12. Grafy

Grafy jsou matematická struktura, která dokáže reprezentovat velké množství situací. Namátkou uveďme různá dopravní spojení, hierarchie v organizacích, ekonomické analýzy (která společnost vlastní čí akcie, nedávno mimochodem vědci odvodili zajímavý graf, který ukazuje, že se největší světové společnosti víceméně vlastní navzájem), analýzy výrobního procesu, zachycení běhu programu a další miliony aplikací.

V této kapitole si pojem grafu představíme. Nejprve si zavedeme základní terminologii a ukážeme, proč je nutné uvažovat více druhů grafů. Pak se postupně podíváme na několik úloh, které hrají v teorii grafů velkou roli. Nepůjdeme příliš do hloubky, tato kapitola je jen stručný úvod a čtenář, kterého to zaujme (či který to potřebuje), má k dispozici kvalitní literaturu.

Naši (většinou snadnou) práci ovšem zkomplikuje jedno zásadní dilemma. Již jsme v kapitolách narazili na to, že určité věci se dají dělat, nastavit či pojmenovat více způsoby a ne vždy se matematici shodnou na jednom. U teorie grafů je toto dovedeno hodně daleko, celá teorie se totiž dá vystavět dvěma populárními způsoby, každý z nich vede k velmi rozdílné základní terminologii.

Jeden přístup je méně abstraktní, možná trochu přímočařejší, díky čemuž je velice snadný pro začátečníka a mnohdy podává žádanou informaci přímo, bez komplikujících mezistupňů. Asi proto je velice oblíbený, zejména když dojde na základní učebnice či kursy běžné úrovně. Pokud se ovšem člověk chce posunout k zajímavějším situacím, tak za to zaplatí.

Druhý přístup je abstraktnější a velice elegantní, jedním šmahem zvládne všechny druhy grafů, od nejjednodušších po exotické, takže z pohledu matematika-teoretika je určitě vhodnější, ale jednoduché věci se v něm dělají možná zbytečně složitě.

Protože se čtenář může setkat s oběma přístupy, představíme zde v úvodních sekcích obě varianty, u jednotlivých aplikací pak mezi nimi budeme přeskakovat podle toho, co je zrovna pohodlnější, občas ukážeme v akci obě, snad to nebude totální zmatek. Pro čtenáře to je nicméně užitečné, protože to je dobrý trénink matematického vyjadřování.

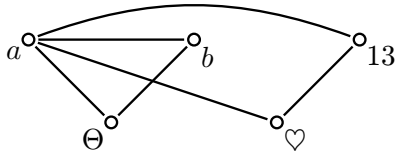
V této přehledové kapitolce se omezíme jen na konečné grafy, což je tradiční.

12a. Co jsou grafy (poprvé)

Ukážeme si typický příklad, jak od reálného problému dospět k matematické struktuře. Každý autoatlas má někde na začátku mapu ČR s vyznačenými hlavními silnicemi. Pokud jsme v situaci, kdy plánujeme, kudy se dostat z bodu A do bodu B, tak je nám většinou jedno, jakou krajinou projíždíme, tuto informaci je tedy z mapy možné vynechat. Také nás nezajímá, jak vlastně města vypadají, nahradíme je kolečky. V této fázi nás dokonce ani nezajímá přesný tvar silnic, takže lze města spojovat úsečkami. Dostaneme hromádku koleček pospojovanou porůznu úsečkami, což je obrázek, který také v mnohých autoatlasech bývá. Zároveň je to nejtypičtější představitel matematického grafu.

Jak bychom toto zachytili matematicky? Evidentně pracujeme s dvěma entitami, máme objekty (města) a vztahy mezi nimi (spojeno či nespojeno). Na zachycení objektů máme nástroj, jmenovitě množinu. Množina uvažovaných objektů tedy tvoří základ grafu, v teorii grafů jim říkáme „vrcholy“ či „uzly“. Vztahy pak zachytíme způsobem, který odkoukáme od relací. Založíme si množinu „hran“ (spojnice v atlase), tedy pokud jsou nějaká města přímo spojena, tak z nich uděláme dvouprvkovou množinu a schováme do té množiny hran. Tím je graf popsán.

Příklad 12a.a: Uvažujme následující obrázek.



Základem grafu jsou vrcholy $V = \{a, b, 13, \Theta, \heartsuit\}$.

Hrany jsou $E = \big\{\{a,b\},\{a,13\},\{a,\Theta\},\{a,\heartsuit\},\{b,\Theta\},\{13,\heartsuit\}\big\}$.

Spojením těchto dvou údajů dostáváme matematický popis grafu (V, E).

Všimněte si, že z tohoto matematického zápisu vůbec nelze odvodit, jak byl náš graf uspořádán na papíře. To je zcela v pořádku. V teorii grafů se (až na pár výjimek) vůbec nezabýváme „fyzikální“ podstatou situace, soustředíme se čistě na strukturu. Pokud si někdo uspořádá vrcholy na papír jinak, dostane po doplnění příslušných hran jiný obrázek, což nevadí, z hlediska teorie grafů je to totožný graf. Obrázky jsou jenom pomůckou pro přemýšlení o grafu, je na nás, jak si je nakreslíme.

△

! **Definice.**
Pod pojmem **graf** (**graph**) rozumíme libovolnou uspořádanou dvojici $G = (V, E)$, kde V je nějaká konečná množina a E je libovolná podmnožina množiny $\{A \subseteq V;\ |A| = 2\}$.
Prvkům $v \in V$ se říká **vrcholy** grafu G (**vertex**), prvkům $\{u, v\} \in E$ říkáme **hrany** grafu G (**edge**).

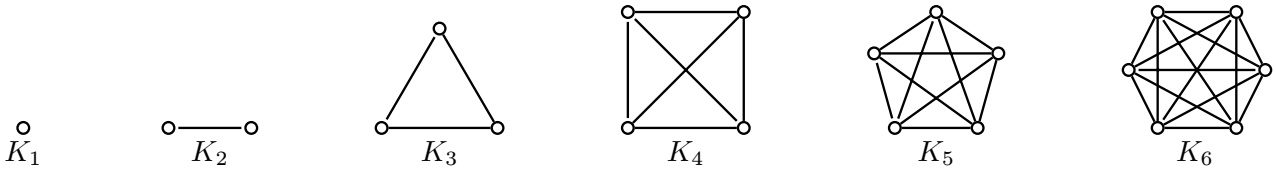
Výhodou tohoto způsobu zápisu je jeho přehlednost. U hran hned vidíme, odkud kam jdou, třeba hrana $\{c, f\}$ spojuje vrcholy c, f, odborně říkáme, že vrchol c či vrchol f je **incidentní** s touto hranou, vzniká tak vztah **incidence**.

Někteří autoři zavádějí značení $\binom{V}{2}$ pro množinu všech dvouprvkových podmnožin množiny V, ale není to moc rozšířené, tak se tomu zde vyhneme. My si z této množiny můžeme vybírat hrany libovolně, extrémy jsou zjevné. Jeden je, že se nevybere nic, pak je $E = \emptyset$, grafy bez hran jsou ovšem nudné.

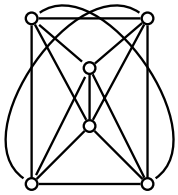
Zajímavější je druhý extrém, kdy jsou v E všechny dvouprvkové podmnožiny, tedy v grafu jsou všechny vrcholy propojeny. Víme, že v případě grafu o n vrcholech je pak počet hran roven $|E| = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$. Takové grafy mají své jméno.

Definice.
Graf $G = (V, E)$ se nazývá **úplný** (**complete**), jestliže $E = \big\{\{u, v\};\ u, v \in V \wedge u \neq v\big\}$.
Úplný graf o n vrcholech se značí K_n.

Úplné grafy se v teorii občas zajímavě objeví, čtenář si je asi umí představit, ale protože jsou pěkné, neodpustíme si pár obrázků.

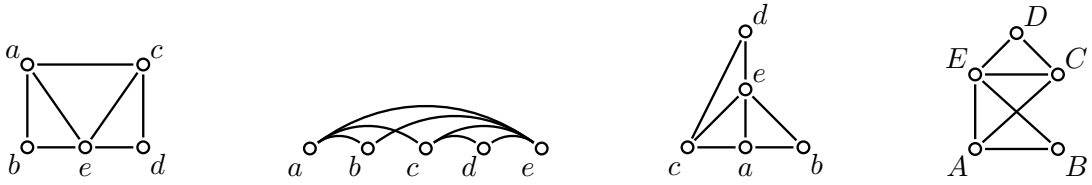


Už jsme zmínili, že jsme ty grafy mohli klidně nakreslit v jiném tvaru a bylo by to také dobře. Pokud se ale pro graf nabízí nějaké pěkně vypadající uspořádání, tak lidé obvykle neodolají. Abychom teď ukázali nezávislost ducha a odvahu nejít s davem, nabídneme ještě jinou podobu K_6 (ověřte na obrázku vpravo, že všech šest vrcholů je navzájem propojeno hranami). V kapitolce 12d se také objeví alternativní verze K_4.



Teď malá motivace.

Příklad 12a.b: Uvažujme následující grafy:



Čtenář si hravě rozmyslí, že když si tyto grafy zapíšeme matematicky, dostaneme v prvních třech případech vždy totéž: $\big(V = \{a, b, c, d, e\}, E = \big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\big\}\big)$. Jde tedy o tentýž graf, jen různě nakreslený.

Zajímavý je čtvrtý graf. Jeho matematický zápis je
$\big(V' = \{A, B, C, D, E\}, E' = \big\{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, E\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}\big\}\big)$.

Stačí změnit velká písmena na malá a dostáváme zase totéž jako u prvních třech grafů. Dá se proto čekat, že se tento nový graf bude vždy chovat stejně jak první graf. Je to tedy vůbec jiný graf? To je dobrá otázka, zejména když čtenáři prozradíme, že jsme původně jen nakreslili čtyři podoby stejného grafu a pak u jedné nechali editor přeměnit všechna písmenka na velká.

△

Podíváme se na to blíže. Pro zjednodušení budeme uvažovat trochu menší grafy, G_1 s vrcholy $\{a, b, c\}$ a hranou $\{a, b\}$, dále G_2 s vrcholy $\{1, 2, 3\}$ a hranou $\{2, 3\}$. Je zjevné, že oba grafy lze znázornit přesně stejným obrázkem (až na popisky u vrcholů), je to tedy z praktického hlediska tentýž graf. Proto je poněkud nemilé, že z matematického hlediska jsou to dva zcela rozdílné objekty, protože množiny $V_1 = \{a, b, c\}$ a $V_2 = \{1, 2, 3\}$ prostě nejsou stejné, to neobkecáme.

Pro situace, kdy máme dvě struktury, které jsou ve skutečnosti vlastně zcela stejné, jen se jinak tváří, se v matematice používá pojem „isomorfismus“. Jak vlastně poznáme, že jsou grafy G_1 a G_2 stejné? Uvidíme to, pokud dokážeme v grafu G_1 nahradit jména vrcholů tak, že po odpovídající změně u hran již dostáváme graf G_2. Evidentně to funguje i zpětně, je to symetrický vztah mezi grafy. U našich dvou grafů zabere například přejmenování $a \mapsto 2$, $b \mapsto 3$, $c \mapsto 1$, fungovalo by i přejmenování $a \mapsto 3$, $b \mapsto 2$, $c \mapsto 1$. Vidíme, že vlastně mluvíme o bijekci mezi vrcholy, u které je dále požadavek, aby správně přenesla i hrany.

Definice.
Nechť $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ jsou grafy. Řekneme, že jsou navzájem **isomorfní**, jestliže existuje bijekce $T\colon V_1 \mapsto V_2$ taková, že

$$\big\{\{T(u), T(v)\}; \{u, v\} \in E_1\big\} = E_2.$$

Takovémuto zobrazení (pokud existuje) říkáme **isomorfismus** grafů.

Neformálně v takovém případě říkáme, že graf G_2 je kopií grafu G_1, popřípadě naopak.

Je zřejmé, že pokud jsou dva grafy navzájem kopiemi, tak se také musí shodovat ve všech vlastnostech, je to v podstatě pořád jeden graf. S tímto porozuměním se pak věci občas dosti zjednoduší.

My už jsme na to ostatně narazili. Podle definice je každý graf o pěti vrcholech a 10 hranách nazvaný K_5. My si ale můžeme pro vrcholy vymyslet nekonečně mnoho různých značení, takže bráno formálně se spousta různých grafů jmenuje K_5. To vypadá na pěkný zmatek, ale teď už víme, že všechny tyto grafy jsou jen kopiemi třeba toho pěkného obrázku výše, takže je to vlastně jen jeden objekt a tomu jsme dali jméno. Praktický dopad celého zamyšlení je, že v následujícím textu si občas ušetříme formální komplikace.

Nyní si zavedeme několik základních pojmů. Důležitou věcí u grafů jsou počty různých věcí. Celkový počet vrcholů a hran vidíme hned z mohutnosti V a E, často se také hodí vědět, kolik hran je u zkoumaného vrcholu.

Definice.
Nechť $G = (V, E)$ je graf. Pro vrcholy $v \in V$ definujeme **stupeň vrcholu** (**degree**) jako

$$\deg(v) = \big|\big\{\{x, y\} \in E;\ x = v\big\}\big|.$$

Neformálně, stupeň vrcholu je počet hran, se kterými má dotyčný vrchol něco do činění. V podmínce množiny jsme mohli psát i $y = v$, v hraně coby množině na pořadí prvků nezáleží. Někteří autoři mají alternativní definici

$$\deg(v) = \big|\big\{y \in V;\ \{v, y\} \in E\big\}\big|,$$

která počítá vrcholy, do kterých se dá z v jedním krokem dojít, což je evidentně totéž jako naše definice.

Pokud má graf n vrcholů, pak pro všechny vrcholy určitě platí $\deg(v) \leq n - 1$. Snadno si rozmyslíme, že v úplném grafu K_n musí mít každý vrchol maximální možný stupeň $n - 1$, naopak podle toho se takový úplný graf pozná, jsou to právě grafy, kde všechny vrcholy splňují $\deg(v) = |V| - 1$.

Teď něco obecnějšího, ale stále snadného. Každá hrana přispěje dvěma vrcholům jedničkou ke stupni, takže dostáváme následující rovnost.

Fakt 12a.1.
Nechť $G = (V, E)$ je konečný graf. Pak $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.

Někdy se tomu také říká Princip sudosti, protože z toho vyplývá, že součet stupňů v grafu je sudý, z čehož dále ještě vyplývá, že počet vrcholů s lichým stupněm musí být sudý.

U většiny pojmů z této knihy se nám hodilo mít možnost přejít k menší části zkoumaného objektu (restrikce zobrazení, podrelace, podgrupa). Užitečné je to i u grafů.

Definice.
Nechť $G = (V, E)$ je graf. Dvojice $G' = (V', E')$ je **podgraf** (**subgraph**) grafu G, jestliže $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ a (V', E') je graf.

Poslední podmínka je zásadní, podgrafy dostaneme tak, že si z grafu vybereme nějaké vrcholy a hrany, ale musíme přitom dbát na to, abychom tak nestvořili nějakou příšerku, kde by třeba hrana trčela do nikam jako v případě, že vybereme vrcholy a, b a k nim omylem hranu $\{a, c\}$. Pro případ podgrafu není třeba chodit daleko,

pro $n \leq m$ je K_n podgrafem K_m. Každý graf je podgrafem sebe sama a prázdný graf $(\{\}, \{\})$ je podgrafem všech grafů.

