a_1, a_2, ..., a_k);
```

Příklad 11d.b: Vygenerujeme teď (prvním či druhým) algoritmem všechny výběry tří znaků z 0 a 1 neboli všechny třímístné binární řetězce. Vypíšeme je jako sloupce jeden vedle druhého zleva doprava a přidáme čárky, ke kterým se dostaneme v následující poznámce.

0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1

Vidíme, že opravdu jsou trojice generovány v lexikografickém pořadí.
△

Když se na výpis výše podíváme jako na celek, tak vidíme ještě jeden způsob, jak generovat, a to po jednotlivých složkách a v blocích. Nejprve vyplníme první místo, a to n^{k-1}-krát prvním znakem, n^{k-1}-krát druhým znakem atd. až n^{k-1}-krát n-tým znakem, vznikne tím n^k možností rozdělených do n bloků. V každém z těchto bloků pak vyplníme druhou pozici stejným způsobem, jmenovitě n^{k-2}-krát prvním znakem atd. až n^{k-2}-krát n-tým znakem, celkem tedy $n \cdot n^{k-2} = n^{k-1}$ možností, což je přesně velikost jednoho bloku. Původních n^k bloků se teď rozpadá na n^{k-2} bloků vyznačujících se tím, že v každém z nich jsou první dvě pozice stejné. Každý tento menší blok pak na třetí pozici vyplníme ještě menšími bloky o velikosti n^{k-3} atd. až na poslední pozici jen stále opakujeme výpis znaků. Takto se obvykle generují řádky pravdivostních tabulek v logice.

Poznámka: Jak se situace změní, když potřebujeme uspořádané výběry bez opakování? Není to snadné, protože na rozdíl od situací probíraných níže to nelze zařídit nějak snadno kombinatoricky, v zásadě se musí použít generování podobné této části, ale zabudovat do něj test proti opakování. To se dá dělat více či méně elegantně, ale to už je spíš problém pro algoritmizaci než kombinatoriku.

Jeden příklad se kombinatoricky udělat dá, když $n = k$, pak jde totiž o permutace, viz 11d.6.
△

11d.4 Generování všech výběrů k prvků z n různých objektů, kde na pořadí nezáleží a s opakováním.

Pro zjednodušení zase předpokládejme, že jde o objekty $\{1, 2, \dots, n\}$. Protože na pořadí nezáleží, můžeme si každý výběr seřadit podle velikosti. Jde tedy o generování všech uspořádaných k-tic $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ splňujících $1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k \le n$. Bude to podobné jako předchozí algoritmus, musí se ale modifikovat tak, aby výsledné k-tice byly neklesající.

```
procedure AllCombinations1 (k, n: integer)
for a_1 := 1 to n
  for a_2 := a_1 to n
    for a_3 := a_2 to n
          ⋮
      for a_k := a_{k-1} to n
            output: (a_1, a_2, ..., a_k);
```

Teď se podíváme na postupné generování. Je zjevné, že nejmenší (vzhledem k lexikografickému uspořádání) je zase $(1, 1, \dots, 1)$ a největší $(n, n, \dots, n)$. Naše restrikce na výběry se dá snadno zabudovat do algoritmu z části 11d.3. Stačí upravit proces „vynulování“ po zvýšení složky a_i o jedničku, teď hodnoty dalších pozic nevracíme k 1, ale k nejmenšímu možnému číslu (výsledná čísla nesmí klesat), tedy k nové hodnotě a_i.

Algoritmus pro vytvoření následujícího výběru v lexikografickém uspořádání, když už jeden výběr máme a předpokládáme, že není maximální, tj. $a_1 \le \cdots \le a_k$ a $a_1 < n$:

```
procedure NextCombination1 (n: integer, (a_1, a_2, ..., a_k))
i := k;
while a_i = n do
    i := i − 1;
a_i := a_i + 1;
for j := i + 1 to k
    a_j := a_i;
output: (a_1, a_2, ..., a_k);
```

Příklad 11d.c: Vybíráme tři znaky z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$: 111, 112, 113, 114, 122, 123, 124, 133, 134, 144, 222, 223, 224, 233, 234, 244, 333, 334, 344, 444.

Zkuste si je sami vygenerovat pomocí obou algoritmů, ať se přesvědčíte, že to funguje.
△

11d.5 Generování všech výběrů k prvků z n různých objektů, kde $k \le n$, na pořadí nezáleží a bez opakování.

Pro zjednodušení zase předpokládejme, že jde o objekty $\{1, 2, \dots, n\}$ a budeme je vždy řadit dle velikosti. Jde tedy o generování všech uspořádaných k-tic $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ splňujících $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_k \le n$. Bude to podobné jako předchozí algoritmus, musí se ale modifikovat tak, aby výsledné k-tice byly rostoucí. Dostáváme tím ale novou situaci. V přechozích dvou situacích jsme mohli hodnoty a_i volit bez omezení, teď to ale není možné. Pokud bychom například zvolili $a_1 = n$, muselo by být $a_2 > n$, což není možné.

Jakých hodnot tedu mohou jednotlivé souřadnice dosahovat? Máme-li a_i, pak musí platit $a_{i+1} \ge a_i + 1$, $a_{i+2} \ge a_{i+1} + 1 \ge a_i + 2$ atd., dojdeme k $a_k \ge a_i + (k - i)$, zároveň musí platit $a_k \le n$, proto máme obecné omezení $a_i \le n - k + i$.

```
procedure AllCombinations2 (k, n: integer)
for a_1 := 1 to n − k + 1
  for a_2 := a_1 + 1 to n − k + 2
    for a_3 := a_2 + 1 to n − k + 3
```

```
    ⋮
for a_k := a_{k-1} + 1 to n
        output: (a_1, a_2, ... , a_k);
```

Nyní se podíváme na postupné výběry. Nejmenší výběr je $(1, 2, \dots, k-1, k)$, při přechodu od jednoho k dalšímu budeme odzadu zvyšovat. Složka se dá zvýšit, pokud nedosáhla svého možného maxima (viz nerovnost výše), představme si tedy, že jsme složku a_i zvýšili o jedničku. Pak je třeba „vynulovat“ následující složky, v tomto případě postupně přidáváme jedničky k nové hodnotě a_i, abychom zajistili, že výsledný výběr roste, ale zároveň to udělali nejúspornějším možným způsobem.

Algoritmus pro vytvoření následujícího výběru v lexikografickém uspořádání, když máme výběr $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ splňující $a_1 < \cdots < a_k$ a předpokládáme, že není maximální, tedy $a_1 < n - k + 1$:

```
procedure NextCombination2(n: integer, (a_1, a_2, ... , a_k))
i := k;
while a_i = n - k + i do
    i := i - 1;
a_i := a_i + 1;
for j := i + 1 to k
    a_j := a_i + j - i;
output: (a_1, a_2, ... , a_k);
```

Příklad 11d.d: Vybíráme tři znaky z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$: 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345.
Zase si to zkuste oběma algoritmy.
△

11d.6 Generování všech permutací n různých objektů.

Zde se zaměříme na postupné generování. První krok je jasný, nejmenší permutace je $12 \dots n$. Jasné je také to, kde se má podle lexikografického uspořádání skončit: s permutací $n \dots 21$. Kritická otázka je tato: Máme-li permutaci $a_1 a_2 \dots a_n$, jak vyrobíme následující? Je to první netriviální otázka této sekce a čtenář se nemusí cítit špatně, pokud na to sám nepřijde. Tvrdíme, že to udělá následující postup.

1) Hledejme dvojici po sobě jdoucích čísel, která rostou, tj. $a_i < a_{i+1}$. Pokud taková neexistuje, tak již máme největší permutaci $n \dots 21$ a algoritmus skončil.
2) Pokud taková dvojice existuje, tak najdeme největší index s touto vlastností, pak $a_i < a_{i+1} > a_{i+2} > \cdots > a_n$. Pokud dáme na místo a_i něco většího a předchozí čísla zachováme, tak dostaneme větší permutaci. My ale chceme hned tu následující, budeme tedy zvyšovat co nejméně.

Určíme, která z čísel $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$ jsou větší než a_i (taková určitě jsou, třeba a_{i+1}), a mezi nimi najdeme nejmenší, nechť má index j. Při jeho hledání s úspěchem využijeme to, že po a_i už členy klesají, takže j je největší index takový, že $a_j > a_i$. Novou permutaci pak vyrobíme takto: členy $a_1 a_2 \dots a_{i-1}$ ponecháme, na i-té místo dáme a_j a zbývající čísla $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$ zařadíme tak, aby rostly, čili vlastně převrátíme jejich pořadí, a ještě tam na vhodné místo vsuneme a_i. Jinak řečeno, vyměníme mezi sebou čísla a_i a a_j a pak obrátíme pořadí čísel za i-tou pozicí.

Příklad 11d.e: Najdeme bezprostředního následníka k permutaci 68247531. Pak $i = 4$, protože 47 roste a od 7 dál už čísla klesají. Z čísel 7531 jsou čísla $7, 5$ větší než 4, nejmenší mezi nimi je 5, tedy $j = 6$. Toto tedy přijde na místo čtyřky, naopak čtyřka přijde místo něj a čísla 7431 budou seřazena dle velikosti neboli naopak. Dostaneme proto permutaci 68251347.

Proč je lexikograficky větší než původní permutace je jasné, prvních $i - 1$ míst je shodných a to i-té má nová permutace větší. Musíme ale ještě ukázat, že neexistuje nějaká permutace mezi nimi. Taková permutace by musela mít stejná první $i - 1$ místa, čili od i-tého místa dál by používala stejná čísla jako obě naše permutace (původní i nová). To, že by naše hypotetická permutace byla lexikograficky mezi původní a novou, znamená dvě možnosti. Jedna je, že z čísel, která jsou k dispozici, by se muselo dát vybrat něco mezi $a_i = 4$ a $a_j = 5$, ale takové číslo tam není, jinak bychom jej zvolili při hledání j. Nebo by musela ta jiná permutace mít také na i-tém místě a_j, ale na místě $i + 1$ něco menšího. To také nejde, protože jsme následnou část vyrobili jako rostoucí, tj. na místě $i + 1$ je nejmenší možné číslo, které je k dispozici. Našli jsme tedy opravdu bezprostředního následníka k dané permutaci.
△

Algoritmus pro vytvoření následující permutace v lexikografickém uspořádání, když máme permutaci $a_1 a_2 \dots a_k$, která není maximální, tedy existuje i takové, že $a_i < a_{i+1}$:

```
procedure NextPermutation(a_1 a_2 ... a_k)
i := n − 1;
while a_i > a_{i+i} do
    i := i − 1;
j := n;
while a_j < a_i do
    j := j − 1;
output: a_1 a_2 ... a_{i−1} a_j a_n a_{n−1} ... a_{j+1} a_i a_{j−1} a_{j−2} ... a_{i+1};
```

Příklad 11d.f: Vygenerujeme všechny permutace řetězce 1234 naším algoritmem.

1234: Poslední rostoucí dvojice je 34, tedy $i = 3$. Mezi následujícími čísly 4 vybereme nejmenší z těch, které trojku převyšují, to je čtyřka, a dáme ji místo trojky: 124. Zbývající čísla (trojku) pak přilepíme dozadu dle velikosti: 1243.

1243: Poslední rostoucí dvojice je 24, tedy $i = 2$. Mezi následujícími čísly 43 vybereme nejmenší z těch, které $a_2 = 2$ převyšují, to je trojka, a dáme ji místo dvojky: 13, dvojku dáme zase na místo trojky. Tato zbývající čísla 42 pak přilepíme dozadu dle velikosti: 1324.

Čtenář si jistě rád rozmyslí další postup a dostane 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

△

11d.7 Generování všech řešení rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ splňujících podmínky $x_i \in \mathbb{N}_0$ a $a_i \le x_i \le b_i$ pro všechna i, kde $a_i \le b_i$ jsou parametry splňující $\sum a_i \le n$ a $\sum b_i \ge n$.

Tyto dvě podmínky zaručí, že nějaká řešení budou existovat.

Když vypisujeme všechna řešení vnořenými cykly, tak budujeme vektory po jednotlivých souřadnicích. Představme si, že už jich i máme. Jaká jsou omezení pro volbu x_{i+1}? Nesmíme vybrat příliš málo, aby to další x_j stačily dorovnat do n v rámci svých omezení shora, tedy musí platit $\sum_{j=1}^{i+1} x_j + \sum_{j=i+2}^{k} b_j \ge n$, na druhou stranu nesmíme vybrat moc, protože bychom tím nutili další proměnné být menší než povolené dolní meze, tedy musí platit $\sum_{j=1}^{i+1} x_j + \sum_{j=i+2}^{k} a_j \le n$. Z těchto dvou nerovností získáme meze pro možné hodnoty x_{i+1} za předpokladu, že známe $x_1, \ldots, x_i$:

$$n - \sum_{j=i+2}^{k} b_j - \sum_{j=1}^{i} x_j \le x_{i+1} \le n - \sum_{j=i+2}^{k} a_j - \sum_{j=1}^{i} x_j.$$

Zároveň ovšem máme meze ze zadání, kterým také musíme vyhovět.

Pokud je ovšem $i + 1 = k$, tak žádná volba není a proces končí, musí být $x_k = n - \sum_{j=1}^{k-1} x_j$.