Podgrafy často vznikají konkrétními postupy. Jeden je, že zjistíme, že nás na grafu vlastně nějaké vrcholy vůbec nezajímají, tak je vyřadíme a spolu s nimi přirozeně i ty hrany, které do vyřazených vrcholů šly, ostatní hrany zůstávají. Nahlíženo z opačného konce, z původního grafu si vybereme jen nějaké zajímavé vrcholy a spojíme je hranami všude, kde tomu tak bylo v původním grafu.

Definice.
Nechť $G = (V, E)$ je graf a $M \subseteq V$. Pak definujeme příslušný **podgraf indukovaný** množinou H (**induced subgraph**) grafu G jako dvojici $G' = (M, E')$, kde $E' = \big\{\{u, v\} \in E;\ u, v \in M\big\}$.

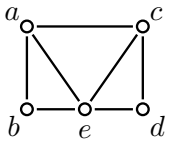
Aby byla definice korektní, tak je ještě třeba dokázat, že popsaným vzorcem opravdu vzniká graf, ale to je snadné, již z definice obsahuje E' pouze dvouprvkové podmnožiny M.

Podgrafy také často vznikají postupně zmenšováním původního grafu. Je zjevné, že odebráním hrany zase vznikne graf, ale pokud chceme odebrat vrchol, musíme spolu s ním odebrat všechny hrany, které jsou s ním spojeny, aby tak vznikl graf.

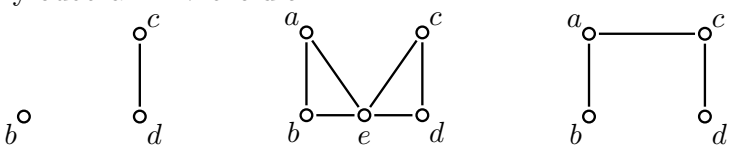
Definice.
Nechť $G = (V, E)$ je graf.
Řekneme, že graf $G' = (V', E')$ vznikl **odebráním hrany** $e = \{u, v\}$, jestliže $V' = V$ a $E' = E - \{e\}$.
Řekneme, že graf $G' = (V', E')$ vznikl **odebráním vrcholu** v, jestliže $V' = V - \{v\}$ a $E' = E - \big\{\{v, u\};\ u \in V\big\}$.

Není těžké si rozmyslet, že každý podgraf daného grafu lze z dotyčného grafu vyrobit postupným odebíranám vrcholů a hran, pojem podgrafu se tak dá definovat.

Příklad 12a.c: Připomeňme si graf $\big(\{a, b, c, d, e\}, \big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\big\}\big)$, v příkladě 12a.b jsme pro něj měli třeba toto znázornění:



Následující obrázky ukážou podgraf indukovaný množinou vrcholů $M = \{b, c, d\}$, podgraf vzniklý odebráním hrany $\{a, c\}$ a podgraf vzniklý odebráním vrcholu e.



△

Některé podgrafy jsou speciální.

Definice.
Nechť $G = (V, E)$ je graf. Řekneme, že je to **kružnice** (**circuit**), jestliže lze vrcholy označit jako $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ pro $n \geq 3$ tak, aby pak množina hran byla

$$E = \big\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-2}, v_{n-1}\}, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\big\}.$$

Je zřejmé, že v kružnici má každý vrchol stupeň 2, ale nefunguje to naopak. Pokud například sestavíme graf ze dvou disjunktních kružnic, tak v něm bude mít každý vrchol stupeň 2, ale jako celek to kružnice není. Můžeme říct, že graf je kružnicí, pokud je pro nějaké $N \in \mathbb{N}$ kopií grafu s vrcholy $V = \{1, 2, \ldots, N\}$ a hranami $\big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{N-1, N\}, \{N, 1\}\big\}$. V některých aplikacích hraje zásadní roli, zda se v grafu vyskytují nějaké kružnice coby podgrafy. Pokud ano, tak se takovému grafu říká **cyklický**.

Například K_3 je kružnice, ale K_4 kružnice není. Několik kružnic ale obsahuje, například svůj „obvod“, a tudíž jde o graf cyklický. Příkladem grafu, který cyklický není, může být třeba „činka“ K_2, blíže na to narazíme v kapitole 12f. Algoritmicky je hledání kružnic v grafu snadná úloha s lineární náročností vzhledem k počtu vrcholů.

Protože se kružnice zřídka používá jako samostatný graf, častěji ji hledáme jako podgraf uvnitř jiného, je mnohem přirozenější ji zavést jako speciální druh sledu, viz kapitola 12c.

Další populární sport je hledat, zda daný graf obsahuje nějaký úplný graf jako svůj podgraf. To je naopak úloha vysoce drsná, jde o NP-úplný problém. Na to narazíme pro změnu v kapitole 12d.

Probrali jsme základní pojmy, bylo to v celku snadné a je čas se zamyslet, jaké struktury vlastně představeným typem grafu dokážeme popsat.

Protože víme, že u množiny na pořadí prvků nezáleží, tak je hned jasné, že není možné u dotyčné hrany udělat jeden z konců nějak speciální, oba jsou rovnocenné. Jinými slovy, není možné pomocí naší definice na takové hraně vytvořit privilegovaný směr. Proto také tomuto typu grafů říkáme **neorientované grafy** (**undirected graph**).

Množiny nám také neumožňují skladovat více kopií téhož prvku, což z pohledu konkrétní hrany znamená, že nelze zopakovat tentýž vrchol, jinými slovy nelze v takovém grafu mít **smyčky** (loop) typu $\{u, u\}$. Z pohledu E to pak znamená, že mezi dvěma vrcholy může být nejvýše jedna hrana. Pracovali jsme tedy s grafy, které jsou neorientované a které nemohou mít smyčky a více spojnic mezi dvěma vrcholy. Když chceme zdůraznit, že pracujeme právě s takovýmto grafem, tak řekneme, že jde o **jednoduchý graf** (**simple graph**).

Pokud aplikace vyžaduje některý ze „zakázaných“ prvků, je nutné definici grafu modifikovat, což je někdy zjevné a někdy komplikovanější. Většina pojmů a poznatků se pak přenáší i na nové druhy grafů.

Pokud chceme zahrnout smyčky, pak je třeba v definici hran vyžadovat, aby se E skládalo z jedno- a dvou prvkových podmnožin množiny V. Výsledné struktuře říkáme **pseudograf**, je pak nutné upravit i další definice a při práci je nutné být pořád na pozoru, zda je právě zpracovávaná hrana jednoprvková nebo dvouprvková. Jsou to nudné komplikace a pseudografy se při zde představeném zápisu grafů moc nezkoumají.

Pokud chceme nějak zahrnout situaci, kdy mezi dvěma vrcholy vede více hran (což třeba v autoatlase opravdu nastává), pak je třeba definovat tzv. **multigraf** a jsou v zásadě dvě možnosti. Jeden přístup je namísto množin pracovat s pojmem „multimnožina“. To je jako množina, ale umožňuje vícenásobný opakovaný výskyt prvků. Lze pak v definici multigrafu říct, že E je multimnožina dvouprvkových podmnožin V. Teorie multimnožin nabízí nástroje na práci s multimnožinami, díky čemuž lze zase zavést pojmy jako stupeň vrcholu a podobně, ukáže se, že multigrafy fungují v zásadě stejně jako grafy jednoduché. Zajímavou alternativou je kódovat vícenásobné výskyty hran pomocí třetí souřadnice (index hrany), ale i to dá práci. S grafy s vícenásobnými hranami se mnohem lépe vypořádáme, pokud použijeme ten konkurenční přístup z příští podkapitoly.

Další dvě varianty jsou natolik významné, že si uděláme nadpis.

12a.2 Grafy orientované a ohodnocené

Naše povídání jsme začali autoatlasem a tam jsou jednosměrky. Obecně řečeno, v mnoha aplikacích potřebujeme u hran jejím koncům přiřadit priority, v jednom vrcholu hrana začíná, v druhém končí. To je vysoce užitečný typ grafu a příslušná definice je velmi snadná.

! **Definice.**
Pod pojmem **orientovaný graf** (**directed graph**) rozumíme libovolnou uspořádanou dvojici $G = (V, E)$, kde V je nějaká konečná množina a E je libovolná podmnožina $V \times V$.

Pojem orientovaného grafu je z mnoha pohledů flexibilnější, například nám rovnou umožňuje mít smyčky. Většina pojmů definovaných výše pro neorientované grafy má přirozené verze pro orientované grafy. Některé definice lze převést přímo (třeba pojem podgrafu), někde je třeba udělat modifikaci.

Definice.
Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný graf. Pro vrcholy $v \in V$ definujeme
výstupní stupeň (**outgoing degree**, **outdegree**) jako $\deg^+(v) = \big|\{(x, y) \in E;\ x = v\}\big|$,
vstupní stupeň (**incoming degree**, **outdegree**) jako $\deg^-(v) = \big|\{(x, y) \in E;\ y = v\}\big|$,
stupeň (**degree**) jako $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$.

I zde máme alternativní zápis $\deg^+(v) = \big|\{x \in V;\ (v, x) \in E\}\big|$ a $\deg^-(v) = \big|\{x \in V;\ (x, v) \in E\}\big|$. Pořád platí, že $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.

Při pohybu v orientovaném grafu je důležité, zda respektujeme orientaci hran či ne. Odráží se to i v terminologii, například lze v orientovaném grafu hledat kružnice, které jsou neorientované, nebo obdobný útvar, ale již s orientací:

Definice.
Orientovaný graf $G = (V, E)$ je **cyklus** (**cycle**), jestliže lze vrcholy označit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ pro $n \geq 2$ tak, aby pak

$$E = \big\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-2}, v_{n-1}), (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\big\}.$$

I u orientovaných grafů nás může zajímat otázka, zda je v daném grafu podgraf, který je cyklus, zkráceně řečeno zda graf obsahuje cykly, pak mu říkáme **cyklický**. Někdy se ovšem pohybujeme v grafu orientovaném a nehledíme přitom na orientaci hran, takže lze mluvit i o kružnici v orientovaném grafu.

V některých aplikacích pak orientovanost vlastně nepotřebujeme, v takovém případě se vyplácí „odmazat“ od hran orientaci a uvažovat takto vzniklý neorientovaný graf.

Definice.
Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný graf. Definujeme jeho **symetrizaci** jako neorientovaný graf $G' = (V, E')$, kde

$$E' = \big\{\{u, v\};\ [(u, v) \in E \vee (v, u) \in E] \wedge u \neq v\big\}.$$

Protože v neorientovaném grafu jsou povoleny jen hrany s rozdílnými konci, museli jsme to v definici ošetřit a smyčky vyloučit. To jsou právě ty komplikace, které s sebou přináší tento jednodušší přístup k teorii grafů.

Při plánování cest v autoatlase nás ale nezajímá jen odkud a kam cesty vedou, ale také jak dlouho nám jednotlivé úseky trvají. Každá hrana (cesta) má své „ohodnocení“ (délku či čas, podle naší preference) a tyto údaje jsou klíčové při naší analýze.

U některých úloh má naopak smysl přiřazovat hodnoty k vrcholům grafu, například pokud graf zachycuje počítačovou síť, je u jednotlivých uzlů velice podstatná jejich propustnost, při návrhu trasy pro náš balíček bitů určitě nemá smysl jej posílat skrz uzel, který je již zahlcen.

Definice.
Nechť $G = (V, E)$ je graf (neorientovaný i orientovaný). Řekneme, že je to **ohodnocený graf** (**weighted graph**), jestliže k němu existuje **ohodnocovací funkce** $w : E \mapsto \mathbb{R}$, popřípadě $w : V \mapsto \mathbb{R}$.

Někdy dokonce máme u grafu ohodnocovací funkce dvě, jednu pro hrany a jednu pro vrcholy. Ohodnocené grafy jsou další významnou skupinou grafů a řešíme na nich některé zásadní úlohy, viz 12c.

12a.3 Reprezentace grafů

Uvažujme graf, tedy množinu vrcholů a množinu hran, případně nějaká ohodnocení. Pro mnohé účely bývá výhodnější si takový graf reprezentovat jinak než jazykem množin z definice.

S jednou reprezentací jsme se již setkali, graf si můžeme nakreslit, k tomuto tématu se ještě vrátíme v části 12d. Je také možné grafy zadávat různě strukturovanými seznamy, například seznamem vrcholů a ke každému zadat seznam hran s ním incidentních. Další významnou možností je zachycení grafu (konečného) pomocí matice. Je několik oblíbených způsobů.

Uvažujme tedy graf $G = (V, E)$ o n vrcholech, můžeme předpokládat, že vrcholy jsou označeny $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ a hrany $E = \{e_1, \dots, e_m\}$.

• **Matice sousednosti** (**adjacency matrix**) je čtvercová 01-matice $n \times n$ definovaná předpisem $a_{ij} = 1$ jestliže $\{v_i, v_j\} \in E$, popřípadě (pro orientované grafy) jestliže $(v_i, v_j) \in E$, jinak $a_{ij} = 0$. Tradičně se tato matice grafu G značí A či A_G.

Je zjevné, že pro neorientované grafy dostáváme symetrickou matici. V takovém případě pro ušetření paměti někdy pracujeme jen s horní či dolní trojúhelníkovou maticí. Touto maticí snadno zachytíme i multigrafy, když definujeme a_{ij} jako počet hran spojujících v_i s v_j.

• **Laplaceova matice** je čtvercová matice $n \times n$ definovaná předpisem $a_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i), & i = j; \\ 1, & i \neq j \wedge \{v_i, v_j\} \in E; \\ 0, & i \neq j \wedge \{v_i, v_j\} \notin E, \end{cases}$

popřípadě (pro orientované grafy) $a_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i), & i = j; \\ 1, & i \neq j \wedge (v_i, v_j) \in E; \\ 0, & i \neq j \wedge (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$ Tradičně se značí L_G.

• **Matice incidence** je matice typu $n \times m$ definovaná předpisem $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \exists u \in V: \ e_j = \{u, v_i\} \in E; \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$

popřípadě (pro orientované grafy) $a_{ij} = \begin{cases} -1, & \exists u \in V: \ e_j = (v_i, u); \\ 1, & \exists u \in V: \ e_j = (u, v_i) \in E; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$

Slovy, když se podíváme na sloupec matice příslušný hraně e_j, tak vidíme jedničky v řádcích pro vrcholy, kde tato hrana začíná a končí (u neorientovaných grafů). U orientovaných grafů vidíme -1 u vrcholu, kde hrana začíná, a 1 u vrcholu, kde končí.

Matice incidence grafu G se tradičně značí I_G.

• **Matice délek** pro grafy s ohodnocenými hranami je čtvercová matice $n \times n$ definovaná předpisem

$a_{ij} = \begin{cases} w(\{v_i, v_j\}), & \{v_i, v_j\} \in E; \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$ popřípadě (pro orientované grafy) $a_{ij} = \begin{cases} w((v_i, v_j)), & (v_i, v_j) \in E; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$

Zajímavá modifikace je, když pro dvojice nespojené hranou dáme namísto nuly hodnotu $a_{ij} = \infty$. Tato volba totiž skvěle ladí s některými klíčovými algoritmy.

Každá z těchto matic má v určitých aplikacích výhody a v jiných nevýhody.

12b. Co jsou grafy podruhé

Zde se podíváme na druhý způsob, jak definovat grafy. Vychází v zásadě také z autoatlasní inspirace, významnější silnice totiž mívají svá jména. Je tedy možné si hrany pamatovat jako samostatné objekty, přičemž u každé ještě musíme mít někde schovánu informaci, s kterými vrcholy je incidentní.

! **Definice.**
Pod pojmem **neorientovaný graf** rozumíme libovolnou uspořádanou trojici $G = (V, E, \varepsilon)$, kde V je nějaká konečná množina (vrcholy), E je libovolná konečná množina disjunktní s V (hrany) a ε je libovolné zobrazení z E do množiny jedno- a dvouprvkových podmnožin V (vztah indicence).
Pod pojmem **orientovaný graf** rozumíme libovolnou uspořádanou trojici $G = (V, E, \varepsilon)$, kde V je nějaká konečná množina (vrcholy), E je libovolná konečná množina disjunktní s V (hrany) a ε je libovolné zobrazení $E \mapsto V \times V$ (vztah indicence).

Jak poznáme, že je nějaký vrchol v incidentní s jistou hranou $e \in E$? U grafu neorientovaného testujeme podmínku $v \in \varepsilon(e)$. U grafu orientovaného je to jemně složitější, tak se ptáme na pravdivost následujícího výroku:

Existuje $w \in V$ takové, že $\varepsilon(e) = (v, w)$ nebo $\varepsilon(e) = (w, v)$.

Potvrzuje se to, o čem jsme psali v úvodu, tento druhý způsob zavedení grafu dělá jednoduché věci složitěji než přístup první. Na druhou stranu jím lze bezproblémově zpracovat situace, které dělají prvnímu přístupu problémy. Například hned vidíme, že definice umožňuje smyčky a vícenásobná spojení mezi vrcholy. Pokud dvě hrany e_1, e_2 spojují stejné vrcholy, tedy $\varepsilon(e_1) = \varepsilon(e_2)$, pak řekneme, že tyto hrany jsou **paralelní**.

U orientovaných grafů si ulehčíme práci zavedením pomocných funkcí incidence, které nám umožní přímý přístup k počátečnímu a koncovému vrcholu hrany. Jestliže je ε zobrazení incidence z definice orientovaného grafu, pak definujeme zobrazení PV a KV z E do V takto:

• $PV(e) = v$ právě tehdy, když existuje $w \in V$ splňující $\varepsilon(e) = (v, w)$.
• $KV(e) = v$ právě tehdy, když existuje $w \in V$ splňující $\varepsilon(e) = (w, v)$.

Ukažme si, jak se definice z prvního přístupu přepíší do nového jazyka.

Definice.
Nechť $G = (V, E, \varepsilon)$ je neorientovaný graf. Pro vrcholy $v \in V$ definujeme stupeň vrcholu jako

$$\deg(v) = \big|\{e \in E; \ v \in e\}\big|.$$

Nechť $G = (V, E, \varepsilon)$ je orientovaný graf. Pro vrcholy $v \in V$ definujeme

$$\deg^+(v) = \big|\{e \in E; \ v = PV(e)\}\big|,$$
$$\deg^-(v) = \big|\{e \in E; \ v = KV(e)\}\big|.$$

Zde šlo o minimální úpravy.

Definice.
Nechť $G = (V, E, \varepsilon)$ je (orientovaný či neorientovaný) graf. Graf $G' = (V', E', \varepsilon')$ je podgraf grafu G, jestliže $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ a ε' je restrikce zobrazení ε na množinu E'.

Obvykle se pro restrikci zvláštní značení nezavádí, protože na E' dává stejné hodnoty jako původní zobrazení, i zde tedy budeme mluvit o podgrafu (G', E', ε).

Definice.
Nechť $G_1 = (V_1, E_1, \varepsilon_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2, \varepsilon_2)$ jsou grafy. Řekneme, že jsou navzájem **isomorfní**, jestliže existují bijekce T: $V_1 \mapsto V_2$ a t: $E_1 \mapsto E_2$ takové, že pro každou hranu $e \in E_1$ platí
• pro orientované grafy: $\varepsilon_2(t(e)) = (T(PV(e)), T(KV(e)))$;
• pro neorientované grafy: $\varepsilon_2(t(e)) = T[\varepsilon(e)]$.

Zde $T[M]$ je obraz množiny, tedy pro dvojici $\{u, v\}$ je $T[\{u, v\}] = \{T(u), T(v)\}$. Pojem isomorfismu se v nové, abstraktnější definici grafů zdá o něco méně průhledný.

Zkusme si v tom udělat trochu pořádek. Příznivci prvního přístupu říkají „graf“ a myslí tím to, co lze dotyčným přístupem udělat snadno, tedy graf bez smyček a bez paralelních hran. Případu s více hranami říkají „multigraf“.
Příznivci druhého přístupu říkají „graf“ a myslí tím onu obecnou definici výše, která umožňuje všechno. Pokud chtějí graf bez pralelních hran, řeknou „prostý graf“. Prostý graf bez smyček je pro ně „jednoduchý graf“.
Z toho je jasné, že pojem „graf“ samotný je ambivalentní a je třeba se vždy podívat, co tím dotyčný myslí. Dobrá zpráva je, že když řekneme „jednoduchý graf“ či „prostý graf“, tak nám budou rozumět oba tábory, rovněž pojem „multigraf“ je všeobecně srozumitelný, ale příznivci druhého přístupu jej nevidí rádi, protože jim přijde zbytečný.
My se teď podíváme na několik důležitých myšlenek z teorie grafů a budeme mezi těmito dvěma přístupy udatně kličkovat.

12c. Procházení grafem

Mnoho úloh se týká procházení grafem a potřebujeme pojmy, které nějakou konkrétní trasu po grafu zachytí. Začneme abstraktnějším zápisem dle 12a.

Definice.
Nechť $G = (V, E, e)$ je graf, uvažujme vrcholy $v_0, v_1, v_2, \dots, v_N \in V$ a hrany $(e_1, e_2, \dots, e_N)$.
1) Předpokládejme, že G je neorientovaný.
Řekneme, že posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_N, v_N)$ je **sled** (**walk** z v_0 do v_N, jestliže pro každé $i = 1, \dots, N$ platí, že $v_{i-1} \in e_i$ a $v_i \in e_i$.

2) Předpokládejme, že G je orientovaný.
Řekneme, že posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_N, v_N)$ je **sled** (**walk**) z v_0 do v_N, jestliže pro každé $i = 1, \dots, N$ platí, že $v_{i-1} = PV(e_i)$ a $v_i = KV(e_i)$.
Řekneme, že posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_N, v_N)$ je **neorientovaný sled** (**undirected walk**) z v_0 do v_N, jestliže pro každé $i = 1, \dots, N$ platí, že $v_{i-1} \in \{PV(e_i), KV(e_i)\}$ a $v_i \in \{PV(e_i), KV(e_i)\}$.

3) Řekneme, že sled $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_N)$ je **uzavřený** (**closed**), jestliže $v_0 = v_N$. Jinak řekneme, že je **otevřený** (**open**).

Číslo N udává **délku** (**length**) sledu.

Někteří autoři berou jako délku počet vrcholů, tedy $N + 1$. Není v tom shoda, my jsme zvolili variantu, která je rozšířená a pohodlná, například se dobře vypořádá s napojováním sledů.

Formálně je tedy sled posloupnost vrcholů, které jsme navštívili, mezi nimi pak informace o hranách, které jsme při přesunu použili. Ne vždy jsou sledy udávány přesně takto. Je například zjevné, že pokud jde o orientovaný graf, tak už je u každé hrany jasné, odkud kam vede, je tedy zbytečné vrcholy zadávat. Někteří autoři pak tedy používají jen zápis $(e_1, e_2, \dots, e_N)$. Toto bude často fungovat i u grafů neorientovaných, ale tam už je třeba být trochu opatrnější.

Naopak pokud se v grafu nevyskytují paralelní hrany (např. pokud je jednoduchý), pak je zase trasa jasná už ze zastávek, protože při přesunu není na výběr, kterou hranu použít. V takových situacích se sledy často udávají jen výčtem vrcholů $(v_0, v_1, \dots, v_N)$. Například v grafu z příkladu 12a.b máme sled (a, c, d, e), zatímco (a, b, c) sled není, protože nemáme hranu z b do c.

Poznamenejme ještě, že možnost chodit v orientovaném grafu neorientovanými sledy je v některých situacích velmi užitečná.

Pokud jsme v situaci, kdy pracujeme výhradně s jednoduchými grafy, tak se může vyplatit ten první přístup k teorii grafů. Zápis se pak poněkud zjednoduší a informace je lépe vidět. Ukážeme, jak by vypadala definice sledu.

! **Definice.**
Nechť $G = (V, E)$ je graf (neorientovaný či orientovaný). Uvažujme vrcholy $v_0, v_1, v_2, \dots, v_N \in V$.
Řekneme, že posloupnost $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_N)$ je sled, jestliže pro každé $i = 1, \dots, N$ platí, že $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$, popřípadě (pro orientované grafy) $(v_{i-1}, v_i) \in E$.

Bylo to tedy kratší a dobře se s tím pracuje, jenže v aplikacích o cestování se často setkáváme s paralelními hranami, což právě tento jednodušší přístup nezvládá moc dobře. V této kapitolce proto budeme preferovat spíš tu variantu abstraktnější, s pojmenovanými hranami. Jedna z věcí, kterou nám nabízí, je sled délky nula, což je (v), tomu říkáme triviální sled a bere se jako orientovaný i neorientovaný, ale nepovažuje se za uzavřený. Jeho existence občas zjednoduší úvahy a důkazy, mimo jiné to znamená, že pro každý vrchol v existuje sled z v do v.

Obvykle nás zajímají jen sledy speciální. Mnoho úloh z teorie grafů se zabývá hledáním efektivních řešení, tedy odstraňování zbytečného opakování. Pokud je například po sněhové kalamitě záhodno zprovoznit alespoň základní dopravní síť, tak by bylo pěkné naplánovat trasu pro sněžný pluh tak, aby nikdy nejel po téže trase dvakrát. Z pohledu sledu to znamená podmínku, že když $i \neq j$, tak $e_i \neq e_j$. Z praktických důvodů (a tradičně, viz definice prostého zobrazení) ji v definici vyjádříme obměnou této implikace.

Další ekonomický požadavek zase může být, abychom nenavštívili totéž místo dvakrát, například pokud máme rozvést zásilky. Podmínka se zdá jasná, zakážeme opakování vrcholů, ale naráží to na drobný problém, že bychom si tím zakázali návrat tam, odkud jsme vyrazili. Tím by se nový pojem stal vysoce nepraktický, proto definici poněkud zkomplikujeme tak, aby zakázala opakování v průběhu trasy, ale dovolila nám se vrátit na začátek.

! **Definice.**
Nechť $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_N, v_N)$ je sled v nějakém grafu $G = (V, E, e)$.
Řekneme, že je to **tah** (**trail**), jestliže se žádné hrany neopakují, tedy pro každé $i, j = 1, \dots, N$ platí, že když $e_i = e_j$, tak už $i = j$.
Řekneme, že je to **cesta** (**path**), jestliže je to tah a žádné vrcholy se neopakují, tedy pro každé $i, j = 0, \dots, N$ platí, že jestliže $v_i = v_j$, pak už nutně $i = j$ nebo $\{i, j\} = \{0, N\}$.

Zákaz opakování hran je stará známá věc, stejné pravidlo dodržujeme, když se snažíme nakreslit obrázek jedním tahem. U orientovaných grafů „tah“ znamená orientovaný tah, což znamená, že se nesmí opakovat tatáž konkrétní hrana, ale mezi dotyčnými vrcholy je možné jet znovu, pokud tam existuje hrana paralelní. Pokud cestujeme v orientovaném grafu neorientovaným sledem, pak pojem tahu funguje obdobně: Pokud nějakou hranou projedeme, pak ji máme zakázanou, i když jsme ji třeba projeli „opačným“ směrem, ale mezi dotyčnými dvěma vrcholy klidně mohou existovat další hrany, které jsou stále k dispozici (v libovolném směru). Obecná definice tahu toto správně vystihuje.

Pokud se čtenář trochu zamyslel nad definicí cesty, tak jej možná napadlo, jestli není ten požadavek o tahu zbytečný. Přece když nesmím opakovaně navštívit vrcholy, pak také nemůžu ani zopakovat hrany. Bohužel, u této úvahy existuje výjimka. Pokud se podíváme na neorientovaný graf K_2, třeba v inkarnaci $V = \{1, 2\}$ a $E = \{\{1, 2\}\}$, tak je možné udělat uzavřený sled $(1, 2, 1)$, který opravdu opakuje jen koncové vrcholy, takže technickou podmínku na cestu splňuje, a přesto opakuje hranu. Právě kvůli tomuto jedinému grafu jsme proto do definice cesty museli přidat podmínku, že jde i o tah, abychom dostali žádanou hierarchii sled–tah–cesta.

V anglické terminologii je docela zmatek. Uvedli jsme termíny, které blízce odpovídají našim, nicméně existuje ještě jiný způsob pojmenování, který je možná dokonce častější. Mnozí autoři mají path jako pojmenování obecné, tedy český sled, naší cestě pak říkají simple path a pro tah nemají dokonce vůbec žádný speciální pojem. A aby to bylo ještě zajímavější, když někteří autoři řeknou path, tak tím myslí uzavřenou cestu/sled. Je v tom guláš.

Cesty známe z plánování tras v autoatlase, nechceme nějakým městem projet dvakrát. Selský rozum říká, že pokud při plánování trasy nějaké město navštívíme podruhé, pak jsme jeli dokola a tuto smyčku navíc lze bez problémů vynechat. Řekneme si to matematicky.

Fakt 12c.1.
Nechť G je graf. Jestliže existuje sled z vrcholu u do vrcholu v, pak už také existuje cesta z vrcholu u do vrcholu v.

Díky tomu se často pracuje jen s cestami.

Sledy, tahy i cesty se dají napojovat, například máme-li sled z a do b a sled z b do c, pak také máme sled z a do c. Při spojování tahů a cest si ale musíme hlídat, zda nedojde k opakování.

Pokud si vrcholy sledu shromáždíme do množiny V' a použité hrany do množiny E', tak vlastně dostáváme podgraf $G' = (V', E')$. Máme pak k dispozici příslušné pojmy a nástroje. Mnohdy je naopak výhodnější namísto jazyka grafů použít jazyk sledů. Vrátíme se k jednomu pojmu z úvodu.

Definice.
Nechť G je (orientovaný či neorientovaný) graf.
Pojmem kružnice v G rozumíme libovolnou uzavřenou neorientovanou cestu v grafu G.
Je-li graf G neorientovaný a kružnice v něm existuje, nazývá se cyklický.
Je-li graf G orientovaný, pak pod pojmem cyklus rozumíme libovolnou uzavřenou (orientovanou) cestu v grafu G. Pokud taková existuje, graf se nazývá cyklický.

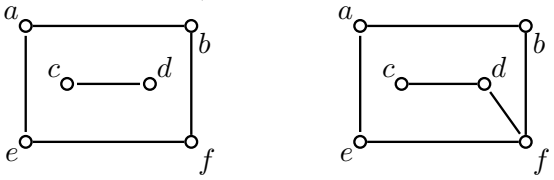
Cesty nám mimo jiné umožní testovat, jak je na tom daný graf s propojeností.

Definice.
Nechť $G = (V, E, \varepsilon)$ je neorientovaný graf. Řekneme, že je **souvislý** (**connected**), jestliže pro libovolné $u, v \in V$ existuje cesta z u do v.