```
procedure AllSolutions1(k, n, a_j, b_j: integer)
mn := n − Σ_{j=2}^{k} b_j ; mx := n − Σ_{j=2}^{k} a_j ;
for x_1 := max(a_1, mn) to min(b_1, mx)
  mn := mn − x_1 + b_2 ; mx := mx − x_1 + a_2 ;
  for x_2 := max(a_2, mn) to min(b_2, mx)
    mn := mn − x_2 + b_3 ; mx := mx − x_2 + a_3 ;
          ⋮
      for x_{k−1} := max(a_{k−1}, mn) to min(b_{k−1}, mx)
          x_k := n − Σ_{j=1}^{k−1} x_j ;
          output: (x_1, x_2, ... , x_k);
```

teď se podíváme na komplikovanější úlohu postupného generování. Základní představa je, že máme n jednotek a ty budeme porůznu přelévat mezi jednotlivými proměnnými. Zhruba řečeno, čím více jedniček nalijeme co nejvíce doprava, tím menší výsledný vektor bude v lexikografickém uspořádání.

Jak vlastně vypadá minimální vektor $(x_1, \ldots, x_k)$ vzhledem k lexikografickému uspořádání? Musí existovat i takové, že pro $j < i$ platí $x_j = a_j$ a pro $j > i$ platí $x_j = b_j$. Proč? Pokud by byl nějaký jiný vektor $(y_1, \ldots, y_k)$ lexikograficky menší, pak by se případně shodoval na prvních několika souřadnicích s tímto $(x_1, \ldots, x_k)$ a pak je jedna souřadnice, řekněme y_m, která je menší. Evidentně to nemůže být jedna z těch, kde $x_j = a_j$, tam už jsme na minimu. To znamená, že je to buď souřadnice i nebo ještě některá za ní. Protože je celkový součet hodnot stále stejný, tak snížení na souřadnici m znamená, že se některá ze souřadnic y_j pro $j > m$ musel naopak oproti x_j

zvýšit, ale to je nemožné, protože souřadnice následující po x_i už jsou na svých maximálních hodnotách. Menší vektor tedy neexistuje.

Intuitivně tento minimální vektor vznikne tak, že nejprve z daných n jednotek odlijeme do všech souřadnic nutná minima, zbytek pak doléváme postupně odprava do plného. U souřadnice i skončíme. Podobně si rozmyslíme, že největší možný vektor získáme doplňováním odleva, tedy první souřadnice budou rovny b_j až po jistou $i-1$, od $i+1$ jsou zase všechny rovny a_j.

Teď si tedy představme, že máme určité řešení, tedy vektor $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, který není maximální. Větší řešení (v lexikografickém smyslu) vyrobíme tak, že trochu přelijeme doleva, ale snažíme se tuto změnu udělat co nejvíce napravo, abychom tak dostali bezprostředně následující vektor. Přilít se ovšem dá jen tam, kde x_j ještě nedosáhlo horní meze b_j, navíc pak ještě musíme zase někde ubrat, a to logicky napravo od místa, kde přiléváme, abychom si nezkazili začátek vektoru. Tam tedy začneme. Budeme prohlížet vektor odprava a hledat místo, kde se dá trochu ubrat, tedy místo, kde x_j ještě není a_j, a pak se podíváme dál doleva po místě, kde se dá přidat. Tak tam přidáme a pak musíme „vynulovat“ následující souřadnice, a to na nejmenší možné hodnoty podle podmínek odvozených na začátku této části.

Algoritmus pro vytvoření následujícího řešení v lexikografickém uspořádání, když máme řešení $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, která není maximální:

```
procedure NextSolution1 (k, n, a_j, b_j: integer, (x_1, x_2, ..., x_k))
i := k;
while x_i = a_i do
    i := i - 1;
repeat i := i - 1 until x_i < b_i ;
x_i := x_i + 1;
m := n - sum_{j=i+2}^{k} b_j - sum_{j=1}^{i} x_i;
if i < k - 1 then
  for j := i + 1 to k - 1
      x_j := max(m, a_j);
      m := m - x_j + b_{j+2};
x_k := n - sum_{j=1}^{k-1} x_i;
output: (x_1, x_2, ..., x_k);
```

11d.8 Generování všech řešení rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ splňujících podmínky $x_i \in \mathbb{N}_0$ a $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_k$, kde k je pevně zvoleno.

Zde nejsou individuální omezení na x_i, ale podobně jako v 11d.6 budou počáteční souřadnice omezeny tím, že ty po nich musí být alespoň stejně velké, přičemž součet nesmí růst. Co o nich tedy víme?

Prvních $k-1$ souřadnic může klidně začínat na nule (pokud je ty předchozí neomezí jinak), protože poslední souřadnice není shora omezená a tudíž vždy dosáhneme na součet n. Máme ale následující omezení shora: Tvrdíme, že nejvyšší možná hodnota pro x_1 je $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Kdyby totiž x_1 byl byť jen o jedno větší, tak už by ostatní x_j musely také splňovat $x_j \ge \lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1$ a jejich součet by převýšil n. Naopak pokud budou všechna x_j rovna $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$, pak je jejich součet nejvýše n a je tedy možné případně x_k doplnit do n a dostat tak řešení.

Podobným postupem odvodíme, že maximální řešení splňuje i $x_2 = \lfloor \frac{n-x_1}{k-1} \rfloor$, $x_3 = \lfloor \frac{n-x_1-x_2}{k-2} \rfloor$ atd. až nakonec $x_k = n - \sum_{j=1}^{k-1} x_j$.

```
procedure AllSolutions (k, n: integer)
for x_1 := 0 to ⌊n/k⌋
  for x_2 := x_1 to ⌊(n - x_1)/(k - 1)⌋
          ⋮
        for x_{k-1} := x_{k-2} to ⌊(n - x_1 - x_2 - ··· - x_{k-2})/2⌋
            x_k := n - sum_{j=1}^{k-1} x_j;
            output: (x_1, x_2, ..., x_k);
```

Nakonec se ještě podíváme na postupné generování. Zase rozléváme n jedniček, přičemž tentokráte hladiny při pohledu zleva doprava nesmí klesnout. Je jasné, jak vypadá lexikograficky nejmenší řešení: $(0, 0, \dots, 0, n)$. Největší

řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ vypadá trochu komplikovaněji, pokud použijeme horní meze z předchozí úvahy, ale naštěstí se dá rozmyslet, jak opravdu vypadá.

Snažíme se nalít co nejvíce doleva, aniž bychom ale zleva doprava klesali, takže je v zásadě jasné, jak to dopadne. V ideálním případě (pokud k dělí n) by všechny souřadnice byly stejné, jmenovitě $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$, ale v typickém případě jich takových bude jen několik prvních a zbývající budou $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1$.

Teď si ještě rozmyslíme, jak se od jednoho řešení dostat k dalšímu. Podobně jako v části 11d.7, budeme chtít trochu přelít zprava doleva. Abychom ale mohli někde přidat, budeme muset o něco víc doprava zase ubrat, a to lze jen tam, kde nemají dvě po sobě jdoucí proměnné stejnou hodnotu. Naše pátrání proto začneme hledáním prvního schodu zprava. Jeho vyšší hodnota se bude o jedničku zmenšovat, takže nikde předtím nebude dovoleno jít výš. Proto budeme moci přidávat jen tam, kde je současná hodnota ještě nižší, samozřejmě co nejvíce vpravo.

Algoritmus pro vytvoření následujícího řešení v lexikografickém uspořádání, když máme řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, která není maximální:

```
procedure NextSolution2(k, n: integer, (x_1, x_2, ..., x_k))
i := k − 1;
while x_i = x_{i+1} do
    i := i − 1;
m := a_{i+1} − 1;
while x_i = m do
    i := i − 1;
x_i := x_i + 1;
if i < k − 1 then
  for j := i + 1 to k − 1
      x_j := x_i;
x_k := n − Σ_{j=1}^{k−1} x_i;
output: (x_1, x_2, ..., x_k);
```