Definice říká, že všechny vrcholy souvislého grafu jsou nějak navzájem propojeny, což naznačuje, že se graf neskládá z více nezávislých částí. Je tomu přesně tak, dokonce by to šlo použít jako definici.

Věta 12c.2.
Nechť $G = (V, E, \varepsilon)$ je neorientovaný graf. Tento graf není souvislý právě tehdy, když existují dva jeho podgrafy $G_1 = (V_1, E_1, \varepsilon)$ a $G_2 = (V_2, E_2, \varepsilon)$ takové, že $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V = V_1 \cup V_2$ a $E = E_1 \cup E_2$.

Příklad 12c.a: Uvažujme následující dva grafy (jednoduché, proto pak použijeme to snažší značení).



Graf nalevo není souvislý, protože nedokážeme najít cestu z a do c.

Funguje to i podle věty, dokážeme jej vytvořit pomocí dvou disjunktních podgrafů
$G_1 = \big(V_1 = \{a, b, e, f\}, E_1 = \big\{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, f\}, \{e, f\}\big\}\big)$ a $G_2 = \big(V_2 = \{c, d\}, E_2 = \big\{\{c, d\}\big\}\big)$.

Naopak graf napravo souvislý je, což se ověřuje obtížněji, protože musíme prověřit propojenost všech dvojic vrcholů (níže ukážeme, že se toto hledání dá zjednodušit). Z obrázku to nicméně vypadá naprosto jasně. Vychází to i podle věty, jakýkoliv pokus o sestavení ze dvou samostatných grafů selže. Zkusme třeba zvolit
$G_1 = \big(V_1 = \{a, b, e, f\}, E_1 = \big\{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, f\}, \{e, f\}\big\}\big)$ a $G_2 = \big(V_2 = \{c, d\}, E_2 = \big\{\{c, d\}, \big\}\big)$.
Pak sice dostáváme dva podgrafy, ale není splněna podmínka $E = E_1 \cup E_2$, protože hrana $\{d, f\}$ není v ani jednom z podgrafů. Když si tu hranu zkusíme k jednomu z nich přidat, třeba k prvnímu, tak to také nepůjde, protože vzniklý útvar není graf (pak E_1 obsahuje $\{d, f\}$, což není podmnožinou V_1).
△

Když máme graf, který souvislý není, tak jej vždycky dokážeme poskládat z částí, které už souvislé jsou. Tyto části mají speciální název.

Definice.
Nechť $G = (V, E, \varepsilon)$ je neorientovaný graf. Řekneme, že podgraf $G' = (V', E', \varepsilon)$ je **komponenta souvislosti** (**component**) grafu G, jestliže je G' souvislý graf a je to maximální souvislý podgraf.

Obvykle říkáme jen „komponenta“. Maximalita znamená, že pokud k G' přidáme další hrany a vrcholy z G tak, aby zase vznikl podgraf, tak už nemůže být souvislý.

Když jsme u příkladu výše sestavili graf nalevo z podgrafů G_1 a G_2, tak jsme shodou okolností také našli komponenty.

Uvažujme neorientovaný graf. Snadno si rozmyslíme, cesta z u do v zároveň po přerovnání pořadí dává cestu z v do u, jde tedy o symetrickou situaci. Pokud máme cestu z u do v a cestu z v do w, pak napojením vznikne obecně jen sled, ale vynecháním kružnic dostaneme cestu z u do w, spojení cestou je tedy i tranzitivní. Reflexivita je dána díky té cestě o délce 0, takže vlastnost „být propojen cestou“ je relace ekvivalence na vrcholech grafu. Komponenty jsou samozřejmě právě třídy ekvivalence této relace.

Jeden praktický důsledek je, že souvislost pak můžeme trochu jednodušeji testovat takto:

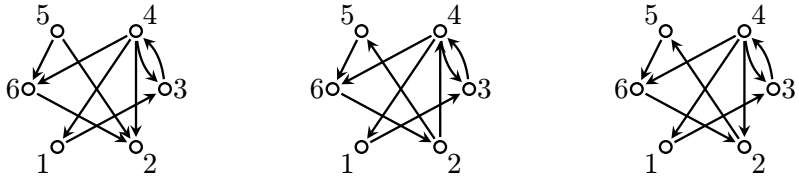
Fakt 12c.3.
Uvažujme neorientovaný graf $G = (V, E, \varepsilon)$, zvolme si nějaký vrchol $v \in V$.
G je souvislý právě tehdy, když pro každé $u \in V$ existuje cesta z v do u.

Jak upravíme pojem souvislosti pro orientované grafy? Nabízejí dvě různé cesty, a protože se ani jeden ze způsobů neukázal obecně lepším, vznikly dva různé pojmy.

Definice.
Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný graf.
Řekneme, že G je **souvislý** (někdy také **slabě souvislý**), jestliže pro každé dva vrcholy $u, v \in V$ existuje neorientovaná cesta z u do v.
Řekneme, že G je **silně souvislý**, jestliže pro každé dva vrcholy $u, v \in V$ existuje (orientovaná) cesta z u do v.

Druhá definice vypadá velice přirozeně, vždyť jsme jen přepsali definici od neorientovaných grafů, ale pro některé účely je zbytečně náročná a tedy i zbytečně pracná. Stojí za zamyšlení, že definice souvislosti se dá také říct jinak: Orientovaný graf je (slabě) souvislý, jestliže je souvislá jeho symetrizace.

Příklad 12c.b: Uvažujme následující orientované grafy:



Jak je tomu s jejich souvislostí?

Pokud u hran ignorujeme orientaci (tedy provedeme symetrizaci), tak u všech tří dostáváme shodou okolností totéž a snadno si rozmyslíme, že jde o souvislý graf. Dané tři grafy jsou proto všechny slabě souvislé.

Jak to vypadá se silnou souvislostí?

Levý graf není slabě souvislý, protože nedokážeme vytvořit cestu z nějakého vrcholu do vrcholu 5, má vstupní stupeň $\deg^-(5) = 0$. Neexistuje tedy například cesta z 4 do 5 a proto není graf silně souvislý.

Lze také argumentovat, že nelze vytvořit cestu začínající ve vrcholu 2, protože $\deg^+(2) = 0$.

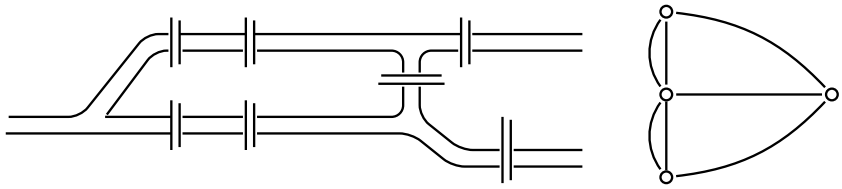
U dalších dvou grafů mají všechny vrcholy nenulové vstupní i výstupní stupně, takže tak snadné to nebude a je třeba trpělivě zkoušet. Nakonec se ukáže, že graf uprostřed silně souvislý je, ale ten napravo není, protože například nelze najít cestu z 5 do 4.

△

Se sledy je svázáno množství úloh, uvedeme si nejznámější. Začneme tam, kde se narodila teorie grafů.

Příklad 12c.c: Bylo jednou v Prusku město Königsberg (neboli Královec na počest Přemysla Otakara II, který financoval výstavbu první tamní pevnosti) a v něm pracoval jistý Leonhard Euler.

Díky zajímavě se chovající řece se město Kaliningrad (to je taky ono) rozpadalo na čtyři oddělené části pospojované porůznu sedmi mosty a Eulera jednou (v roce 1736) přepadla otázka, zda je možné udělat si procházku tak, aby prošel všechny mosty, ale každým jen jednou, a skončil tam, odkud vyšel. Podíval se na mapu a napadlo ho, že tvary částí jsou nepodstatné, tak si místo nich nakreslil kroužky a mezi ně spojnice jako mosty.



Dostal tak graf (podle prvního přístupu multigraf, tady vidíme, že hned u historicky první úlohy o cestování se lépe hodí ta druhá, abstraktnější definice) a v něm chtěl najít uzavřený tah, který by prošel všemi hranami, ale ty pojmy ještě tenkrát neexistovaly, tak si je vymyslel. Chvíli nad situací spekuloval a brzy zjistil, že jeho vysněná procházka je nemožná. Všiml si také, že by to nedokázal, dokonce i kdyby se vzdal myšlenky, že skončí tam, kde začal.

Protože byl matematik, napadlo jej, zda neexistuje obecná metoda, jak v daném grafu takovouto otázku zodpovědět. A protože byl geniální matematik, tak ji také našel. Založil tím nový podobor teorie grafů.
△

Definice.
Nechť $G = (V, E, \varepsilon)$ je graf (neorientovaný či orientovaný).
Řekneme, že sled $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_N, v_N)$ je **eulerovský tah** (**Eulerian trail/walk**), jestliže je to tah a $\{e_1, e_2, \dots, e_N\} = E$.
Graf G se nazývá **eulerovský** (**Eulerian graph**), pokud v něm existuje uzavřený eulerovský tah.

Připomeňme, že tah v orientovaném grafu znamená orientovaný tah.

My známe eulerovské tahy již z dětství, protože nejde o nic jiného než o profláklý problém, jak ten či onen obrázek nakreslit jedním tahem. Pěticípou hvězdu zmákneme levou zadní (leváci pravou zadní), také známý domeček nakreslit umíme, ale skončíme jinde, než jsme začali, a domeček s komínem už nezvládneme. Schválně jestli to teorie správně pozná.

Je jasné, že nesouvislé grafy jedním tahem nakreslit nelze, takže se rovnou soustředíme na souvislé a mezi nimi chceme umět rozhodnout. Euler odvodil následující:

Věta 12c.4.
Nechť G je neorientovaný souvislý graf.
(i) G je eulerovský právě tehdy, pokud v něm mají všechny vrcholy sudý stupeň.
(ii) V grafu existuje otevřený eulerovský tah právě tehdy, když v grafu existují právě dva vrcholy s lichými stupni.

Důkaz naznačíme, nejprve ten lehký směr. Uzavřený eulerovský tah musí do každého vrcholu vjet a pak zase vyjet, čímž se stupeň tohoto vrcholu zvýší o dva. Vrchol může takto být projet vícekrát, čímž vznikají sudé stupně. Pokud je to tah otevřený, pak jsou výjimkou vrcholy, kde tento tah začíná a končí, tam vznikají liché stupně.

Těžší je dokázat, že správné parity stupňů již stačí k vytvoření žádaného tahu. Důkaz se nejčastěji dělá popisem konstrukce takového tahu, naznačíme hlavní myšlenku.

Nejprve si rozmyslíme, že pokud má v grafu nějaký vrchol stupeň nula, pak z něj nevedou hrany. Jestliže je takový graf zároveň souvislý, pak už je to nutně jednobodový graf a ten je eulerovský, prázdný sled je hledaným tahem. Pokud tedy pracujeme se souvislým grafem s více vrcholy, tak už má každý vrchol stupeň alespoň jedna.

Mějme teď souvislý graf s více vrcholy a sudými stupni. Zvolme libovolný vrchol v_0, ten má určitě nenulový stupeň a tudíž z něj vede hrana. Vytvoříme netriviální uzavřený tah, jehož součástí v_0 bude.

Vyberme libovolnou hranu vedoucí z v_0, její cílový vrchol označme v_1, pak tuto hranu odebereme z grafu, čímž zároveň klesnou stupně v_0 a v_1 o jedno a jsou liché. Stupeň v_1 byl sudý, tudíž stále není nula, vede z něj proto nějaká jiná hrana, vydáme se po ní do dalšího vrcholu, hranu odebereme a snížíme stupně. Pokud je tím cílem v_0, našli jsme uzavřený tah, zároveň se stupeň v_0 vrátil na sudou hodnotu.

Pokud to není v_0, tak jej nazveme v_2, po snížení stupňů má v_1 zpět sudou hodnotu stupně a lichou teď mají v_0 a v_2. Kdyby měl náhodou vrchol v_1 teď stupeň nula, tak jej z grafu odebereme také. Takto postupujeme dále, v každém kroku odebereme hranu a případné vrcholy se stupněm spadlým na nulu a budujeme tah z vrcholu v_0 do v_k, přičemž jedině tyto dva vrcholy mají aktuálně (v redukovaném grafu) snížené stupně liché, ostatní vrcholy mají stupně sudé. Klíčem zde je, že pokud nějaký krok vede do vrcholu s aktuálně sudým stupněm, tak z něj zase povede cesta ven, takže jediný způsob, jak tento postup ukončit, je trefit se zase do v_0. A ukončit musíme, protože v každém kroku umažeme z grafu hranu a těch je jen konečně mnoho.

Proces se tedy ukončí a vznikne uzavřený tah z v_0 do v_0. Pokud po tomto odmazávání hran a vrcholů už v grafu žádná nezbyla, pak jsme našli kýžený euklidovský tah a máme hotovo.

Uvažujme druhou možnost, a to že v grafu ještě nějaké hrany zbyly. Musely proto také zbýt nějaké vrcholy s nenulovými stupni a tyto stupně jsou sudé, protože naše vytvářecí procedura měla liché stupně vždy jen na začátku a konce budovaného tahu, při uzavření jsme se pak vrátili do v_0, čímž vznikl sudý stupeň. Dále tvrdíme, že dokonce některý z vrcholů našeho tahu je mezi těmi, kterým ještě zbyl nenulový stupeň.

Vezměme tedy tento vrchol w_0 a přesně jako předtím z něj začneme a nakonec v něm dokončíme netriviální tah. Tento tah „vlepíme“ do našeho původního, formálně to je delší, tak to řekneme neformálně: Nejprve jedeme původním tahem z v_0 do w_0, pak projedeme tu novou trasu a nakonec dokončíme původní tah do v_0. Dostali jsme tedy tah nový, který dále zmenšil počet hran v grafu. Pokud už nic nezbylo, jsme hotovi, pokud ještě něco zbylo, pak to zase musí zahrnovat některý z vrcholů našeho rozrůstajícího se tahu, takže tento proces opakujeme. Protože graf měl konečně mnoho hran, musíme dřív či později zahrnout do tahu všechny a máme euklidovský tah.

Případ s dvěma vrcholy lichého stupně se hravě převede na původní, buď se mezi tyto dva vrcholy vloží extra hrana, začne se s ní hledání tahu a na konci se zase odebere, a v případě, že ty vrcholy už spojeny byly, se ta hrana zase odebere a zpětně doplní (musí se opatrněji rozebrat případ, že by tím odebráním vznikly dva souvislé podgrafy, ale s pomocí obrázku to jde lehce).

△

Důkaz této věty nám dává algoritmus pro hledání eulerovského tahu, ale dá se vylepšit, dokážeme eulerovský tah najít vždy rovnou, bez nějakého vlepování.

0. Zvolte si libovolný vrchol s lichým stupněm, pokud takový není, tak libovolný vrchol. To je vrchol v_0 hledaného tahu.

1. Jsme ve vrcholu v_k. Pro každou hranu z tohoto vrcholu vedoucí uvažujme následující krok:

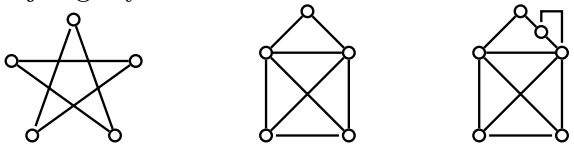
K: Hranu odebereme z grafu, tím se zároveň sníží o jedničku stupeň vrcholu v_k a cílového vrcholu. Pokud $\deg(v_k) = 0$, tak z grafu odebereme i tento vrchol, podobně odebereme cílový vrchol, pokud mu stupeň klesne na nulu.

Z hran vedoucích z v_k si pak vybereme takovou, u které provedení dotyčného kroku K nezpůsobí rozpad grafu na více komponent. Krok provedeme, cílový vrchol označíme v_{k+1}. Pokud byl i tento vrchol odebrán, algoritmus skončil, jinak se vracíme na krok 1.

Je jasné, že klíčový je právě ten výběr hrany. Musíme zaručit, že alespoň jedna z hran vedoucích z v_k po odebrání (a případném odebrání vrcholu) zase vede na souvislý graf. Není na to třeba žádná velká teorie, stačí trocha přemýšlení a hodně kombinatoriky, ale je to delší, odkážeme na nějakou pěknou knížku z teorie grafů.

Pak je ještě třeba ukázat, že po doběhnutí algoritmu se opravdu prošla každá hrana právě jednou. To je ale snadné. Každá použitá hrana se z grafu odebere, není tedy možné ji recyklovat a vznikající procházka je opravdu tah. Pokud by v grafu zbyla nějaká neprojitá hrana, tak by sousední vrcholy měly nenulové stupně, tedy algoritmus by neskončil.

Příklad 12c.d: Uvažujme následující grafy.



V pěticípé hvězdě má každý vrchol stupeň 2, tudíž ji lze nakreslit jedním (uzavřeným) tahem a je to eulerovský graf. Všimněte si, že když k ní ještě přidáme pentagram, tak vlastně dostáváme K_5, kde jsou zase všechny stupně sudé a bez problémů kreslíme.

U domečku máme (bráno od střechy) jeden vrchol se stupněm 2, dva vrcholy se stupněm 4 a dva vrcholy se stupněm 3. Nakreslit jedním tahem tedy půjde, ale skončíme jinde, než jsme začali. Věta 12c.4 také napoví, že začít musíme v jednom z těch lichých vrcholů a skončíme v tom druhém.

Po přidělání komínu přibudou další dva vrcholy s lichým stupněm a jedním tahem už to nakreslit nepůjde.

△

Situace v orientovaném grafu je obdobná. Můžeme si to představit tak, že některé mosty jsou jednosměrné, a podmínka z definice tahu říká, že když je nějaký most obousměrný a my po něm jednou přejdeme, tak už podruhé nechceme ani v opačném směru.

Věta 12c.5.
Souvislý orientovaný graf $G = (V, E, \varepsilon)$ je eulerovský právě tehdy, jestliže pro každé $v \in V$ platí $\deg^+(v) = \deg^-(v)$.

U neuzavřených Eulerovských tahů je rovněž myšlenka podobná neorientované verzi, se zjevnou modifikací: Existence eulerovského tahu pozná podle toho, že jeden vrchol má vstupní stupeň o jedničku větší než výstupní, další vrchol to má naopak a ostatní mají oba stupně stejné.

Na závěr se vrátíme za Eulerem so Koenigsbergu. Tam vidíme, že všechny čtyři vrcholy mají lichý stupeň, tudíž je Eulerova procházka neuskutečnitelná.

Příklad 12c.e: Další zajímavý problém má historický název **problém obchodního cestujícího** (travelling salesman problem) a začneme jeho jednodušší verzí. Obchoďák má před sebou mapu měst, která potřebuje navštívit, ta jsou různě pospojovaná cestami (což mohou být silnice nebo třeba letecké spoje). Obchodní cestující chce navštívit všechna místa, ale žádné dvakrát (už tam lidem prodal, co šlo), a samozřejmě se chce vrátit, hledá tedy uzavřenou cestu. V situaci, kdy by byla propojena všechna města navzájem, to samozřejmě není problém, ale čím řidší síť, tím náročnější je to na naplánování. Pokud by cestoval živelně, pak se mu může stát, že se najednou ocitne ve městě, ze kterého vedou cesty jen tam, kde už byl.

Lze takovou cestu naplánovat vždy? A pokud to někdy lze, je na nalezení správné cesty metoda? Samozřejmě jsou to otázky pro teorii grafů.

△

Definice.
Nechť $G = (V, E, \varepsilon)$ je graf (neorientovaný či orientovaný).
Hamiltonovská kružnice (**Hamiltonian cycle**) v tomto grafu je libovolná kružnice, která obsahuje právě jednou každý vrchol tohoto grafu.
Pokud v tomto grafu hamiltonovská kružnice existuje, pak řekneme, že je to **hamiltonovský graf**.

Jinak řečeno, hamiltonovská kružnice je uzavřená cesta, která projde všechny vrcholy grafu. Je zřejmé, že nás mezi dvěma městy zajímá vždy nejvýše jeden spoj, u této úlohy tedy stačí umět pracovat s jednoduchými grafy. Tradičně se pracuje s neorientovanými grafy.

Problematika hamiltonovskosti je výrazně odlišná od euklidovských otázek. Není totiž známa žádná jednoduchá ekvivalentní podmínka, která by nám umožnila rozhodnout, který graf je hamiltonovský. Navíc není znám algoritmus, který by pro hamiltonovské grafy dokázal rychle najít hamiltonovské kružnice. Již z podstaty jsou zjevné dvě nutné podmínky.

Věta 12c.6.
Nechť $G = (V, E, \varepsilon)$ je konečný neorientovaný graf. Jestliže je hamiltonovský, tak musí být souvislý a pro každý vrchol $v \in V$ musí platit $\deg(v) \geq 2$.

Druhá podmínka plyne z toho, že cestující musí do města někudy přijet a pak zase odjet, přičemž se při odjezdu nemůže vrátit, odkud přijel.

Existují také užitečné postačující podmínky, všechny nějakým způsobem nutí graf mít hodně hran. Ukážeme čtyři nejpopulárnější, nejsou zcela nezávislé, některé jsou jen speciálními případy jiných.

Věta 12c.7.
Nechť $G = (V, E)$ je konečný souvislý (neorientovaný) graf takový, že $|V| \geq 3$.
Tento graf je hamiltonovský, jestliže je splněna některá z následujících podmínek:
(i) Pro všechny vrcholy $v \in V$ je $\deg(v) \geq \frac{1}{2}|V|$; (Diracova podmínka)
(ii) Pro všechny vrcholy $u, v \in V$ platí, že $\{u, v\} \in E$ nebo $\deg(u) + \deg(v) \geq |V|$; (Oreho podmínka)
(iii) Předpokládejme, že vrcholy jsou očíslovány $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tak, aby $\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \cdots \leq \deg(v_n)$. Pak pro všechna $i < \frac{1}{2}n$ platí $\deg(v_i) \geq i + 1$ nebo $\deg(v_{n-i}) \geq n - i$; (Chvátalova podmínka)
(iv) Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k < \frac{1}{2}|V|$ platí, že $\big|\{v \in V;\ \deg(v) \leq k\}\big| < k$. (Posova podmínka)

Chvátalova podmínka se dívá na dvojice vrcholů v_1, v_{n-1}, v_2, v_{n-2}, v_3, v_{n-3} atd. a pro každou takovou dvojici v_i, v_j vyžaduje, aby platilo $\deg(v_i) \geq i + 1$ nebo $\deg(v_j) \geq j$.

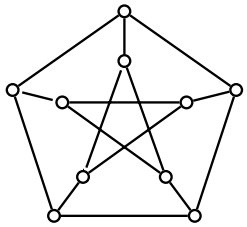
Pro příklad, že ve všech podmínkách opravdu jde jen o implikace (tedy podmínky nejsou nutné) není třeba chodit daleko. Vezměme kružnici o pěti vrcholech, tedy graf

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ E = \big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 1\}\big\}.$$

Pak všechny vrcholy splňují $\deg(v) = 2 < \frac{1}{2}|V|$, všechny dvojice vrcholů mají $\deg(u) + \deg(v) = 4 < |V|$ a volba $k = 2$ ukazuje, že ani Posova podmínka není splněna, Chvátal také ne, přesto je to evidentně hamiltonovský graf, obchodní cestující prostě kružnici objede dokola.

Příklad 12c.f: Snadno se rozmyslí, že každý úplný graf K_n pro $n \geq 3$ je hamiltonovský, stačí projet cestu $(1, 2, 3, \ldots, n, 1)$.

Na druhou stranu toto zajímavé doplnění grafu K_5 zvané Petersenův graf už hamiltonovské není. Jak to víme? Nějaká snadná kritéria na vyrácení hamiltonovskosti nejsou, v tomto případě jsme prostě začali v náhodně vybraném vrcholu a zkoušeli všechny možné cesty, které z něj lze vytvořit, žádná nevedla k cíli.



△

Obecně bohužel nic lepšího než hrubá síla není a procházení všech možných cest je pořádně drahé. Rozhodování, zda je daný graf hamiltonovský, je totiž NP-úplný problém.

Příklad 12c.g: Tradičně se název problém obchodního cestujícího používá pro mírně jinou úlohu. Pracuje se s ohodnoceným úplným grafem a nehledá se jen tak ledajaká hamiltonovská kružnice, ale ta nejkratší. I to je NP-úplná úloha. V praxi se proto používají heuristické algoritmy, které nacházejí řešení blízká optimálnímu (ale neumí se zaručit, jak blízké) v rozumném čase.

Řešení lze nalézt snáze a dokonce rozumně blízké optimálnímu, pokud hodnoty hran splňují trojúhelníkovou nerovnost, což znamená, že přímá cesta mezi dvěma uzly není nikdy ohodnocena více než nějaká cesta oklikou. V mnoha aplikacích je toto splněno, jsou ale i zajímavé aplikace, kde trojúhelníková nerovnost neplatí, například pokud ohodnocení hran odpovídá době jízdy, pak může být přímý spoj dražší než oklika po dálnici.

△

Úlohy řešené v ohodnocených grafech se objevují v mnoha aplikacích.

Příklad 12c.h: Eulerův problém má zajímavou variantu zvanou **problém čínského pošťáka** (Chinese postman problem). Odehrává se v ohodnoceném grafu (u ulic města známe jejich délky) a cílem je najít nejkratší (ve smyslu součtu použitých ohodnocení) uzavřený sled, který by prošel všemi hranami. Jinými slovy, hledáme nejkratší trasu, která pošťáka povede všemi ulicemi.

Pokud je graf eulerovský, pak je eulerovský uzavřený tah také řešením pošťákova problému, protože každou ulicí projít musí a eulerův tah jde každou jen jednou, méně to proto nejde.

Zajímavější je, pokud graf eulerovský není, pak je nutno některými hranami projít vícekrát a není na první pohled zjevné, jak efektivně najít celkově nejlevnější trasu. Jsou algoritmy, které k nalezení řešení vyžadují řádově $|V|^3$ kroků.

△

Existují další varianty pošťácké úlohy, některé z nich jsou NP-úplné. Protože se ohodnocení sledů sčítají často, zavádí se pro to jméno. Máme-li graf (neorientovaný či orientovaný) s ohodnocením w pro hrany, pak pro sled $(v_0, v_1, \ldots, v_N)$ definujeme jeho **váhu** popř. **cenu** jako $\sum_{i=1}^{N} w(v_{i-1}, v_i)$. Další verze problému například hledají nejlevnější spojení mezi dvěma zadanými vrcholy, nejlevnější spojení z daného vrcholu do všech ostatních a podobně, na mnohé z těchto úloh existují efektivní algoritmy.

Někdy naopak chceme cenu co největší, což je ale ekvivalentní úloha. Stačí u všech ohodnocení hran změnit znaménko a algoritmus na hledání nejlevnější cesty aplikovaný na tento nový graf nám najde cestu původně nejdražší.

Jiná zajímavá úloha: Ohodnocení představují propustnost (třeba průměr potrubí). Je-li zvolen počáteční a cílový vrchol, jakou největší zásilku dokážeme vcelku poslat? Zde je evidentní, že nestačí jen najít hranu s nejmenší propustností, protože třeba existuje cesta, která se jí dokáže vyhnout. Praktické aplikace si čtenář jistě dokáže živě představit třeba u firmy přepravující rozměrné náklady.

Mnohé posílané věci lze rozdělit, například vodu, elektřinu či bity. V takovém případě se úloha přepouštění co největšího množství z jednoho vrcholu do jiného liší od předchozí. Pro obě verze existují standardní polynomiální algoritmy. Podoblasti teorie grafů, která se zabývá úlohami tohoto typu, se říká **toky v sítích** (flow networks).

12d. Kreslení grafů

Každý konečný graf lze nakreslit, ale ne vždy to k něčemu je. Můžeme například požádat počítač, aby nám nakreslil zadaný graf s milionem vrcholů na lodní plachtu, ale asi ze vzniklé houštiny moc nevyčteme. Přesto je kreslení grafů populární oblastí, protože často své nápady testujeme na menších grafech a u nich nakreslení může výrazně pomoci našemu přemýšlení.

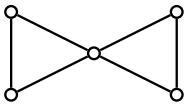
Má to i praktické dopady. Představte si návrháře obvodů. Má hromádku švábů (odpory, kondíky, ledky, tranzistory, integráče, ...), které potřebuje porůznu pospojovat, aby dělaly, co potřebuje. Vyrábět houštinku z drátů není nejlepší metoda, bylo by moc pěkné, kdyby prostě mohl vyleptat desku a švábky na ni osadit. Je to možné? Když si každou součástku reprezentujeme vrcholem a nutná propojení pomocí hran, dostáváme graf. To, že součástky někam přimontujeme a pospojujeme vodivými cestičkami, přesně odpovídá nakreslení grafu v rovině. Teď ovšem máme problém, protože na tištěném spoji se vodivé cestičky nesmějí křížit. Pokud tedy navrhneme obvod a chceme jej osadit na desku, tak to půjde jedině v případě, že odpovídající graf dokážeme nakreslit tak, aby se hrany nikde nekřížily.

Tento problém evidentně zajímá všechny firmy zabývající se návrhy obvodů, ale matematici se jím zabývali již dávno v dobách, kdy jediná elektřina v domácnosti byl občasný blesk, čistě ze zvědavosti. Ukázalo se, že možnost být takto nakreslen o grafu ledacos důležitého říká, my si zde tuto problematiku jen lehce přiblížíme.

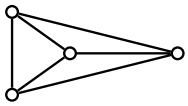
Definice.
Nechť $G = (V, E)$ je graf. Řekneme, že je **rovinný** (**planar**), jestliže je možné nakreslit jeho obrázek v rovině tak, aby se hrany neprotínaly.

Pro úplnost je třeba vyjasnit, že když se dvě hrany potkají v jednom vrcholu, tak se to nebere jako protínání. V češtině se někdy říká **planární graf** (mně se to líbí víc), ale není to tak běžné.

Když si nakreslíme graf (libovolný), tak nám rozdělí rovninu na oblasti. Pokud použijeme pro hrany úsečky, tak ty oblasti budou mnohoúhelníky, jejichž strany jsou dány hranami. Pokud je graf rovinný a je správně nakreslen, tak u každého takového mnohoúhelníku platí, že má v každém vrcholu nějaký vrchol grafu. Pokud jsme pro hrany nepoužili úsečky, ale rozličné křivky, pak to platí obdobně, vznikají jakési „skoromnohoúhelníky“, podstatné je, že u rovinných nakreslení v každém křížení hran najedeme vrchol. Tyto oblasti (minimální části roviny vymezené hranami grafu) mají své jméno, říkáme jim **stěny**. Z ryze praktických důvodů uvažujeme vždy jako stěnu také „vnějšek“ grafu, protože i to je část roviny, která je vymezená hranami grafu. Počet stěn je jedním z charakteristických rysů grafu, značí se f. Pro jistotu uvedeme dva příklady, čtenář se jistě dopočítá správné hodnoty f.



$f = 3$



$f = 4$

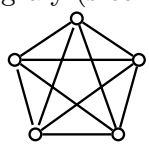
Mimochodem, opět jde o populární grafy, tomu vlevo se říká motýlek a ten vpravo je samozřejmě K_4, úplný graf o 4 vrcholech, který jsme ale nakreslili jinak než předtím. Ukazuje se, že K_4 je planární. Připomíná nám to, že když vidíme graf a kříží se v něm hrany, tak to ještě neznamená, že by nešel nakreslit jako rovinný, i když třeba v té poskytnuté podobě vypadal velice pěkně.

Nyní již můžeme přejít k inzerovanému tvrzení.

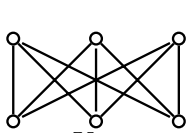
Věta 12d.1. (Eulerův vzorec)
Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf. Uvažujme nějaké jeho rovinné nakreslení a označme jako f počet stěn, které hrany grafu vytvářejí, včetně oblasti vně grafu. Pak $|V| - |E| + f = 2$.

Na důkaz nám chybí některé nástroje, takže to necháme na nějaký pokročilejší kurs teorie grafů.

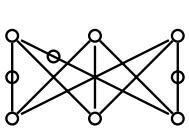
Dá se u grafu poznat, zda je planární? Přirozeným začátkem je podívat se na populární jednoduší grafy a brzy se zjistilo, že nejjednodušší grafy (s co nejmenším počtem vrcholů), u kterých rovinnost selhává, jsou K_5 a $K_{3,3}$.



K_5



$K_{3,3}$



Grafy K_n už jsme si představili, pro úplnost dodejme, že grafy $K_{n,m}$ vzniknou tak, že se nakreslí n vrcholů do horní řady, m vrcholů do spodní řady a obě řady se propojí všemi možnými způsoby.

Ke grafu $K_{3,3}$ se váže pěkná pohádka. Představíme si, že tři vrcholy v horní řadě jsou domky a tři vrcholy v dolní řadě jsou vývody elektřiny, vody a plynu. Pokud budou chtít příslušné tři společnosti napojit ony tři domky, pak se jejich vedení budou muset někde překřížit.

Je zjevné, že pokud je nějaký graf G rovinný, pak už musí být i všechny jeho podgrafy rovinné. Z toho mimo jiné vyplývá, že jestliže je v nějakém grafu coby podgraf K_5 nebo $K_{3,3}$, tak už tento graf nemůže být rovinný. Zajímavé je, že to v zásadě funguje i naopak, tyto dva grafy jsou hlavním problémem pro rovinnost.

Potřebujeme ještě jedno pozorování, k tomu je ten obrázek vpravo výše. Pokud v grafu přidáme doprostřed nějaké hrany vrchol, tak se tím nemění jeho podstata, pokud byl původní graf rovinný, tak je ten nový také, a naopak.

Teď už máme vše připraveno.

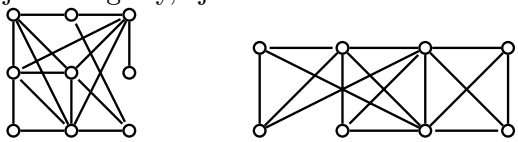
Věta 12d.2. (Kuratowského věta)
Graf G je planární právě tehdy, pokud neobsahuje podgraf, který je kopií grafů K_5 či $K_{3,3}$, popřípadě kopií grafů, které z K_5 či $K_{3,3}$ vzniknou přidáním vrcholů na hrany.

Podíváme se teď na rovinnost některých grafů. Při úvahách se nám bude hodit i to, že přidání vrcholu na hranu lze obrátit. Takovouto operaci jsme ještě neměli, tak to řekneme přesně.

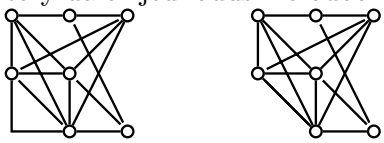
Vrchol uprostřed hrany musí mít nutně stupeň dva. Máme-li tedy takový vrchol v v grafu, tak z něj vedou hrany $\{v, u_1\}$ a $\{v, u_2\}$ pro nějaké vrcholy u_1, u_2. Vymazání vrcholu v z hrany znamená, že v odebereme z množiny vrcholů, hrany $\{v, u_1\}$ a $\{v, u_2\}$ odebereme z množiny hran a místo nich tam přidáme hranu $\{u_1, u_2\}$.

Čtenář si snadno rozmyslí, že všechny vrcholy v nově vzniklém grafu mají stejný stupeň jako předtím, rovněž zůstaly zachovány všechny cesty a tahy a sledy. Vrchol v totiž nebyl křižovatkou, jen odpočívadlem na dálnici. Platí pořád, že vymazáním takového vrcholu neměníme (ne)rovinnost grafu.

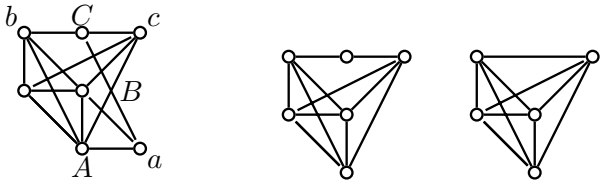
Příklad 12d.a: Uvažujme následující dva grafy, zjevně souvislé.



Začneme přemýšlet nad tím vlevo. Na pravém okraji vidíme „ocásek“, vrchol se stupněm jedna. Ten rovinnost neovlivní, proto jej odstraníme. Vidíme také vlevo dole vrchol se stupněm dva, je uprostřed hrany, proto jej vymažeme a dostáváme následující graf, který dále zjednodušíme odebráním zbytečně zdvojené hrany.



Další redukce není vidět, nezbývá než začít graf hypnotizovat a čekat, jestli se nám vyjeví jeden z těch dvou grafů K_5 a $K_{3,3}$ z Věty. Jsou tam oba. Na obrázku níže vlevo jsou tři vrcholy označeny malými písmeny (to je dolní řada $K_{3,3}$) a tři velkými písmeny. Ověřte, že každý vrchol s malým písmenem je spojen hranou s vrcholy značenými velkými písmeny a naopak, takže pokud přejdeme na podgraf určený touto množinou vrcholů, tak opravdu vznikne $K_{3,3}$



Prostřední obrázek ukazuje, co vznikne, když vynecháme vrchol vpravo dole. Pak vrchol uprostřed nahoře náhle klesne se stupněm na dva, je uprostřed hrany, takže jej vymažeme a vykoukne na nás K_5 (obrázek vpravo).

Zkoumaný graf tedy obsahuje přímo kopii $K_{3,3}$ a také podgraf, který vznikne přidáním vrcholu na hranu grafu K_5, takže máme dokonce dvojnásobně potvrzeno, že daný graf není rovinný.

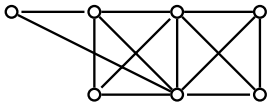
Stojí za zamyšlení, že ve fázi hledání K_5 nebylo možné odebrat z grafu vrcholy se stupněm 3, i když se v žádném K_5 objevit nemohou. Krásným příkladem je vrchol označený C. Má stupeň 3, tudíž se v našem K_5 logicky objevit nemůže. Je ale uprostřed hrany, kterou pro naše K_5 potřebujeme, a o tu bychom odebráním C přišli. Ztratili bychom tak spojku mezi vrcholy vlevo nahoře a vpravo nahoře a už bychom K_5 nenašli, i když tam je. Odebrání vrcholů stupně tři tedy není ekvivalentní úpravou z hlediska přítomnosti K_5.

Zatímco obecně vrcholy stupně tři odebrat nelze, můžeme to udělat v případě, že za každou takto přerušenou spojovací cestu najdeme náhradu jinde. V našem příkladě umíme přes vrchol C vyrobit tři cesty. Jedna vede z levého horního do prostředního vrcholu a za tu existuje přímá náhrada, totéž platí u cesty mezi pravým horním a středovým vrcholem. Zatím dobré. Pokazí to ale již zmiňovaná cesta mezi krajními horními vrcholy, ony totiž nejsou přímo spojeny.

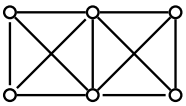
Teď se podíváme na graf druhý. Nemá přívěsky neboli slepá střeva ani vrcholy se stupněm 2, tudíž si nelze situaci zjednodušit odebráním vrcholů.

Aby se v tom grafu schovávalo K_5, tak by v něm muselo existovat pět vrcholů se stupněm alespoň čtyři. To není pravda, tudíž daný graf neobsahuje kopii K_5. Zbývá se zamyslet nad $K_{3,3}$. Na to je třeba šest vrcholů se stupněm alespoň tři, což tam mají všechny, to si nepomůžeme. Uděláme to zkusmo, vyplatí se začínat od vrcholů se stupněm tři, pokud takové jsou.

Mohl by být levý dolní vrchol součástí $K_{3,3}$? Můžeme si jej představit v dolním patře. Je spojen s třemi jinými vrcholy, ty by pak logicky musely být v patře horním. Aby opravdu vzniklo $K_{3,3}$, tak by se u těch tří vrcholů z horního patra musely najít další dva společné cíle (vrcholy hypotetického dolního patra), ve kterých se z nich sejdou hrany. Zkoumání grafu ukáže, že takové dva vrcholy nejsou. Levý horní vrchol totiž sice má tři hrany, ale jedna vede ke kolegovi z horního patra, tudíž se nedokáže dostat třikrát dolů. To znamená, že levý dolní vrchol nemůže být součástí $K_{3,3}$ a můžeme jej z grafu odebrat.



Tím ovšem klesl stupeň horního levého vrcholu na dva, takže ani ten nemůže být součástí $K_{3,3}$ a vynecháme jej.

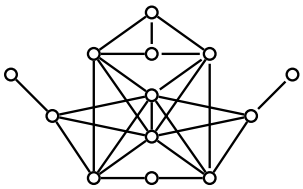


Zbylo šest vrcholů, takže buď je to $K_{3,3}$, nebo zkoumaný graf žádnou příšerku neobsahuje. Můžeme třeba udělat podobný rozbor jako předtím s levým dolním vrcholem a hravě zjistíme, že nemůže být součástí $K_{3,3}$.

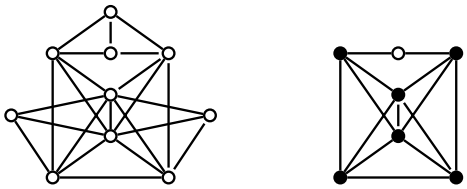
Dospěli jsme k závěru, že daný graf je rovinný. Můžete zkusit najít jeho správný tvar, aby se vám hrany nekřížily. Není špatný nápad začít překreslením toho posledního obrázku a pak přidat odebrané hrany a vrcholy.
△

Ukázali jsme si několik zajímavých triků, ale je evidentní, že u houštinovitějších grafů bychom se s nimi daleko nedostali.

Příklad 12d.b: Šílený vynálezce dostal nápad, že by měl vzít tři kondenzátory, dvě diody, cívku, tři tranzistory, žárovku, zdroj, chcíplou krysu a rozbušku a propojit je způsobem, který hravě zachytíme jazykem grafů jako množinu hran, ale raději si ukážeme obrázek, součástky neboli vrcholy jsme pro začátek rozmístili v zásadě náhodně.



Chceme vědět, zda toto lze realizovat pomocí tištěného spoje neboli zda je to graf rovinný. Budeme proto hledat K_5 a $K_{3,3}$. Nejprve graf zjednodušíme, odebereme vrcholy se stupněm jedna a vymažeme z hrany vrchol se stupněm dva. Vznikne graf níže vlevo.



Na obrázku vpravo si pak graf připravíme na hledání K_5. Nejprve si vybarvíme vrcholy se stupněm alespoň čtyři, protože mezi nimi budeme hledat. Dále se pokusíme graf ještě zjednodušit. Horní vrchol má stupeň tři a cesty přes něj spojují vrcholy, které jsou spojeny i jinak, tudíž jej při hledání K_5 lze ignorovat. Stejný argument platí i pro vrcholy, které trčí do stran. Dostáváme výrazně jednodušší graf, ze kterého lze navíc odebrat vrchol se stupněm dva z horní hrany.

Dokážeme z šesti vybarvených vrcholů vybrat pět tak, aby daly K_5? Začneme pokusem vyrobit kopii K_5 zahrnující levý dolní vrchol. Z něj vedou přesně čtyři hrany vedoucí k vybarveným vrcholům, takže není na výběr, je jasné, z čeho by se takové K_5 skládalo. Je všech těchto pět vrcholů navzájem propojeno (případně přes prostředníka, u kterého by šlo vyrobit stupeň dva a pak jej odmazat)? Všimneme si, že není přímé spojení pravého dolního a levého horního vrcholu. Jsou spojeny nepřímo mnoha cestami, ale ty, které vedou přes ostatní potencionální vrcholy z K_5 nepomohou, protože dotyčné vrcholy při výrobě kopie nebudeme odmazávat. Zbývá tedy cesta oklikou přes pravý horní vrch. Dokázali bychom z grafu, jak jej máme nakreslen, odebrat některé nevybarvené vrcholy tak, aby pravý horní vybarvený vrchol náhle měl stupeň dva a tím šel odmazat, vznikla by tak hledaná spojinice? Nejde to, protože z pravého horního vrcholu vedou čtyři hrany právě do těch vrcholů, ze kterých chceme vybudovat K_5.

Závěr je, že pokud budeme uvažovat vrchol vlevo dole a další čtyři vybarvené, se kterými je spojen, tak z toho nevznikne K_5, neboť u dalších dvou zúčastněných vrcholů nelze vyrobit přímou spojku.

Symetricky to platí i o pravém dolním vrcholu, čímž, odpadají dva, zbývají čtyři kandidáti a z těch K_5 neupečeme.

Závěr: Dotyčný graf neobsahuje kopii K_5 (případně doplněnou vrcholy na hranách).

Teď ještě potřebujeme zjistit, zda se v grafu neschovává $K_{3,3}$. Necháme to na čtenáři, učitě má dost času si takhle hrát. Náš šílený vynálezce tohle vůbec nedělal a místo toho ubastlil úžasnou kouli z drátů, ze které do stran trčely rozličné sučástky. I to má svůj půvab.

△

Z příkladu vidíme, že Kuratowského věta je sice pěkná, ale v praxi to zase až tak úžasné není. Matematici samozřejmě nezaháleli a vymýšleli i další kritéria rovinnosti, některá ekvivalentní, jiná alespoň ve formě implikace. Zajímavé je například toto:

Fakt 12d.3.
Jestliže je konečný graf $G = (V, E)$ rovinný a $|V| > 3$, pak $|E| \leq 3|V| - 6$.

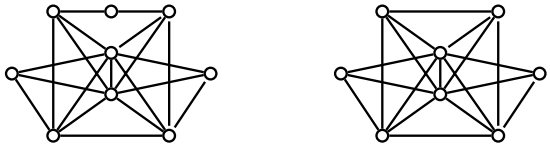
Obměna říká, že když $|E| > 3|V| - 6$, tak už dotyčný graf nutně není rovinný. Jinými slovy, rovinné grafy nemohou mít moc hran. Pokud použijeme princip sudosti, tak se nerovnost z tvrzení dá přepsat jako

$$\frac{1}{|V|}\sum_{v\in V}\deg(v) \leq 6 - \frac{12}{|V|}.$$

Nalevo máme průměrný stupeň vrcholu v grafu. Chceme-li tedy dostat graf rovinný, tak v případě více než 12 vrcholů máme povolen jen průměrný stupeň do pěti, u menších grafů méně (například v rovinném grafu o šesti vrcholech je povolený průměrný stupeň maximálně 4).

Příklad 12d.c (pokračování 12d.b)**:** Jak je na tom náš šílený vynálezce? Tam $|V| = 13$ a $|E| = 26$, podmínka z Faktu je splněna a o rovinnosti nevíme nic. Nápad: Graf jsme si zredukovali vynecháním vrcholů s nízkým stupněm (obrázek výše vlevo), čímž mohl průměrný stupeň vzrůst. Což takhle aplikovat podmínku na něj? U zmenšeného grafu máme $|V| = 10$ a $|E| = 24$, to je sice na hranici, ale pořád nic nevíme.

Lze graf dále zmenšit? O vrcholu nahoře jsme odvodili, že jej lze při hledání K_5 odebrat z grafu. Rozmyslíme si, že jej lze odebrat i při hledání $K_{3,3}$. Již jsme viděli, že pokud jej odebereme, tak nepřerušíme žádná existující spojení mezi ostatními vrcholy. Mohl by být součástí hledaného $K_{3,3}$? Pokud by byl, řekněme v horní řadě, tak by ty tři vrcholy pod ním musely tvořit dolní řadu. To ale není možné, protože prostřední z nich by musel být napojen na horní vrchol a ještě na nějaké dva další, které by také měly přijít do horní řady, ale on není, má spojnice jen s kolegy z dolní řady. Proto můžeme odebrat horní vrchol, aniž bychom změnili rovinnost grafu, následně pak z hrany vymažeme ten nahoře uprostřed.



Vyšlo to, nový graf má $|V| = 8$ a $|E| = 19$, tudíž podmínka rovinnosti není splněna a nejde o rovinný graf. Ale bylo to o chlup, stačilo o hranu méně a zase jsme nic nevěděli.

△

Hlavní problém je, že dotyčné tvrzení je jen implikace, takže rovinnost umí vyvrátit, ale ne potvrdit.

Vzhledem k tomu, že jde jen o přehledovou kapitolu, se v tom dále nebudeme vrtat, na závěr čtenáře uklidníme, že existují algoritmy, které dokážou rovinnost grafu rozhodnout, a to dokonce v relativně příjemném lineárním čase, jejich výpočetní náročnost je $O(|V|)$ pro grafy jednoduché, obecně pak $O(|V|+|E|)$, neboť opakováním hran se obtížnost úlohy zjevně zvyšuje. S rovinnými grafy se ještě setkáme v kapitolce o barvení grafů.

Na závěr si neodpustím bonbónek. Podle Fáryho věty lze každý rovinný graf nakreslit tak, že se hrany nejenže neprotínají, ale dokonce jsou to úsečky.

12e. Barvení grafu

Po Eulerově procházkách teorie grafů nějakou dobu spíš odpočívala a nový rozvoj přišel až v druhé polovině 19. století. Jedním z hlavních problémů, které podněcovaly zkoumání v tomto oboru, byla otázka pocházející z kartografie. Autoři map (politických) rádi vybarvují země tak, aby dvě sousední měly vždy jinou barvu, ale z praktických důvodů se snaží udržet počet barev minimální. Kolik barev by stačilo na jakoukoliv mapu? Pokud každou zemi reprezentujeme vrcholem grafu a to, že spolu sousedí, zachytíme doplněním hrany mezi nimi, tak se to převede na úlohu z teorie grafů.

Definice.
Nechť $G = (V, E)$ je konečný rovinný (neorientovaný) graf, $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že graf G lze obarvit k barvami, jestliže existuje funkce $f : V \mapsto \{1, 2, \dots, k\}$ taková, že pro každé $u, v \in V$ platí: Jestliže $\{u, v\} \in E$, pak $f(u) \neq f(v)$.

Klíčová otázka tedy zní: Jaké je nejmenší číslo k takové, že libovolný konečný rovinný graf lze obarvit k barvami? Při pohledu na K_3 vidíme, že alespoň tři barvy potřebujeme vždy. Rovněž K_4 je rovinný graf, jak jsme již viděli výše, což ukazuje, že některé grafy potřebují čtyři barvy. Optimální hodnota k_0 tedy určitě splňuje $k_0 \geq 4$. Nás ale spíš zajímá omezení shora.

Již na konci 19. století bylo dokázáno, že $k = 5$ stačí pro všechny grafy. Naznačíme důkaz, protože jinak by tato kapitola zůstala bez pořádného důkazu a to by čtenáře jistě mrzelo. Navíc mám k tomuto důkazu osobní vztah, při ústní zkoušce z teorie množin jsem dostal za úkol dokázat právě následující větu.

Věta 12e.1. (o pěti barvách)
Pro každý konečný rovinný graf existuje obarvení pěti barvami.

Důkaz (poučný)**:** Důkaz provedeme silnou indukcí na počet vrcholů, dokazujeme tedy pro všechna $n \in \mathbb{N}$ tvrzení $V(n)$: Každý rovinný graf s n vrcholy lze obarvit pěti barvami.

(0) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 5$. Jestliže má graf nejvýše 5 vrcholů, tak prostě každý obarvíme jinou barvou.

(1) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, předpokládejme, že všechny rovinné grafy s nejvýše n vrcholy dokážeme obarvit pěti barvami. Potřebujeme ukázat, že totéž platí i pro všechny grafy s $n + 1$ vrcholy.

Vezměme tedy graf $G = (V, E)$ splňující $|V| = n + 1$. Pokud by všechny vrcholy měly stupeň větší než 5, tak $|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg(v) \geq \frac{1}{2} 6|V| = 3|V|$, ale pro planární grafy má platit $|E| \leq 3|V| - 6$. Proto musí existovat nějaký vrchol v, jehož stupeň je nejvýše 5. Rozebereme dva případy.

a) Jestliže $\deg(v) \leq 4$, pak uvažujeme graf $G_0 = (V_0, E_0)$, který vznikl z grafu G odebráním vrcholu v. Protože $|V_0| = n$, lze podle indukčního předpokladu tento graf obarvit pěti barvami. Vrchol v ale sousedí bezprostředně s nejvýše 4 vrcholy, proto musí existovat barva, kterou tyto sousední vrcholy nevyužívají. Když touto barvou obarvíme vrchol v, nevznikne tak situace sousedících stejně obarvených vrcholů a celý graf je obarven pěti barvami.

b) Jestliže $\deg(v) = 5$, pak má v pět bezprostředních sousedů. Pokud bychom nyní vrchol v odebrali a použili indukci k obarvení zbytku grafu jako v části a), tak by se mohlo stát, že se u sousedů v objeví všech pět barev a na v bychom tedy potřebovali šestou. Tomu je třeba zabránit.

Podívejme se blíže na množinu M těchto sousedů. Pokud by všechny dvojice prvků z M byly spojeny hranou, tak vlastně dostáváme graf K_5. Jenže G nemůže mít K_5 jako podgraf, protože by tím pádem nebyl rovinný. Musí tedy existovat dva vrcholy $u_1, u_2 \in M$, které nejsou v grafu G spojeny hranou. V takovém případě je možné začít předstírat, že u_1 a u_2 je vlastně jeden vrchol. Formálně to dá trochu práce, ale není to nic pokročilého jen se musí nadefinovat chytře nový graf, z původního G se odeberou v, u_1, u_2 a pak se tam přidá vrchol u, který zastupuje oba u_1, u_2, a dále hrany do u jako zástupci všech hran, které původně vedly do u_1 a u_2. Pak se (snadno ale pracně) ukáže, že vznikl nový rovinný graf.

Ten má $n - 1$ vrcholů, podle indukčního předpokladu jej tedy lze obarvit pěti barvami. Tyto barvy pak přeneseme na graf G_0, přičemž vrcholy u_1 a u_2 obarvíme stejně jako u. Jsme tedy v situaci, kdy je pět sousedů vrcholu v obarveno, ale dva z nich stejně, tudíž se spotřebovaly jen čtyři barvy a pátá zbývá na v.

Tím končí důkaz kroku (1), ukázali jsme, jak obarvit libovolný graf s $n + 1$ vrcholy.

□

Na konci 19. století tedy bylo jasné, že správné odpovědi jsou možné jen dvě, $k_0 = 4$ nebo $k_0 = 5$. Nicméně na základě zkušeností si matematici již od poloviny 19. století sázeli na $k_0 = 4$, ale nebyli schopni to dokázat, říkalo se tomu hypotéza čtyř barev. Zlom přišel v roce 1976.

Věta 12e.2. (o čtyřech barvách)
Každý konečný rovinný graf lze obarvit čtyřmi barvami.

Důkaz neukážeme ani náhodou, dokonce to matematické komunitě trvalo dost dlouho, než jej uznala jako správný. Autoři dotyčné věty totiž použili do té doby nevídanou kombinaci matematiky a počítačů. Nejprve pomocí různých teoretických úvah zúžili pole působnosti, dokázali, že pokud dokážeme obarvit čtyřmi barvami určitých 1936 grafů, tak už budeme umět takto obarvit všechny rovinné grafy. (Tato matematická část zabrala přes 400 stran, tak si

čtenář jistě umí představit, že trvalo docela dlouho, než matematici zkontrolovali, že se někde neskrývá chybka. Několik jich našli, ale byla to malá přehlédnutí, která šlo spravit.)

Na pomoc při obarvování těch 1936 grafů pak zavolali počítač, kterému to trvalo přes 1200 hodin, což je mimochodem asi 50 dnů. Bylo to mimo jiné dáno tím, že na hledání obarvení čtyřmi barvami používali algoritmus s náročností řádově n^4. Od té doby byl vymyšlen algoritmus s náročností n^2 a počet grafů k ověření se podařilo snížit na 633, takže samotné provedení důkazu už není otázka týdnů.

Dodejme, že ty 4 barvy jsou nejhorší scénář, ale pro mnohé grafy by šlo vystačit i s méně barvami. To je jiná otázka: Je-li dán rovinný graf, jaký je nejmenší počet barev nutný k jeho obarvení? Pokud to budeme chtít vyřešit algoritmicky, dostaneme další náročnou úlohu, je to NP-úplný problém.

Podobné problémy lze zkoumat i pro jiné grafy než rovinné (grafy obecně, grafy nakreslené bez protnutí na nekonečném válci či toru a podobně) a pak to začne být dobrodružné. Obecně se dá pro každé $k \in \mathbb{N}$ vyrobit graf takový, že vyžaduje alespoň k barev. To není nic těžkého, stačí vzít K_n, zajímavé je, že na to stačí i grafy s relativně méně hranami.

12f. Stromy, kostra grafu

Zatím jsme spíš měli situaci, kdy je graf dán a my jej zkoumáme, ale často také čelíme problému, že máme vytvořit graf, který má splňovat určité požadavky. Představme si třeba plánovače železničního spojení, dálniční sítě či také počítačové sítě (pokud šetříme a nechceme tam mít redundanci pro zvýšení bezpečnosti). Ti všichni mají dané objekty (vrcholy), které chtějí navzájem propojit (tedy má vzniknout souvislý graf), ale z pochopitelných důvodů chtějí těch propojení co nejméně. Jak poznáme, že hranami plýtváme? Když se mezi dvěma body dokážeme dostat dvěma různými cestami. Když tyto dvě cesty spojíme, dostáváme kružnici. To tedy nechceme.

Definice.
Nechť G je graf.
Řekneme, že je to **strom** (**tree**), jestliže je souvislý a neobsahuje žádnou kružnici.
Řekneme, že je to **les** (**forest**), jestliže neobsahuje žádnou kružnici.

Dá se dokázat, že graf je lesem, jestliže je každá z jeho komponent souvislosti stromem. V zásadě tedy stačí studovat stromy.

Všimněte si, že v definici mluvíme o kružnicích, což jsou neorientované struktury, dokonce i v případě, že graf G je orientovaný. Podobně pojem souvislosti nebere ohled na orientaci hran, proto u orientovaných grafů rozhoduje jejich neorientovaná verze o tom, zda jsou stromy.

Následující věta potvrdí, že pojem stromu vystihuje naše přání mít ekonomický graf.

Věta 12f.1.
Nechť $G = (V, E)$ je graf. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(i) G je strom;
(ii) každé dva vrcholy v G jsou spojeny právě jednou cestou;
(iii) G je souvislý, ale po odebrání libovolné hrany už bude vzniklý graf nesouvislý (strom je tzv. minimální souvislý graf);
(iv) G neobsahuje kružnici, ale přidáním libovolné hrany v něm již kružnice vznikne (strom je tzv. maximální graf bez kružnic);
(v) G je souvislý a $|E| = |V| - 1$;
(vi) G nemá kružnice a $|E| = |V| - 1$.

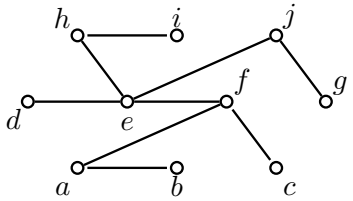
Připomeňme, že zde pracujeme s konečnými grafy, v této souvislosti je zajímavé, že podmínky (i) až (iv) by fungovaly i pro grafy nekonečné.

Věta ukazuje jednu zajímavou věc. Pokud chceme, aby byl graf souvislý, tak jej nutíme mít více hran. Pokud nechceme kružnice, pak by zase hran mělo být relativně málo. Dá se tedy čekat, že existuje jakási zóna optimálního počtu hran. Věta ukazuje, že tato zóna je velice úzká, je to pro daný graf jedno konkrétní číslo.

Ukážeme si to podrobněji, zároveň tím naznačíme důkaz části této věty. Představme si souvislý graf, který nemá kružnice. Navíc si představme, že je to přesně na hranici, tedy vycpali jsme jej hranami tak hodně, jak jen to je možné, aniž by vznikla kružnice. Ukážeme, že jsme zároveň na hranici souvislosti, tedy odebráním jediné hrany už by se souvislost ztratila. Uděláme to sporem.

Co kdyby šlo odebrat nějakou hranu $\{u, v\}$ tak, aby graf ještě zůstal souvislý? Pak by nutně musela existovat cesta z u do v, do té když doplníme tu hranu $\{u, v\}$, tak máme kružnici, což je ve sporu s naším předpokladem. Graf je tedy také minimální možný pro souvislost.

Zde máme příklad stromu, rozmyslete si na něm platnost podmínek (ii) až (vi) z věty.

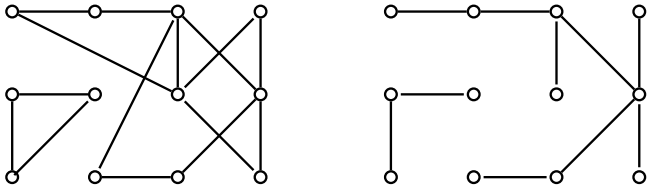


Jednou ze zajímavých úloh je, že nám někdo dá graf, který trochu plýtvá, a my z něj chceme odstraněním hran vytvořit graf, který je ekonomický, aniž by ztratil ze své propojenosti. Takovouto úlohu řeší úřady, když se snaží zrušit tratě, aniž by se snížila dopravní dostupnost jednotlivých zastávek.

Jak tuto úlohu formulovat matematicky? Máme graf G a chceme najít jeho podgraf G', který by měl stejné vrcholy jako graf původní a přitom by neměl zbytečné hrany, tedy neměl by kružnice. Zároveň by mělo platit, že jsou-li v grafu G nějaké vrcholy propojeny cestou, pak tomu tak musí být i v grafu G'. Obvykle se toto řeší jinak, rovnou se zaměříme na jednotlivé komponenty původního grafu, pak je požadavek, aby z původně souvisléo grafu zase vznikl souvislý.

Definice.
Nechť $G = (V, E, \varepsilon)$ je souvislý graf. Řekneme, že jeho podgraf $G' = (V', E', \varepsilon)$ je **kostra** (**spanning tree**) grafu G, jestliže $V' = V$ a G' je strom.

Příklad grafu a jeho koster jeho komponent:



Nalezení kostry je snadné, prostě postupně přibíráme hrany z původního grafu, dokud je to možné udělat tak, aby nevznikla kružnice. Je zjevné, že kostra grafu není jezdnoznačně určena, například je-li přímo dána kružnice jako výchozí graf, pak její kostru získáme odebráním libovolné z hran.

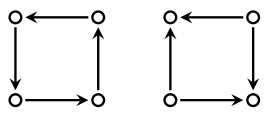
Zajímavější problém je, když jsou hrany ohodnoceny, pak se často hledá kostra s co nejmenší cenou (součtem ohodnocení hran). Na to jsou algoritmy, jednoduché nás stojí zhruba $|V|^2$, ale jde to i lépe.

12f.2 Kořenové stromy

Začneme grafem orientovaným.

Definice.
Nechť $G = (V, E, \varepsilon)$ je orientovaný graf. Řekneme, že vrchol $v \in V$ je jeho **kořen** (**root**), jestliže pro každý vrchol $w \in V$ existuje orientovaná cesta z v do w.

Protože vždy existuje cesta z v do v, nenutí nás tato definice mít u v smyčku. Je dobré si uvědomit, že kořenů může být v grafu více. Extrémní příklad je cyklus, kde je kořenem každý z vrcholů. Naopak je možné, že žádný kořen neexistuje (viz obr. vpravo).



Je zjevné, že pokud je v grafu kořen, pak již graf musí být souvislý (ale nemusí být silně souvislý). Naplatí to naopak, ne každý souvislý graf má kořen, viz obrázek výše vpravo. My se teď vrátíme k hlavnímu tématu.

Definice.
Nechť $G = (V, E, \varepsilon)$ je orientovaný graf. Řekneme, že je to **kořenový strom** (**rooted tree**), jestliže je to strom a existuje v něm kořen.

Připomeňme, že existence kořene již implikuje souvislost, což je jedna z podmínek pro strom. Lze proto také říct, že kořenový strom je libovolný orientovaný graf s kořenem a bez kružnic.

Před chvílí jsme viděli, že obecně může být v souvislém orientovaném grafu i více kořenů. U stromů to ale neplatí, buď je kořen žádný, nebo je jen jeden.

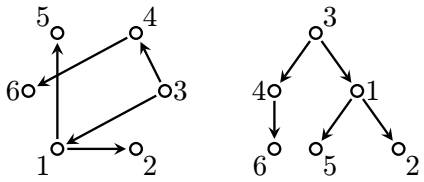
U kořenových stromů se zavádí užitečné názvosloví. U orientované hrany (x, y) říkáme prvku x **rodič** (**parent**), zatímco prvku y říkáme **potomek** či **dítě** (**child**). Pokud nějaký prvek u nemá potomka, pak mu říkáme **list**

(**leaf**). Každé cestě vedoucí od kořene k nějakému listu říkáme **větev** (**branch**). Konce takovýchto větví poznáme podle stupňů: Listy se poznají podle toho, že $\deg^+(v) = 0$. Kořen je jediný vrchol, který má $\deg^-(v) = 0$, ostatní vrcholy mají $\deg^-(v) = 1$.

V zakořeněném stromu vzniká relace mezi vrcholy grafu. Řekneme, že vrchol x je **předchůdce** vrcholu y nebo že y je **následovník** x, jestliže ve stromu G existuje cesta z x do y. Je snadné ukázat, že relace „býti následovník“ i relace „býti předchůdce“ jsou částečná uspořádání.

My už jsme vlastně viděli i opačný proces. Pro částečná uspořádání jsme vytvářeli Hasseovy diagramy. Pokud bychom u hran v takovém diagramu ponechali orientaci, pak by šlo o stromy, dokonce jsem tak vlastně nacházeli kostry grafů daných relací. Jinak řečeno, náš algoritmus pro vytváření Hasseova diagramu lze snadno přepsat na algoritmus sloužící k nalezení kostry daného souvislého orientovaného grafu.

Hasseovy diagramy také ukazují další věc, která je u stromů tradiční, rádi je kreslíme tak, aby byl kořen nejvýše a všechny hrany směřovaly svou orientací dolů, popřípadě naopak (dle konkrétní aplikace).



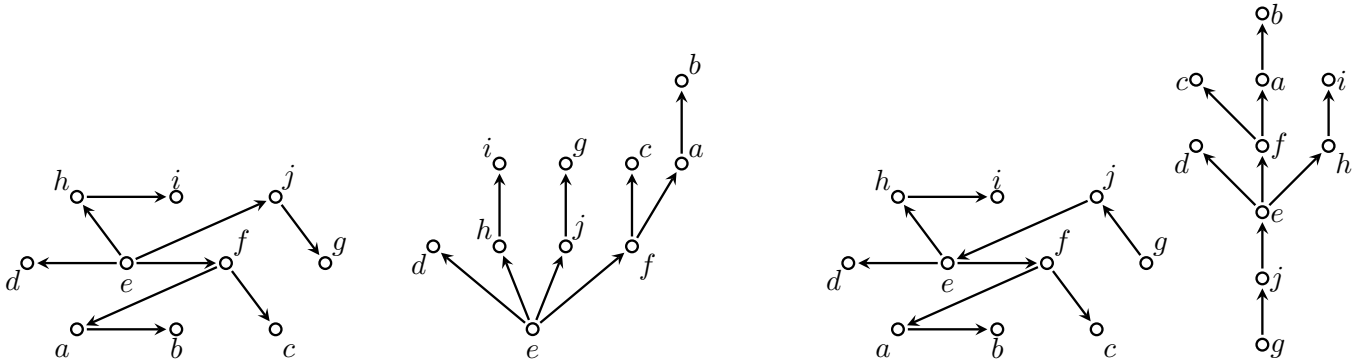
Stromy jsou velice užitečné například jako modely datových struktur, kdy vrcholy nesou informace, pak se zkoumají různé algoritmy pro prohledávání zakořeněného stromu (do šířky, do hloubky).

Zajímavé je, že i neorientované stromy je možné přeměnit v kořenové stromy, přičemž svoboda volby není zase tak velká. Spočívá v tom, že si v takovém stromu zvolíme libovolný vrchol jako kořen. Pak už existuje jen jediný způsob, jak na hranách zavést orientaci, aby vznikl orientovaný strom.

Jak se to dělá? Víme, že u orientovaného stromu z kořene hrany jen vycházejí, tedy pro libovolné $\{v, x\} \in E$ dostaneme orienovanou hranu (v, x). Pak se podíváme na množinu sousedů M kořene v. Pro souseda $w \in M$ si u všech jeho hran $\{w, x\}$ zavedeme orientaci (w, x), ovšem s výjimkou hrany, která vede do v a již orientaci má. Následně se podíváme na sousedy prvků, které jsme právě zpracovávali, a dodáme další orientace směrem k novým sousedům a tak dále.

Nejlepší přestava je, že hrany jsou trubky. My do kořene v pustíme vodu. Protože je strom souvislý, voda doteče do každého vrcholu. Protože ale máme strom, tak se do žádného vrcholu nemůže dostat více cestami, následně voda nemá v žádné hraně na výběr a plyne vždy jen jedním směrem, který udává orientaci.

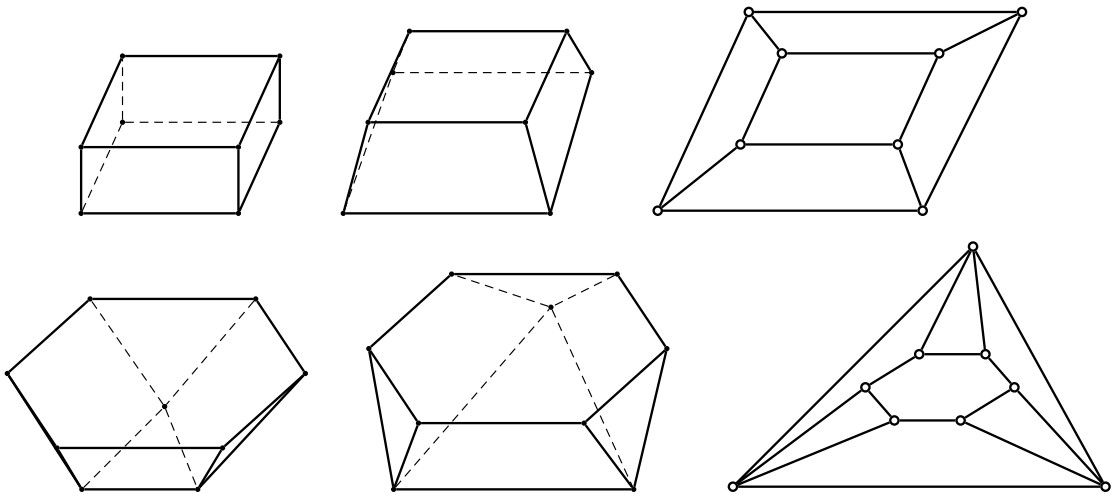
Coby příklad použijeme náš první strom, jako kořen jsme si zvolili e a vidíme jej dvakrát, nejprve v původní pozici a pak kořenem dole. Další dva obrázky ukazují, co se stane, když zvolíme jako kořen vrchol g.



Dá se říct, že neorientované stromy lze zakořenit.

12g. Bonus: Platónovská tělesa

Platónovská tělesa jsou mnohostěny, které jsou pravidelné, jak jen to jde. Jmenovitě, zvolí se konstanty p, q a požaduje se, aby každá stěna byla pravidelný p-úhelník a v každém vrcholu se scházelo q hran. Například klasická krychle má parametry $p = 4$ a $q = 3$. Již staří Řekové znali souvislost mezi tělesy a rovinnými grafy. Když těleso položíme jednou stěnou na podložku a hrany té stěny začneme roztahovat do stran, pak při pohledu shora dříve či později vidíme rovinný graf, jehož stěny odpovídají stěnám příslušného tělesa. Ta stěna, která u tělesa ležela na podložce, se stala tou neohraničenou „vnější“ stěnou v grafu (vidíme teď inspiraci, proč jsme ji u rovinných grafů započítávali). Ukážeme popsaný postup pro dvě tělesa, na která se díváme šikmo shora, nejprve klasický hranol, pak zajímavější objekt.



Trocha aritmetiky a Eulerův vzorec pro rovinné grafy ukáže, že není moc možností, jak Platónovská tělesa vytvářet.

V rovinném grafu pracujeme s počtem vrcholů v, počtem hran e a počtem stěn f. Co víme? Eulerova rovnost dává $v + f = 2 + e$. Každá stěna má p stran, když to sečteme, bereme všechny strany neboli hrany dvakrát, proto $fp = 2e$. Každý vrchol má dle zadání stupeň q, součet stupňů vrcholů je tedy $vq = 2e$. Máme tři rovnice a pět neznámých, tudíž je můžeme například vyřešit takto:

$$v = \frac{4p}{4-(p-2)(q-2)},$$
$$e = \frac{2pq}{4-(p-2)(q-2)},$$
$$f = \frac{4q}{4-(p-2)(q-2)}.$$

Pak lze udělat rozbor, pro které celočíselné hodnoty p, q dostáváme rozumné výsledky. Zde je dobré si uvědomit, že již ze zadání máme přirozené dolní meze $p \geq 3$, $q \geq 3$, $v \geq 4$, $f \geq 4$, $e \geq 6$.

Někteří autoři dávají přednost pomocí dvou rovností $v = \frac{2e}{p}$, $f = \frac{2e}{q}$ upravit Eulerův vztah na $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}$ a pak udělat rozbor, které hodnoty $p, q \geq 3$ vedou na celočíselné řešení pro e. Není to těžké, z $e > 0$ dostáváme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$, díky čemuž z omezení $p, q \geq 3$ dostáváme pouze možnosti $\{3,3\}$, $\{3,4\}$, $\{4,3\}$, $\{3,5\}$ a $\{5,3\}$. Není tedy možné mít víc než těchto pět Platónských těles. Zatím jsme nedokázali, že všech pět typů opravdu existuje v reálném světě, ale je to tak, jde o slavnou pětici známou už od antických Řeků.

Staří Řekové algebru moc nepěstovali a volili ještě jiný přístup. Podívali se na jeden vrchol a viděli, že se tam stýká q stěn, každá tam má svůj vrchol s určitým úhlem, tyto úhly jsou díky pravidelnosti stejné a je jich tedy q, dohromady nemohou dát ani 360 stupňů. Na jednu stěnu tedy připadne méně než 120^o, což není mnoho. Jediné pravidelné p-úhelníky, které připadají v úvahu, jsou tedy $p = 3, 4, 5$ s úhly $60^o, 90^o, 108^o$. Šestiúhelník už má úhel 120, to je moc.

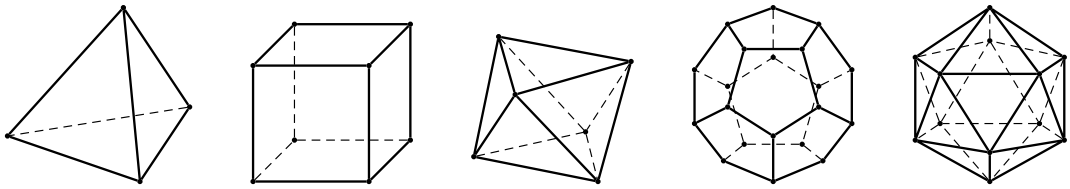
Jestliže $p = 5$, tak úhlů 108^o se u jednoho vrcholu tělesa může sejít nejvýše $q = 3$, což je i minimální počet, takže není možné mít více než jedno Platónovské těleso složené z pětiúhelníků, jmenovitě to s $q = 3$, pak dopočítáme $v = 20$, $e = 30$, $f = 12$. Tím ještě není zaručeno, že takováto věc existuje, ale my víme, že ano, je to pravidelný dvanáctistěn.

Jestliže $p = 4$, tak čtyři pravé úhly nedají méně než 360, tudíž je zase možnost jen $q = 3$, odtud $v = 8$, $e = 12$, $f = 6$, je jen jediná potencionální možnost mít Platónovské těleso ze čtverců. Je to šestistěn neboli naše známá krychle.

Poslední možnost $p = 3$ je nejzajímavější, protože počet úhlů 60^o, které se vměstnají k jednomu vrcholu a tedy dají méně než 360, je $q = 3, 4, 5$. Není tedy možné mít víc než tři Platónovská tělesa složená z trojúhelníků. I zde se ukáže, že tato tělesa v reálu existují. Uděláme si přehlednou tabulku, kde tělesa seřadíme pro změnu podle počtu stěn.

f	v	e	p	q
4	4	6	3	3
6	8	12	4	3
8	6	12	3	4
12	20	30	5	3
20	12	30	3	5

Obrázky následují. Hráči her na hrdiny je znají coby hrací kostky. Příznivci Rubikových hlavolamů znají více než polovinu tvarů také, sám mám doma čtyřstěn, kostku a dvanáctistěn.



Tím končí náš bonus, pěkná aplikace teorie grafů na geometrii těles.